

Algebra Dwuliniowa

Ćwiczenia

Rok 2014/2015

Spis treści

1	Zadania z ćwiczeń	2
1.1	23.02.15	2
1.1.1	Zad.1 / Zestaw 1	2
1.1.2	Zad.2 / Str.20	4
1.1.3	Zad.4 / Zestaw 1	4
1.1.4	Zad.4 / Str.21	5
1.1.5	Zad.5 / Str.21	5
1.1.6	Zad.7 / Str.21	5
1.2	02.03.15	6
1.2.1	Zad.2 / Zestaw I	6
1.2.2	Zad.2 / Str. 29	6
1.2.3	Zad.4 / Str. 29	7
1.2.4	Zad.5 / Str.29	7
1.2.5	Zad.13 / Zestaw I	8
1.3	09.03.15	8
1.3.1	Zad. 16 / Zestaw I	8
1.3.2	Zad.17 / Zestaw I	9
1.3.3	Zad.3 / Str. 38	9
1.3.4	Zad.9 / Str. 30	10
1.3.5	Zad.2 / Str.38	11
1.3.6	Zad.6a / Str.29	11
1.4	16.03.15	12
1.4.1	Zad.6b / Str.29	12
1.4.2	Zad.6c / Str.29	12
1.4.3	Zad.6d / Str.29	12
1.5	30.03.15	13
1.5.1	Zad.4 / Str.38	13
1.5.2	Zad.5d / Str.38	13
1.5.3	Zad.5a / Str. 38	13
1.5.4	Zad.6 / Str.38	14
1.5.5	Zad.7a / Str.38	14
1.5.6	Zad.8b / Str.39	14
1.5.7	Zad.8c / Str.39	15
1.6	13.04.15	15
1.6.1	Zad.6c / Zestaw 1	15
1.6.2	Zad.7c / Zestaw 1	16
1.6.3	Zad.5a / Str.50	17

1.6.4	Zad.5b / Str.50	17
1.6.5	Zad.5c / Str.50	17
1.7	20.04.15	18
1.7.1	Zad.6a / Str.50	18
1.7.2	Zad.6b / Str.50	18
1.7.3	Zad.2 / Str.50	18
1.7.4	Zad.3 / Str.50	19
1.7.5	Zad.4 / Str.50	19
1.8	27.04.15	19
1.8.1	Zad.5e / Zestaw 1	19
1.8.2	Zad.8a / Zestaw 1	20
1.8.3	Zad.10a / Zestaw 1	20
1.8.4	Zad.2 / str.61	21
1.9	04.05.15	21
1.9.1	Zad.1 / Str.61	21
1.9.2	Zad.6a / Str.61	22
1.9.3	Zad.6b / Str.61	22
1.9.4	Zad.8a / Str.124	23
1.9.5	Zad.8c / Str.124	23
1.9.6	Zad.8d / Str.124	23
1.10	11.05.14	24
1.10.1	Zad.8e / Str 124	24
1.10.2	Zad.2 / Str.154	24
1.10.3	Zad.6a / Str. 155	24
1.10.4	Zad.6b / Str.155	24
1.10.5	Zad.3 / Str.155	25
1.10.6	Zad.4 / Str. 155	25
1.10.7	Zad.5 / Str.155	25
1.11	18.05.15	25
1.11.1	Zad.9 / Str.155	25
1.11.2	Zad.11 / Str.155	26
1.11.3	Zad.4a / Str.71	26
1.11.4	Zad.4c / Str.71	27
1.11.5	Zad.4b / Str.71	27
1.11.6	Zad.6a / Str.72	27
1.11.7	Zad.6b / Str.72	27
2	Zadanie dodatkowe (nie z ćwiczeń)	29
2.1	30.03.15	29
2.1.1	Zad.7b / Str. 38	29

Rozdział 1

Zadania z ćwiczeń

1.1 23.02.15

1.1.1 Zad.1 / Zestaw 1

Chcemy sprawdzić czy podane odwzorowanie jest funkcjonałem dwuliniowym. Musimy zatem sprawdzić dwa warunki na funkcjonał:

$$(1) \forall_{u,w,v \in V} \forall_{a,b \in \mathcal{K}} \beta(au + bv, w) = a\beta(u, w) + b\beta(v, w)$$

$$(2) \forall_{u,w,v \in V} \forall_{a,b \in \mathcal{K}} \beta(u, av + bw) = a\beta(u, v) + b\beta(u, w)$$

$$f) \beta : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C} \quad \beta\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}\right) = x\bar{x}' - 2\bar{y}y'$$

Aby sprawdzić warunki dobieramy dwa skalary oraz jeden wektor:

$$a, b \in \mathbb{C} \quad \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$$

$$\text{Mamy zatem } u = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix}$$

Podstawiamy do warunku (1)

$$\beta\left(a \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}\right) = \beta\left(\begin{bmatrix} ax + bx'' \\ ay + by'' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}\right) =$$

$$(ax + bx'')\bar{x}' - 2(\bar{a}\bar{y} + \bar{b}\bar{y}'')y' = ax\bar{x}' + bx''\bar{x}' - 2\bar{a}\bar{y}y' - 2\bar{b}\bar{y}''y'$$

Mamy obliczoną lewą stronę warunku (1), teraz liczymy prawą:

$$a\beta\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}\right) + b\beta\left(\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}\right) = a(x\bar{x}' - 2\bar{y}y') + b(x''\bar{x}' - 2\bar{y}''y') =$$

$$ax\bar{x}' - 2a\bar{y}y' + bx''\bar{x}' - 2b\bar{y}''y'$$

Jak widać lewa strona nie jest równa prawej. Szukamy kontrprzykładu:

$$\beta((1+i) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}) = \beta(\begin{bmatrix} 1+i \\ 1+i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}) = (1+i) \cdot 1 - 2 \cdot (1-i) \cdot 1 = 1+i-2+2i = -1+3i$$

$$(1+i)\beta(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}) = (1+i) \cdot (1-2) = -1-i$$

Jak widać nie jest to samo.

$$\text{b) } \beta: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \beta(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}) = xx' + xy' + x'y + 2zz'$$

Sprawdzamy czy jest to funkcjonal:

$$a, b \in \mathbb{R} \quad \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Wstawiamy do warunku (1)

$$\beta(a \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}) =$$

$$\beta \begin{bmatrix} ax + bx'' \\ ay + by'' \\ az + bz'' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = axx' + bx''x' + axy' + bx''y' + x'ay + x'by'' + 2azz' + 2bz''z'$$

Obliczamy prawa stronę:

$$a\beta(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}) + b\beta(\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}) = a(xx' + xy' + x'y + 2zz') + b(x''x' + x''y' + x'y'' + 2z''z') =$$

$$axx' + axy' + ax'y + 2azz' + bx''x' + bx''y' + bx'y'' + 2bz''z'$$

Jak widać zgadza się, drugi warunek jest do policzenia analogicznie.

Poniżej pokazujemy metodę "na szybko" jak uzyskać macierz funkcjonału

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Jest to macierz uzyskana ze współczynników wzoru funkcjonału dla bazy kanonicznej.

Przykład dla innej bazy:

$$\mathcal{B} = (\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix})$$

I metoda:

a_{11} obliczamy biorąc wartość funkcjonału $\beta\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = 1 + 1 + 1 + 0 = 3$ (wartość na v_1, v_1 z bazy)

a_{12} analogicznie biorąc wartość funkcjonału na $\beta\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = 0 + 1 + 0 + 0 = 1$ (wartość na v_1, v_2 z bazy) itd.

