0.1 Podstawowa wiedza o liczbach zespolonych $\mathbb{C}$

- Tworzą ciało, przestrzeń liniową, metryczną zupełną, unormowaną oraz Banacha
- Element: $z = a + bi$
- Suma: $z_1 = a + bi,\ z_2 = b + di\quad z_1 + z_2 = (a + c) + i(b + d)$
- Różnica: $z_1 = a + bi,\ z_2 = b + di\quad z_1 - z_2 = (a - c) + i(b - d)$
- Iloczyn: $z_1 = a + bi,\ z_2 = b + di\quad z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + i(ad + bc)$
- Iloraz: $z_1 = a + bi,\ z_2 = b + di\quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$
- Sprzężenie: $\overline{z} = a - bi$
- Moduł: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- Część rzeczywista: $Re(z) = a$
- Część urojona: $Im(z) = b$
- Argument: $\arg(z) = \{\varphi \in \mathbb{R} \colon Re(z) = |z| \cdot \cos\varphi,\ Im(z) = |z| \cdot \sin\varphi\} \setminus \{0\}$
- Argument główny: wartość argumentu z przedziału $(-\pi, \pi]$
- Postać trygonometryczna: $z = |z| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$
- Postać wykładnicza: $z = |z|e^{i\varphi}$
- Wzór Eulera: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$
- Sinus: $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$
- Cosinus: $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

0.2 Główne zależności

- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$
- $\overline{\overline{z}} = z$
- $Im(z) \leqslant |Im(z)| \leqslant |z|$
- $|z_1 - z_2| \geqslant \Big||z_1| - |z_2|\Big|$
- $Im(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$
- $z\overline{z} = |z|^2$
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$
- $|z_1 \pm z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$
- $z_1 z_2 = |z_1||z_2| \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$
- $|z| = |\overline{z}|$
- $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$
- $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
- $Re(z) \leqslant |Re(z)| \leqslant |z|$
- $Re(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}$
- $z^n = |z| \cdot (\cos n\varphi + \sin n\varphi)$

0.3 Twierdzenia i fakty

0.3.1 Ciągi i szeregi liczbowe

- Ciąg $\{z_n\} \subset \mathbb{C}$ ma granicę $g \in \mathbb{C} \iff \underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{n_0\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{n\geqslant n_0}{\forall}\ |z_n - g| < \varepsilon$
- $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$

0.3.2 Podstawowe funkcje zespolone

- Granica w punkcie: $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = g \Leftrightarrow \underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{z\in D}{\forall}\ 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - g| < \varepsilon$
- f jest ciągła w $z_0 \Leftrightarrow \forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{z\in D}\ 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - z_0| < \varepsilon$