Otrzymujemy macierz:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

II metoda:

$$\text{Wykorzystujemy macierz w bazie kanonicznej i wzór } [x, y, z] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

$$a_{11} = [1, 1, 0] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = [2, 1, 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 3 \text{ (w miejsce wektorów wstawiamy } v_1, v_1 \text{ z bazy)}$$

Analogicznie postępujemy dla dalszych współczynników macierzy i otrzymujemy identyczną jak wyżej macierz w bazie $\mathcal{B}$

1.1.2 Zad.2 / Str.20

$$q(x+y) = \beta(x+y, x+y) = \beta(x+y, x) + \beta(x+y, y) = \beta(x, x) + \beta(y, x) + \beta(x, y) + \beta(y, y) = q_\beta(x) + q_\beta(y) + 2\beta(x, y)$$

Rozpisujemy z definicji formy kwadratowej, a następnie funkcjonału (warunki 1 i 2) $q(x+y)$, wiemy, że funkcjonal jest symetryczny stąd $\beta(y, x) = \beta(x, y)$

1.1.3 Zad.4 / Zestaw 1

$$c) \quad q\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = x^2 + 2xy + y^2$$

Macierz w bazie standardowej (stosujemy wzór ze str. 21, współczynniki na przekątnej zostają takie same, a inne dzielimy przez 2):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Obliczanie wzoru funkcjonału: } [x, y] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = [x+y, x+y] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = xx' + yy' = xy' + yy'$$

Czy jest to przestań izotropowa? (Musi zawierać chociaż jeden wektor izotropowy)

Wiemy, że $x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2$. Stąd jeśli podstawimy coś co się zeruje w nawiasie np. $-1, 1$ otrzymamy 0

$$q_\beta\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

Zatem jest to przestrzeń izotropowa.

1.1.4 Zad.4 / Str.21

a) Mamy tu do czynienia z przestrzenią Minkowskiego $(\mathbb{R}^4, \beta)$

$$\beta([x_1, y_1, z_1, t_1], [x_2, y_2, z_2, t_2]) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 - t_1t_2$$

Ustalmy $x, y, z \in \mathbb{R}$ nie wszystkie równe 0

$\exists_{t \in \mathbb{R}} [x, y, z, t]$ – izotropowy

Musimy znaleźć takie t , aby forma kwadratowa po podstawieniu tego t zerowała się (wtedy wektor będzie izotropowy)

$$t = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$q_B([x, y, z, t]) = \beta([x, y, z, t], [x, y, z, t]) = x^2 + y^2 + z^2 - (\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^2 = x^2 + y^2 + z^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$$

b) $\text{lin}([1, 0, 0, 1], [0, 1, 1, 0])$

$$x = [1, 0, 0, 1]$$

$$u \in S$$

$$u = [a, b, b, a] \in S$$

$$\beta([1, 0, 0, 1], [a, b, b, a]) = a - a = 0$$

1.1.5 Zad.5 / Str.21

(V, β) – przestrzeń refleksyjna

$v_1, \dots, v_r$ – parami prostopadłe i nieizotropowe wektory

Rozpisujemy definicję wektorów liniowo niezależnych:

$$a_1v_1 + \dots + a_rv_r = \theta \Rightarrow a_1 \dots a_r = 0$$

Ustalmy $i \in \{1 \dots r\}$

$$0 = 0 \cdot \beta(\theta, v_i) = \beta(0 \cdot \theta, v_i) = \beta(\theta, v_i) = \beta((a_1v_1 + \dots + a_rv_r), v_i) = a_1\beta(v_1, v_i) + \dots + a_r\beta(v_r, v_i) =$$

$$a_i \underbrace{\beta(v_i, v_i)}_{\neq 0} \Rightarrow a_i = 0$$

Ponieważ wszystkie $\beta(v_1, v_i) \dots \beta(v_r, v_i) = 0$ poza $\beta(v_i, v_i)$ w sumie zostaje nam $a_i\beta(v_i, v_i)$. Z tego, że wektory nie są izotropowe $\beta(v_i, v_i) \neq 0$ stąd $a_i = 0$

1.1.6 Zad.7 / Str.21

a) Nasza przestrzeń: (V, β)

$$\text{char } K \neq 2$$

V skośnie symetryczna $\Leftrightarrow V$ alternujące

$$\forall_{u, v \in V} \beta(u, v) = -\beta(v, u) \Leftrightarrow \forall_{u \in V} q(u) = \beta(u, u) = 0$$

($\Rightarrow$) Ustalmy $u \in V$

$$\beta(u, u) = -\beta(u, u)$$

$$2\beta(u, u) = 0$$

Już widać czemu mamy ciało charakterystyki różnej od 2, dzielimy zatem przez 2

$$\beta(u, u) = 0$$

($\Leftarrow$) Ustalmy $u, v \in V$

$$0 = \beta(u+v, u+v) = \underbrace{\beta(u, u)}_{=0} + \beta(u, v) + \beta(v, u) + \underbrace{\beta(v, v)}_{=0}$$

$$0 = \beta(u, v) + \beta(v, u)$$

$$\beta(u, v) = -\beta(v, u)$$

W dowodzie z prawej na lewo korzystamy wyłącznie z definicji przestrzeni alternującej

b) char $K = 2$

V skośnie symetryczne $\Leftrightarrow V$ symetryczne

$\forall u, v \in V \quad \beta(u, v) = -\beta(v, u)$, gdyż $-1 = 1$ w ciele charakterystyki równej 2

1.2 02.03.15

1.2.1 Zad.2 / Zestaw I

$$(\mathbb{R}^3, \beta)$$

$$\mathcal{B} = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \varepsilon_1 + \varepsilon_3, \varepsilon_3) \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\beta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \varepsilon_1) = \beta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, (\varepsilon_1 + \varepsilon_3) - \varepsilon_3) = \underbrace{\beta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \varepsilon_1 + \varepsilon_3)}_{=0} - \underbrace{\beta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \varepsilon_3)}_{=1} = 1$$

$$\mathcal{B}_1 = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$$

$$B - \text{macierz w bazie } \mathcal{B}_1 \quad B = P^T A P$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = P^T A P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[x, y, z] \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = [-y, -x, z] \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = -x'y - xy' + zz'$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.2.2 Zad.2 / Str. 29

$$(V, \beta) \cong A \quad \mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$$

$$(V, \beta) - \text{symetryczna} \Leftrightarrow A - \text{symetryczna} \quad (A = A^T)$$

($\Rightarrow$)

$$\forall_{u,v \in V} \beta(u,v) = \beta(v,u)$$

$$A = [\beta(u_i, u_j)] = [\beta(u_j, u_i)] = A^T$$

($\Leftarrow$)

$$v = \sum_i a_i u_i \quad w = \sum_j b_j u_j$$

$$\beta(v, w) = \sum_i \sum_j a_i b_j \beta(u_i, u_j) = \sum_i \sum_j b_j a_i \beta(u_j, u_i) = \beta(w, v)$$

1.2.3 Zad.4 / Str. 29

a) $B \cong A \Leftrightarrow B = P^T A P$

1. zwrotność $A \cong A \quad P = I$ (macierz jednostkowa)

2. symetryczność $A \cong B \Leftarrow B \cong A$

$$A \cong B \Leftrightarrow A = P^T B P$$

$$A = P^T B P$$

$$(P^T)^{-1} A = B P$$

$$(P^T)^{-1} A P^{-1} = B$$

$$(P^{-1})^T A P^{-1} = B$$

Weźmy $P = P^{-1}$, mamy wtedy $P^T A P = B \Leftrightarrow B \cong A$

Uwaga: $(P^T)^{-1} = (P^{-1})^T$

3. przechodność $A \cong C \wedge C \cong B \Leftarrow A \cong B$

$$\left. \begin{array}{l} A \cong C \Leftrightarrow A = P^T C P \\ C \cong B \Leftrightarrow C = Q^T B Q \end{array} \right\} \Leftrightarrow A = P^T (Q^T B Q) P$$

$A = (QP)^T B (QP)$ stąd dla $P = QP$ mamy $A = P^T B P$ co nam daje $A \cong B$

Uwaga: $A^T B^T = (BA)^T$

1.2.4 Zad.5 / Str.29

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Mamy pokazać, że $A \cong B$ nad $\mathbb{Z}_7$ i $\mathbb{R}$ oraz $A \not\cong B$ nad $\mathbb{Z}_3$ i $\mathbb{Q}$

Pierwszy sposób:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = P^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} P$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = (\det P)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$2 = (\det P)^2 \cdot 1 = \underbrace{(\det P)^2}_{k \in K}$$

$2 = k^2$ - Nie znajdziemy takiego k w $\mathbb{Z}_3$ i $\mathbb{Q}$, w $\mathbb{Z}_7$ jest to 3, bo $3^2 = 2$, a w $\mathbb{R}$ jest to $k = \sqrt{2}$

Drugi sposób:

$$P = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & z \\ y & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} P$$

1.2.5 Zad.13 / Zestaw I

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Zastosujemy metodę Jacobiego

Minory główne macierzy:

$$\Delta_0 = 1$$

$$\Delta_1 = 1$$

$$\Delta_2 = -4$$

$$\Delta_3 = -25$$

Nasza macierz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{25} \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Zastosujemy metodę Jacobiego

Minory główne macierzy:

$$\Delta_0 = 1$$

$$\Delta_1 = 1$$

$$\Delta_2 = -8$$

$$\Delta_3 = -41$$

Nasza macierz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{41} \end{bmatrix}$$

1.3 09.03.15

1.3.1 Zad. 16 / Zestaw I

Metoda Lagrange'a

$(\mathbb{R}^3, \beta)$

$$q_B([x_1, x_2, x_3]) = 5x_1^2 + x_2^2 + ax^3 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$$

Wybieramy te elementy, które mają x_1 :

$$\underline{5x_1^2} + x_2^2 + ax^3 + \underline{4x_1x_2} - \underline{2x_1x_3} - 2x_2x_3 = bx^2 + cy^2 + dz^2$$

Utworzyć chcemy macierz diagonalną $\begin{bmatrix} b & & \\ & c & \\ & & d \end{bmatrix}$

Wyciągamy 5 przed nawias:

$$5(x_1^2 + \frac{4}{5}x_1x_2 - \frac{2}{5}x_1x_3) + x_2^2 + ax^3 - 2x_2x_3$$

Dopełniamy tak, aby mieć wzór skróconego mnożenia, lecz pamiętamy by odjąć to co dodaliśmy.

$$5(x_1 + \frac{2}{5}x_2 - \frac{1}{5}x_3)^2 - \frac{4}{5}x_2^2 - \frac{1}{5}x_3^2 + \frac{4}{5}x_2x_3 + x_2^2 + ax^3 - 2x_2x_3$$

Zawartość nawiasu będzie nową zmienną x . Następnie upraszczamy wyrażenie i powtarzamy tę procedurę od początku:

$$5x^2 + \frac{1}{5}x_2^2 + (a - \frac{1}{5})x_3^2 - \frac{6}{5}x_2x_3$$

$$5x^2 + \frac{1}{5}(x_2^2 - 6x_2x_3) + (a - \frac{1}{5})x_3^2$$

$$5x^2 + \frac{1}{5}(x_2 - 3x_3)^2 - \frac{9}{5}x_3^2 + (a - \frac{1}{5})x_3^2$$

$$5x^2 + \frac{1}{5}y^2 + (a - 2)x_3^2$$

Bierzemy współczynniki i wkładamy je do macierzy:

$$\begin{bmatrix} 5 & & \\ & \frac{1}{5} & \\ & & a - 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Liczmy sygnaturę: } \text{sgn } A = \begin{cases} 2 & a = 2 \\ 3 & a > 2 \\ 1 & a < 2 \end{cases}$$

Dodatkowo: sprawdzić dla jakiego parametru a macierz będzie kongruenta z macierzą z zadania 13 (będzie izometria):

$$(\mathbb{R}^3, \beta) \quad \mathcal{B}_1 = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$r \ B = 3$$

$$\dim \ B = 3$$

$$\text{sgn } B = 1$$

Stąd dla $a < 2$ mamy izometrię

1.3.2 Zad.17 / Zestaw I

$$\mathbf{Z} \text{ funkcyjonału: Odczytujemy współczynniki } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \text{diagonalna}$$

Z formy kwadratowej: Stosujemy metodę Lagrange'a (bo jest parametr, gdyby nie było - metoda Jacobiego)

1.3.3 Zad.3 / Str. 38

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cong (1, 1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Korzystamy ze wskazówki skąd wiemy, że (x, y) oraz $(x + y, y)$ są bazami płaszczyzny. Zatem budujemy macierz przejścia z bazy $(x + y, y)$ do (x, y) , wiedząc, że $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ jest macierzą pewnego funkcyjonału w bazie (x, y) , a my szukamy macierzy tego funkcyjonału w bazie $(x + y, y)$

$$x + y = 1 \cdot x + 1 \cdot y$$

$$y = 0 \cdot x + 1 \cdot y$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} P = P^T P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ w bazie } (x+y, y)$$

Stąd nasze macierze są kongruentne

$$\text{b) } \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cong (1, 1)$$

I metoda: Zauważmy, że pierwsza macierzą jest płaszczyzną hiperboliczną, która dla ciała $\text{char} = 2$ jest przestrzenią alternującą, z kolei $(1, 1)$ nie jest alternująca, dlatego macierze te nie są kongruentne.

II metoda: Mamy daną przestrzeń dwuliniową (U, α) , a macierz $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ jest macierzą funkcjonału w bazie (u, v)

Stąd: $U \ni w = au + bv$

$$q(au + bv) = \alpha(au + bv, au + bv) = a\alpha(au + bv, u) + b\alpha(au + bv, v) = a^2 \underbrace{\alpha(u, u)}_{=0} + ab\alpha(v, u) + ba\alpha(u, v) +$$

$$b^2 \underbrace{\alpha(v, v)}_{=0} = 2aba\alpha(u, v) = 0 \text{ w ciele } \text{char} = 2$$

Stąd dla każdego wektora forma kwadratowa przyjmuje wartości zerowe.

1.3.4 Zad.9 / Str. 30

Wiadomo, że $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ jest płaszczyzną hiperboliczną.

Z odpowiedniego twierdzenia wiemy, że gdy mamy płaszczyznę hiperboliczną nad ciałem $\text{char} \neq 2$ to $\{\frac{1}{2}u + v, \frac{1}{2}u - v\}$ jest bazą ortogonalną tej płaszczyzny i macierz w tej bazie jest równa $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Zatem, gdy macierz przejścia z bazy $\{u, v\}$ do bazy $\{\frac{1}{2}u + v, \frac{1}{2}u - v\}$ ma postać $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = P^T \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} P$$

$$(P^T)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Uwaga: w tym zadaniu stosuje się nieco inne oznaczenia i $Q = P^T$, zatem $Q = (P^T)^{-1}$ w naszym przykładzie.

$$\text{b) } Q = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & z \\ y & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x & -y \\ z & -t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & z \\ y & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 - y^2 & x^2 - yt \\ x^2 - yt & z^2 - t^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 - yt = 0 \\ z^2 - t^2 = -a \end{cases}$$

Korzystając ze wskazówki dostajemy:

$$x = \frac{1}{2}(1 + a)$$

$$y = \frac{1}{2}(1 - a)$$

$$t = \frac{1}{2}(1 + a)$$

$$z = \frac{1}{2}(1 - a)$$

1.3.5 Zad.2 / Str.38

$\Rightarrow$

$$\det(1, 1) = \dot{K}^2$$

$$\det(1, -1) = -\dot{K}^2$$

$$-\dot{K}^2 = \dot{K}^2 \Rightarrow -1 \in \dot{K}^2$$

$\Leftarrow$

$$-1 \in \dot{K}^2$$

Zatem $-1 = x^2$

$$(1, -1) = (1, x^2) \cong (1, 1)$$

1.3.6 Zad.6a / Str.29

$$\dot{K}/\dot{K}^2 = \{a\dot{K}^2 : a \in K\}$$

$$K = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$$

Wiadomo, że

$$a\dot{K}^2 = b\dot{K}^2 \Leftrightarrow ab \in \dot{K}^2$$

a) Nad $\mathbb{C}$

$a\dot{\mathbb{C}}^2 = \dot{\mathbb{C}}^2$ - Mamy równość warstw, bo

$a \in \dot{\mathbb{C}}^2$ - każda liczba zespolona jest kwadratem stąd:

$$\dot{\mathbb{C}}/\dot{\mathbb{C}}^2 = \{\dot{\mathbb{C}}^2\}$$

Rząd grupy : 1

b) Nad $\mathbb{R}$

$$a\dot{\mathbb{R}}^2 = b\dot{\mathbb{R}}^2 \Leftrightarrow ab \in \dot{\mathbb{R}}^2 - \text{Stąd wiemy, że } ab \text{ musi być dodatnie (by było kwadratem)}$$

Mamy dwa przypadki:

I $a > 0$

$$a \cdot \dot{\mathbb{R}}^2 = 1 \cdot \dot{\mathbb{R}}^2$$

$$a \cdot 1 > 0$$

II $a < 0$

$$a \cdot \dot{\mathbb{R}}^2 = -1 \cdot \dot{\mathbb{R}}^2$$

$$a \cdot (-1) > 0$$

$$\text{Stąd } \dot{\mathbb{R}}/\dot{\mathbb{R}}^2 = \{1 \cdot \dot{\mathbb{R}}^2, -1 \cdot \dot{\mathbb{R}}^2\}$$

Rząd grupy : 2

c) Nad $\mathbb{Q}$

$$a\dot{\mathbb{Q}}^2 = b\dot{\mathbb{Q}}^2 \Leftrightarrow ab \in \dot{\mathbb{Q}}^2$$

Weźmy dwie liczby pierwsze różne od siebie

$$a \in \mathbb{P} \quad b \in \mathbb{P} \quad a \neq b$$

Wiemy, że ich iloczyn na pewno nie będzie kwadratem w $\mathbb{Q}$

$$ab \notin \mathbb{Q}^2$$

$$a\dot{\mathbb{Q}}^2 \neq b\dot{\mathbb{Q}}^2$$

$$\text{Stąd } \dot{\mathbb{Q}}/\dot{\mathbb{Q}}^2 = \{a \cdot \dot{\mathbb{Q}}^2 : a \in \mathbb{P} \cup \dots\}$$

Rząd grupy będzie wynosił ∞ mimo, że oprócz liczb pierwszych mamy coś innego, ale jak wiemy moc zbioru liczb pierwszych wynosi ∞

1.4 16.03.15

1.4.1 Zad.6b / Str.29

Mamy pokazać, że dla ciała skończonego K o charakterystyce równej 2 ($\text{char } K = 2$) mamy $\dot{K} = \dot{K}^2$. Skorzystać trzeba z faktu, że jądro homomorfizmu grup $\dot{K} \rightarrow \dot{K}^2, x \rightarrow x^2$ jest 1-elementowe.

Zatem mamy:

$f : \dot{K} \rightarrow \dot{K}^2$ - homomorfizm grup (dokładniej nawet epimorfizm)

$$x \in \text{Ker } f \Leftrightarrow f(x) = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \{-1, 1\}$$

$$\text{Ker } f = \{-1, 1\}$$

Jestesmy jednak na ciałem $\text{char} = 2$ stąd $-1 = 1$ i nasze jądro jest jednoelementowe ($\text{Ker } f = \{1\}$)

Teraz skorzystamy z twierdzenia o **izomorfizmie** i z niego wiemy, że:

$$\dot{K}/\{1\} \cong \dot{K}^2 - \text{izomorfizm zachowuje rzędy, stąd rząd grupy ilorazowej } \underbrace{\dot{K}/\{1\}}_{\cong \dot{K}} \text{ równy jest rzędowi grupy}$$

$$\dot{K}^2.$$

Mamy zatem $|\dot{K}| = |\dot{K}^2|$; wiemy, że $\dot{K}^2 < \dot{K}$ i dodając założenie, że K jest grupą skończoną otrzymujemy, że $\dot{K} = \dot{K}^2$.

Dla grup nieskończonych fakt ten nie zachodziłby.

1.4.2 Zad.6c / Str.29

Analogicznie jak powyżej, z tą różnicą, że mamy jądro 2-elementowe:

$$|\dot{K}/\{-1, 1\}| = |\dot{K}^2| - \text{identycznie rzędy grup poprzez tw. o izomorfizmie}$$

Skorzystamy z twierdzenia **Lagrange'a**: $|G| = |H| \cdot |G : H|$

$$\frac{|G|}{|H|} = |G : H| = |G/H| - \text{po odpowiednich przekształceniach}$$

$$|\dot{K}/\{-1, 1\}| = |\dot{K}^2| \Rightarrow \frac{|\dot{K}|}{2} = |\dot{K}^2| \Rightarrow 2 = \frac{|\dot{K}|}{|\dot{K}^2|} = |\dot{K}/\dot{K}^2| - \text{z Tw. Lagrange'a}$$

1.4.3 Zad.6d / Str.29

Mamy pokazać, że dla ciała K o charakterystyce równej 2 zbiór $\dot{K}^2$ jest podciałem ciała K . Zatem do pokazania są trzy warunki na podciało:

$$1. \quad 0, 1 \in \dot{K}^2$$

Oczywiste, bo $0, 1 \in K$ (K jest ciałem, stąd $0^2 = 0 \in \dot{K}^2$, $1^2 = 1 \in \dot{K}^2$)

$$2. \quad \forall_{a, b \in \dot{K}^2} \quad a - b \in \dot{K}^2$$

Ustalmy $a, b \in \dot{K}^2$

$$a = x^2 \quad b = y^2$$

$$a - b = x^2 - y^2 = x^2 + y^2 = x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2 \in \dot{K}^2 \text{ - korzystamy z faktu, że } \text{char } K = 2$$

$$3. \quad \forall_{a,b \in \dot{K}^2, b \neq 0} ab^{-1} \in \dot{K}^2$$

$$\text{Ustalmy } a, b \in \dot{K}^2$$

$$a = x^2 \quad b = y^2$$

$$x^2 \cdot (y^2)^{-1} = \frac{x^2}{y^2} = \left(\frac{x}{y}\right)^2 \in \dot{K}^2$$

1.5 30.03.15

1.5.1 Zad.4 / Str.38

Mamy pokazać, że dla dowolnego ciała K i dla dowolnego elementu $a \in \dot{K}$ zbiór $D(1, a)$ jest podgrupa grupy $\dot{K}$

$$\text{Zbiór } D(1, a) = \{x^2 + ay^2 : x, y \in K\} \setminus \{0\}$$

Sprawdzamy dwa warunki na podgrupę:

$$1. \quad \forall_{b,c \in D(1,a)} bc \in D(1, a)$$

Korzystamy z tożsamości podanej we wskazówce:

$$\underbrace{(x^2 + ay^2)}_b \underbrace{(z^2 + at^2)}_c = (xz + ayt)^2 + a(xt - yz)^2 \in D(1, a)$$

$$2. \quad \forall_{b \in D(1,a)} b^{-1} \in D(1, a)$$

$$\underbrace{(x^2 + ay^2)}_b^{-1} = (x^2 + ay^2)^{-2}(x^2 + ay^2) = \frac{x^2 + ay^2}{(x^2 + ay^2)^2} = \left(\frac{x}{x^2 + ay^2}\right)^2 + a\left(\frac{y}{x^2 + ay^2}\right)^2 \in D(1, a)$$

1.5.2 Zad.5d / Str.38

Mamy pokazać, że $D(a, b) = a \cdot D(1, ab)$

Rozpisujemy lewą stronę:

$$D(a, b) = \{ax_1^2 + bx_2^2 : x_1, x_2 \in K\} \setminus \{0\}$$

Rozpisujemy prawą stronę:

$$a \cdot D(1, ab) = \{a \cdot h \in D(1, ab)\} = \{a \cdot (1 \cdot x_1^2 + abx_2^2) \setminus \{0\}\} = \{ax^2 + \underbrace{a^2}_{\text{znika}} bx_2^2\} \setminus \{0\} = \{ax^2 + bx_2^2\} \setminus \{0\}$$

Jak widać po obu stronach po rozpisaniu otrzymujemy to samo.

1.5.3 Zad.5a / Str. 38

Mamy pokazać, że $D(a_1, \dots, a_n) \supseteq a_1 \dot{K}^2 \cup \dots \cup a_n \dot{K}^2$

Ogólniej rzecz biorąc: $a \in D(U, \alpha) \Rightarrow a \dot{K}^2 \subseteq D(U, \alpha)$

Wiemy, że $a_i \in D(a_1, \dots, a_n)$, bo $a_i = a_1 \cdot 0 + \dots + a_i \cdot 1^2 + \dots + a_n \cdot 0$

Chcemy pokazać, że $a_i \dot{K}^2 \subset D(a_1, \dots, a_n)$

Wtedy suma $a_1 \dot{K}^2 \cup \dots \cup a_n \dot{K}^2 \subset D(a_1, \dots, a_n)$

Skorzystajmy z ogólniejszego przypadku:

$a = q(u)$ - norma pewnego wektora $u \in U$

(?) $ak^2 \in D(U, \alpha)$

$$ak^2 = k^2 \cdot q(u) = q(uk)$$

Stąd $ak^2 \in D(U, \alpha)$

Analogicznie można rozważyć przypadek dla sumy.

1.5.4 Zad.6 / Str.38

Mamy pokazać, że: $1 \in D(a, b) \forall_{a, b \in \dot{K}} \Rightarrow D(a, b) = \dot{K} \forall_{a, b \in \dot{K}}$

Zawieranie $\subseteq$ - oczywiste, bo $D(a, b) \subseteq \dot{K}$ zawsze

Zawieranie $\supseteq$:

Ustalmy $c \in \dot{K}$. Pokażemy, że $c \in D(a, b)$

Zatem chcemy aby $c = ax^2 + by^2$

Dzieląc przez c uzyskujemy $1 = ac^{-1}x^2 + bc^{-1}y^2$

Ale wiemy, że $1 \in D(a', b')$ dla każdych a', b'

Jeśli weźmiemy $a' = ac^{-1}$ i $b' = bc^{-1}$ dostaniemy $1 = ac^{-1}x^2 + bc^{-1}y^2$ i przemnażając powrotnie przez c mamy $c = ax^2 + by^2$.

1.5.5 Zad.7a / Str.38

Mamy pokazać, że $D(1, 1) = \dot{K}$ (Przestrzeń uniwersalna)

Wiemy, że płaszczyzna hiperboliczna $(1, -1)$ jest przestrzenią uniwersalną. Jeśli $(1, 1) \cong (1, -1)$ to wtedy $(1, 1)$ też będzie uniwersalna.

Z zadania 2 ze strony 38 wiemy, że $(1, 1) \cong (1, -1) \Leftrightarrow -1 \in \dot{K}^2$

$-1 \in \mathbb{Z}_5$ gdyż $-1 = 2^2$

$-1 \in \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ gdyż $-1 = i^2$ (Dla przypomnienia $\mathbb{Q}(\sqrt{-1}) = \{a + b\sqrt{-1} : a, b \in \mathbb{Q}\}$)

Dla $\mathbb{Z}_{11}$ obliczenia trzeba robić ręcznie (jak w zadaniu 7b ze strony 38)

1.5.6 Zad.8b / Str.39

Mamy pokazać, że $b \in D(1, -a) \Rightarrow a \in D(1, -b)$

$$b = x^2 - ay^2$$

$ay^2 = 1 \cdot x^2 - b \cdot 1^2$ - dzielimy przez y^2

$$a = 1 \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^2 - b \left(\frac{1}{y}\right)^2 \text{ dla } y \neq 0$$

Dla $y = 0$ mamy $b = x^2$

$(1, -x^2) \cong (1, -1)$ (niezmiennik izometrii, tylko dla $\text{char} \neq 2$)

Wiemy, że $D(1, -1) = \dot{K}$ (przestrzeń uniwersalna), poprzez izometrię uzyskujemy $D(1, -b) = \dot{K}$

Stąd $a \in D(1, -b)$, bo $a \in \dot{K}$

A co jeśli mamy ciało o charakterystyce równej 2?

Wtedy niestety własność ta nie zachodzi. Pokażemy to prezentując odpowiedni kontrprzykład:

Mamy $K = \mathbb{Z}_2(X) = \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} : f, g \in \mathbb{Z}_2[X] \right\}$ (przestrzeń funkcji wymiernych o współczynnikach z $\mathbb{Z}_2$)

Niech $-a = X^2$ i $-b = X$ (Na ćwiczeniach oznaczaliśmy to po prostu jako a i b , ale wtedy pomijaliśmy minusy)

Chcemy sprawdzić czy $X^2 \in D(1, X) \Rightarrow X \in D(1, X^2)$

$$\text{Mamy zatem } D(1, X) = \left\{ 1 \cdot \frac{f^2(x)}{g^2(x)} + X \cdot \frac{h^2(x)}{w^2(x)} : \frac{f}{g}, \frac{h}{w} \in \mathbb{Z}_2(X) \right\}$$

Łatwo sprawdzić, że $X^2 = 1 \cdot X^2 + X \cdot 0$ - stąd $X^2 \in D(1, X)$ i poprzednik implikacji zachodzi.

Sprawdźmy teraz czy $X \in D(1, X^2)$

$$D(1, X^2) = \left\{ 1 \cdot \frac{f^2(x)}{g^2(x)} + X^2 \cdot \frac{h^2(x)}{w^2(x)} : \frac{f}{g}, \frac{h}{w} \in \mathbb{Z}_2(X) \right\}$$

$$X = \frac{f^2(x)}{g^2(x)} + X^2 \frac{h^2(x)}{w^2(x)} / \cdot g^2 \cdot w^2$$

$$X \cdot g^2(x) \cdot w^2(x) = \underbrace{(f(x) \cdot w(x))^2}_{F(x)} + \underbrace{(X \cdot h(x) \cdot g(x))^2}_{G(x)}$$

$$F(x) = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0$$

Podnosząc do kwadratu uzyskujemy:

$F(x)^2 = a_n^2 X^{2n} + \dots + a_{n-1}^2 X^{2n-2} + \dots + a_1^2 X^2 + a_0^2$ - zatem stopień tego wielomianu jest parzysty (wszystkie

potęgi są parzyste)

Analogicznie sytuacja ma się z $G^2(x)$, suma tych wielomianów też ma stopień parzysty (nawet gdy wyrazy przy najwyższej potędze by się znosiły to wtedy następne też mają stopień parzysty).

Z kolei $X \cdot g^2(x) \cdot w^2(x)$ ma stopień nieparzysty. W ten sposób dochodzimy do sprzeczności.

1.5.7 Zad.8c / Str.39

Mamy pokazać, że $D(1, -a) \cap D(1, -b) \subseteq D(1, -ab)$

Ustalmy $c \in D(1, -a) \cap D(1, -b) \Rightarrow c \in D(1, -a) \wedge c \in D(1, -b) \Rightarrow$ (podpunkt b) $a \in D(1, -c) \vee b \in D(1, -c)$

Wiemy, że zbiór norm wektorów nieizotropowych jest podgrupą (zadanie 4 ze strony 38), zatem jeśli $a \in D(1, -c)$ i $b \in D(1, -c)$ to $ab \in D(1, -c)$

Ponownie korzystamy z podpunktu b tego samego zadania i otrzymujemy $c \in D(1, -ab)$

1.6 13.04.15

1.6.1 Zad.6c / Zestaw 1

Mamy daną macierz funkcjonału dwuliniowego $\beta : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 :$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ w bazie } \mathcal{B} = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \varepsilon_1 + \varepsilon_3, \varepsilon_3)$$

Przypomnienie:

$$S^\perp = \{u \in U : \alpha(u, v) = 0 \ \forall v \in S\}$$

$$u^\perp = \{v \in U : \alpha(u, v) = 0\} = \text{lin}(u)^\perp$$

W naszym przykładzie $S = \text{Sol}(X - Z = 0)$

$$X = Z$$

$$Y = Y$$

$$Z = Z$$

$$\text{Mamy zatem } \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = Z \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + Y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ czyli } \text{lin}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$u \in S^\perp \Rightarrow \beta\left(u, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 0 \text{ oraz } \beta\left(u, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\text{Uwaga: Gdybyśmy mieli bazę kanoniczną wystarczyłoby policzyć: } [x, y, z] \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

(dla pierwszego wektora), lecz w naszym przypadku mamy inną bazę, stąd jako pionowy wektor w tym wzorze trzeba wstawić zamiast wektora jego współrzędne w bazie $\mathcal{B}$

Obliczamy współrzędne wektora $[1, 0, 1] :$

$$[1, 0, 1] = 0 \cdot (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + 1 \cdot (\varepsilon_1 + \varepsilon_3) + 0 \cdot \varepsilon_3 \text{ stąd współrzędne jego wynoszą } [0, 1, 0]$$

I teraz można wstawić do wzoru:

$$[x, y, z] \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = [-x + z, y + z, x + y + z] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = y + z = 0$$

Analogicznie drugi wektor:

Współrzędne: $[0, 1, 0] = 1 \cdot (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) - 1 \cdot (\varepsilon_1 + \varepsilon_3) + 0 \cdot \varepsilon_3$ czyli współrzędne wynoszą $[1, -1, 0]$

$$\text{Wzór: } [x, y, z] \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = [-x + z, y + z, x + y + z] \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = -x - y = 0$$

Mamy zatem układ dwóch równań:

$$\begin{cases} y + z = 0 \\ -x - y = 0 \\ y = -z \\ -x + z = 0 \end{cases}$$

$$x = z$$

$$y = -z$$

$$z = z$$

Czyli jest to $\text{lin}([1, -1, 1])$

Zatem uzyskaliśmy współrzędne w bazie $\mathcal{B}$ wektora przez nas poszukiwanego, na którym rozpięta podprzestrzeń będzie szukanym ortogonalnym dopełnieniem.

Obliczamy ten wektor: $1 \cdot (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) - 1 \cdot (\varepsilon_1 + \varepsilon_3) + 1 \cdot \varepsilon_3 = \varepsilon_2 + \varepsilon_3$

Stąd nasze ortogonalne dopełnienie wygląda następująco: $S^\perp = \text{lin}([0, 1, 1])$

1.6.2 Zad.7c / Zestaw 1

Mamy znaleźć bazę ortogonalną przestrzeni ortogonalnej $(\mathbb{Z}_5^3, \beta)$ gdzie macierz funkcjonału β w bazie

$$\text{jednostkowej jest równa } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Niech $\mathcal{B}$ będzie bazą ortogonalną tej przestrzeni, $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$

Skorzystamy z odpowiednika twierdzenia Steinitza o wymianie, dlatego potrzebujemy na sam początek wektor nieizotropowy od którego zaczniemy budować naszą bazę ortogonalną. Jak widać, żaden z wektorów bazowych nie jest nieizotropowy (przekątna macierzy). Stąd musimy znaleźć inny będący nieizotropowy (norma różna od 0).

Weźmy np. $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ i sprawdźmy czy jest nieizotropowy:

$$q(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = \beta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2, \varepsilon_1 + \varepsilon_2) = \beta(\varepsilon_1, \varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \beta(\varepsilon_2, \varepsilon_1 + \varepsilon_2) = \underbrace{\beta(\varepsilon_1, \varepsilon_1)}_{=0} + \underbrace{\beta(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}_{=1} + \underbrace{\beta(\varepsilon_2, \varepsilon_1)}_{=1} + \underbrace{\beta(\varepsilon_2, \varepsilon_2)}_{=0} =$$

$2 \neq 0$ - mamy wektor nieizotropowy ($u_1 = [1, 1, 0]$).

Korzystamy teraz ze wzoru używanego już w zadaniu 6c i szukamy ortogonalnego dopełnienia tego wektora:

$$[x, y, z] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = [y + z, x + z, x + y] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = y + z + x + z = x + y + 2z = 0$$

(Można liczyć bez współrzędnych, bo mamy bazę kanoniczną)

$$x = 3z + 4y$$

$$y = y$$

$$z = z$$

Stąd mamy $\text{lin}([3, 0, 1], [4, 1, 0])$

Wybieramy jeden z tych wektorów i sprawdzamy czy będzie on nieizotropowy (wtedy damy go do bazy ortogonalnej)

Weźmy $[3, 0, 1]$

$$q(3\varepsilon_1 + \varepsilon_3) = \beta(3\varepsilon_1 + \varepsilon_3, 3\varepsilon_1 + \varepsilon_3) = \beta(3\varepsilon_1, 3\varepsilon_1 + \varepsilon_3) + \beta(\varepsilon_3, 3\varepsilon_1 + \varepsilon_3) = \beta(3\varepsilon_1, 3\varepsilon_1) + \beta(3\varepsilon_1, \varepsilon_3) +$$

$\beta(\varepsilon_3, 3\varepsilon_1) + \beta(\varepsilon_3, \varepsilon_3) = \underbrace{9\beta(\varepsilon_1, \varepsilon_1)}_{=9 \cdot 0=0} + \underbrace{3\beta(\varepsilon_1, \varepsilon_3)}_{=3 \cdot 1=3} + \underbrace{3\beta(\varepsilon_3, \varepsilon_1)}_{=3 \cdot 1=3} + \underbrace{\beta(\varepsilon_3, \varepsilon_3)}_{=0} = 6 = 1$ - Czyli mamy kolejny wektor nieizotropowy, prostopadły do u_1 ($u_2 = [3, 0, 1]$)

Obliczmy teraz ostatni wektor z bazy wykorzystując dwa poprzednie:

$$[x, y, z] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = [y + z, x + z, x + y] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = y + z + x + z = x + y + 2z = 0$$

$$[x, y, z] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = [y + z, x + z, x + y] \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = x + 4y + 3z = 0$$

Tworzymy układ równań:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x + 4y + 3z = 0 \end{cases}$$

Gdy dodamy równania do siebie uzyskamy $x = 0$

Dalej licząc z jednego z równań: $4y + 3z = 0 \Rightarrow 3z = -y \Rightarrow z = -\frac{1}{3}y$

$x = 0$

$y = y$

$z = -\frac{1}{3}y$

Stąd mamy $\text{lin}([0, 1, 2])$ - Wektor stąd jest ostatnim wektorem z bazy prostopadłej (u_3 - nie musi on być nieizotropowy)

Zatem nasza baza prostopadła to: $\mathcal{B} = ([1, 1, 0], [3, 0, 1], [0, 1, 2])$

1.6.3 Zad.5a / Str.50

Mamy pokazać, że $S \subseteq T \Rightarrow T^\perp \subseteq S^\perp$

Rozpiszmy zatem oba te ortogonalne dopełnienia z definicji:

$$S^\perp = \{u \in V : \alpha(u, v) = 0 \ \forall v \in S\}$$

$$T^\perp = \{u \in V : \alpha(u, v) = 0 \ \forall v \in T\}$$

$$\text{Weźmy } u \in T^\perp \Rightarrow \forall t \in T \ \alpha(u, t) = 0 \xRightarrow{S \subseteq T} \forall t \in S \ \alpha(u, t) = 0 \Rightarrow u \in S^\perp$$

1.6.4 Zad.5b / Str.50

Mamy pokazać, że $(S + T)^\perp = S^\perp \cap T^\perp$

Rozpiszmy: $S + T = \{s + t : s \in S, t \in T\}$

$$(S + T)^\perp = \{u \in V : \alpha(u, s + t) = 0 \ \forall s + t \in S + T\}$$

$$(\subseteq) \quad \text{Weźmy } u \in (S + T)^\perp \Rightarrow \forall s \in S \ \forall t \in T \ \alpha(u, s + t) = 0 \Rightarrow$$

$u \in S^\perp$ gdy $t = 0$

$u \in T^\perp$ gdy $s = 0$

$$(\supseteq) \quad \text{Weźmy } u \in S^\perp \wedge u \in T^\perp \Rightarrow \forall s \in S \ \alpha(u, s) = 0 \wedge \forall t \in T \ \alpha(u, t) = 0$$

$$\forall s \in S \ \forall t \in T \ \alpha(u, s) + \alpha(u, t) = 0$$

$$\forall s \in S \ \forall t \in T \ \alpha(u, s + t) = 0 \text{ (z własności funkcjonału dwuliniowego)}$$

Zatem $u \in (S + T)^\perp$

1.6.5 Zad.5c / Str.50

Mamy pokazać, że jeśli V jest nieosobliwa to $(S \cap T)^\perp = S^\perp + T^\perp$

$$(\supseteq) \quad \text{Weźmy } u + v \in S^\perp + T^\perp \Rightarrow u \in S^\perp \wedge v \in T^\perp \Rightarrow \forall s \in S \ \alpha(u, s) = 0 \wedge \forall t \in T \ \alpha(v, t) = 0$$

Weźmy $w \in S \cap T \Rightarrow w \in S \wedge w \in T$

Zatem $\alpha(u+v, w) = \underbrace{\alpha(u, w)}_{=0} + \underbrace{\alpha(v, w)}_{=0} = 0$

Stąd $u+v \in (S \cap T)^\perp$

($\supseteq$) $S^\perp + T^\perp \subset (S \cap T)^\perp$ (Lepszy sposób)

Z zadanie 5 podpunkt b wiadomo, że $(S^\perp + T^\perp)^\perp = (S^\perp)^\perp \cap (T^\perp)^\perp$

Teraz z nieosobliwości otrzymujemy, że $(S^\perp)^\perp = S$ oraz $(T^\perp)^\perp = T$

Mamy zatem $(S^\perp + T^\perp)^\perp = S \cap T$

Znowu obkładamy obie strony ortogonalnymi dopełnieniami i mamy $((S^\perp + T^\perp)^\perp)^\perp = (S \cap T)^\perp$

Ponownie korzystając z osobliwości przestrzeni mamy $S^\perp + T^\perp = (S \cap T)^\perp$

Czyli udało nam się dowieść nie tylko zawierania w jedną stronę, ale nawet i równości.

1.7 20.04.15

1.7.1 Zad.6a / Str.50

Mamy pokazać, że $\text{rad } S = \text{rad } S^\perp$

($\subseteq$) Ustalmy $s \in \text{rad } S \Rightarrow \forall_{v \in S} \alpha(s, v) = 0$

Wiemy, że jeśli $s \in \text{rad } S$ to naturalnie $s \in S$ (z definicji radykału: $\text{rad } S = \{s \in S : \alpha(s, v) = 0 \ \forall_{v \in S}\}$)

Ale wiemy też, że jeśli $s \in \text{rad } S$ to $s \in S^\perp$ (też z definicji: $S^\perp = \{u \in U : \alpha(u, v) = 0 \ \forall_{v \in S}\}$)

Wtedy z faktu, że $s \in S^\perp$ oraz $\forall_{w \in S^\perp} \alpha(w, s) = 0$ otrzymujemy, że $s \in \text{rad } S^\perp$

($\supseteq$) Weźmy, $S := S^\perp$

Wtedy $\text{rad } S^\perp \subseteq \text{rad}(S^\perp)^\perp = \text{rad } S$ (z nieosobliwości)

1.7.2 Zad.6b / Str.50

Jeśli S jest nieosobliwa mamy, że $\text{rad } S = \theta$. Wiemy też z poprzedniego podpunktu, że $\text{rad } S = \text{rad } S^\perp$
Stąd $\text{rad } S^\perp = \theta$ i zatem $S^\perp$ jest nieosobliwa.

1.7.3 Zad.2 / Str.50

Mamy przestrzeń $V \cong \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ (czyli o takiej macierzy funkcyjonału α w bazie $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$)

Chcemy pokazać, że $\text{rad}_1 V \neq \text{rad}_2 V$

Ustalmy $v \in \text{rad}_1 V \Rightarrow \forall_{w \in V} \alpha(v, w) = 0$

Skorzystamy ze znanego już nam wzoru: $[v_1, v_2] \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = 0$

gdzie v_1, v_2 oraz w_1, w_2 są współrzędnymi wektorów v i w w bazie $\mathcal{B}$

Będziemy chcieli pokazać, że dla pewnych v i w wektor $v \in \text{rad}_1 V$, ale $v \notin \text{rad}_2 V$

Weźmy jako wektor v wektor postaci $u_1 - u_2$

Obliczmy jego współrzędne: $u_1 - u_2 = 1 \cdot u_1 - 1 \cdot u_2$ stąd współrzędne wynoszą $[1, -1]$

Podstawmy je i dla dowolnego w obliczmy $\alpha(u_1 - u_2, w) = [1, -1] \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = [0, 0] \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = 0$

- Zatem $v = u_1 - u_2 \in \text{rad}_1 V$

Druga strona: $\alpha(w, u_1 - u_2) = [w_1, w_2] \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = [w_1 + w_2, 2w_1 + 2w_2] \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = -w_1 - w_2 \neq 0$

Zatem dla dowolnego w nie jest to 0 stąd $v = u_1 - u_2 \notin \text{rad}_2 V$

1.7.4 Zad.3 / Str.50

Mamy (V, α) - przestrzeń symetryczną nad K , $\text{char } K \neq 2$

Chcemy pokazać: V -nieosobliwa $\Leftrightarrow q$ ma własność: jeśli $y \in V$ to $q(x+y) = q(x) + q(y)$ dla każdego $x \in V \Rightarrow y = 0$

($\Rightarrow$) Mamy V - nieosobliwa

Ustalmy $y \in V, x \in V$

$$q(x+y) = \alpha(x, x) + 2\alpha(x, y) + \alpha(y, y) = q(x) + 2\alpha(x, y) + q(y) \stackrel{\text{z własności}}{=} q(x) + 0 + q(y)$$

$$\text{Czyli } 2\alpha(x, y) = 0 \Rightarrow \alpha(x, y) = 0 \quad \forall x \in V \Rightarrow y \in \text{rad } V \stackrel{\text{z nieosobliwości}}{\Rightarrow} y = 0$$

($\Leftarrow$) Ustalmy $y \in \text{rad } V \Rightarrow \forall x \in V \quad \alpha(y, x) = 0$

$$q(x+y) = q(x) + \underbrace{2\alpha(y, x)}_{=0} + q(y) = q(x) + q(y) \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \text{w radykale jest tylko wektor zerowy, zatem}$$

V jest nieosobliwa.

1.7.5 Zad.4 / Str.50

Mamy dane dwie przestrzenie dwuliniowe $(U, \alpha), (V, \beta)$

$\phi : U \rightarrow V$ - bijekcja

$$\text{Zatem } \alpha(x, y) = \beta(\phi(x), \phi(y)) \quad \forall x, y \in U$$

Wiemy, że V ma być nieosobliwa.

Musimy pokazać, że ϕ jest przekształceniem liniowym (wtedy będzie izomorfizmem, bijekcją już jest)

Warunki na przekształcenie:

$$1) \forall x, y \in U \quad \phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y)$$

$$2) \forall a \in K \quad \forall x \in U \quad \phi(ax) = a\phi(x)$$

$$\phi(x+y) - \phi(x) - \phi(y) = 0 \in \text{rad } V \quad (\text{bo nieosobliwa, wtedy będzie spełniony warunek 1})$$

$$\beta(\phi(x+y) - \phi(x) - \phi(y), w) \stackrel{?}{=} 0 \quad \text{Wtedy będzie to w radykale}$$

$$\begin{aligned} \beta(\phi(x+y) - \phi(x) - \phi(y), w) &= \beta(\phi(x+y) - \phi(x) - \phi(y), \phi(u)) = \beta(\phi(x+y), \phi(u)) - \beta(\phi(x), \phi(u)) - \\ &\beta(\phi(y), \phi(u)) = \alpha(x+y, u) - \alpha(x, u) - \alpha(y, u) = \alpha(x+y-x-y, u) = \alpha(0, u) = 0 \end{aligned}$$

Analogicznie pokazać warunek 2.

1.8 27.04.15

1.8.1 Zad.5e / Zestaw 1

Mamy sprawdzić czy przestrzeń (V, β) jest nieosobliwa. Skorzystamy z faktu, że wtedy wyznacznik macierzy funkcjonału na wektorach bazowych ma być różny od 0.

Nasza przestrzeń: $V = \mathbb{R}_2[X]$ (Upraszczamy sytuację, dla $\mathbb{R}_4$ byłoby zbyt dużo obliczeń).

Funkcjonał: $\beta : \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\beta(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

Bazą naszej przestrzeni są wektory $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$, gdyż z nich zbudujemy każdy wielomian należący do $\mathbb{R}_2[X]$

Wyliczmy teraz macierz tego funkcjonału na bazie $\mathcal{B}$:

$$\beta(1, 1) = \int_0^1 1 \cdot 1 dt = x|_0^1 = 1$$

$$\beta(1, x) = \beta(x, 1) = \int_0^1 1 \cdot x dt = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\beta(1, x^2) = \beta(x^2, 1) = \int_0^1 1 \cdot x^2 dt = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\beta(x, x) = \int_0^1 x \cdot x \, dt = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\beta(x, x^2) = \beta(x^2, x) = \int_0^1 x \cdot x^2 \, dt = \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{4}$$

$$\beta(x^2, x^2) = \int_0^1 x^2 \cdot x^2 \, dt = \frac{x^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{1}{5}$$

$$\text{Macierz } A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$\det A = \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{24} - \frac{1}{27} - \frac{1}{16} - \frac{1}{20} \neq 0 \text{ - zatem przestrzeń jest nieosobliwa.}$$

1.8.2 Zad.8a / Zestaw 1

Znajdziemy bazę prostopadłą metodą ortogonalizacji Grama-Schmidta.

$$\text{Mamy macierz } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ w bazie jednostkowej } (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$$

Szukamy bazy prostopadłej (u_1, u_2, u_3) . Kandydatem na u_1 jest jedyny wektor nieizotropowy z bazy jednostkowej czyli ε_1 (jego norma wynosi 1). Zatem $u_1 = \varepsilon_1 - [1, 0, 0]$.

Teraz znajdziemy wektor u_2 i u_3 z następujących wzorów:

$$u_2 = \varepsilon_2 - \frac{\beta(\varepsilon_2, u_1)}{\beta(u_1, u_1)} \cdot u_1 = \varepsilon_2 - \frac{\beta(\varepsilon_2, \varepsilon_1)}{\beta(\varepsilon_1, \varepsilon_1)} \cdot \varepsilon_1 = \varepsilon_2 - \frac{1}{1} \cdot \varepsilon_1 = \varepsilon_2 - \varepsilon_1 = [-1, 1, 0].$$

$$u_3 = \varepsilon_3 - \frac{\beta(\varepsilon_3, u_1)}{\beta(u_1, u_1)} \cdot u_1 - \frac{\beta(\varepsilon_3, u_2)}{\beta(u_2, u_2)} \cdot u_2 = \varepsilon_3 - \frac{\beta(\varepsilon_3, \varepsilon_1)}{\beta(\varepsilon_1, \varepsilon_1)} \cdot \varepsilon_1 - \frac{\beta(\varepsilon_3, [-1, 1, 0])}{\beta([-1, 1, 0], [-1, 1, 0])} \cdot [-1, 1, 0] =$$

$$\varepsilon_3 - \frac{1}{1} \cdot \varepsilon_1 - 0 = \varepsilon_3 - \varepsilon_1 = [-1, 0, 1]$$

Stąd nasza baza prostopadła zawiera wektory $([1, 0, 0], [-1, 1, 0], [-1, 0, 1])$

1.8.3 Zad.10a / Zestaw 1

W przestrzeni euklidesowej $(\mathbb{R}^4, \beta)$ ze zwykłym iloczynem skalarnym chcemy znaleźć bazę prostopadłą hiperpłaszczyzny $\text{Sol}(X - Y + Z - T = 0)$

$$X = Y - Z + T$$

$$Y = Y$$

$$Z = Z$$

$$T = T$$

Mamy zatem podprzestrzeń $\text{lin} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$. (wektory z linu tworzą bazę tej podprzestrzeni)

Przestrzeń jest euklidesowa przez co nie ma w niej wektorów izotropowych. Szukamy bazy prostopadłą (u_1, u_2, u_3)

Zatem za pierwszy wektor z bazy prostopadłej bierzemy wektor z bazy:

$$u_1 = [1, 1, 0, 0]$$

Metodą ortogonalizacji Grama-Schmidta znajdziemy pozostałe wektory z bazy prostopadłej.

$$u_2 = [-1, 0, 1, 0] - \frac{[-1, 0, 1, 0] \circ [1, 1, 0, 0]}{[1, 1, 0, 0] \circ [1, 1, 0, 0]} \cdot [1, 1, 0, 0] = [-1, 0, 1, 0] - \frac{-1}{2} \cdot [1, 1, 0, 0] = [-1, 0, 1, 0] - \left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0 \right] = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0 \right]$$

$$u_3 = [1, 0, 0, 1] - \frac{[1, 0, 0, 1] \circ [1, 1, 0, 0]}{[1, 1, 0, 0] \circ [1, 1, 0, 0]} \cdot [1, 1, 0, 0] - \frac{[1, 0, 0, 1] \circ [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0]}{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0] \circ [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0]} \cdot \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0\right] =$$

$$[1, 0, 0, 1] - \frac{1}{2} \cdot [1, 1, 0, 0] - \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} \cdot \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0\right] = [1, 0, 0, 1] - \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0\right] + \left[-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, 0\right] = \left[\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right]$$

1.8.4 Zad.2 / str.61

Chcemy pokazać, że $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \cong (a, a(ac - b^2)) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a(ac - b^2) \end{bmatrix}$ gdzie $a \in \dot{K}, b, c \in K$.

Skorzystamy z faktu, że dwie przestrzenie mające te same macierze funkcjonału w różnych bazach są izometryczne.

Jak łatwo zauważyć, po prawej mamy macierz diagonalną. Stąd po lewej będziemy musieli znaleźć bazę prostopadłą, na której funkcjonal będzie musiał mieć taką samą macierz jak ta po prawej stronie.

Zatem mamy daną przestrzeń (U, α) oraz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ - macierz funkcjonału α w bazie (u_1, u_2)

Bazę prostopadłą (w_1, w_2) znajdziemy stosując metodę ortogonalnych dopełnień.

$w_1 = u_1$ ($a \in \dot{K}$, zatem patrząc na macierz A mamy $q(u_1) = \alpha(u_1, u_1) = a$, które nie jest zerem czyli u_1 jest nieizotropowe).

$$w_2 = \text{lin}(u_1)^\perp$$

Niech $[x, y]$ będą współrzędnymi wektora w_2 w bazie (u_1, u_2) , współrzędnymi wektora $w_1 = u_1$ są $[1, 0]$ (ponieważ $u_1 = 1 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2$)

Szukamy ortogonalnego dopełnienia czyli korzystamy ze wzoru $[x, y] \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$

$$[ax + by, bx + cy] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$ax + by = 0$$

$$x = \frac{-b}{a}y$$

$$y = y$$

Zatem $[\frac{-b}{a}, 1] = [-b, a] = [x, y]$ (korzystamy z zależności wektorów).

$$\text{Stąd } w_2 = -bu_1 + au_2$$

Obliczymy teraz normy wektorów w_1, w_2

$$q(w_1) = \alpha(w_1, w_1) = \alpha(u_1, u_1) = a$$

$$q(w_2) = \alpha(w_2, w_2) = \alpha(-bu_1 + au_2, -bu_1 + au_2) = \alpha(-bu_1, -bu_1 + au_2) + \alpha(au_2, -bu_1 + au_2) =$$

$$\alpha(-bu_1, -bu_1) + \alpha(-bu_1, au_2) + \alpha(au_2, -bu_1) + \alpha(au_2, au_2) = b^2\alpha(u_1, u_1) - ab\alpha(u_1, u_2) - ab\alpha(u_2, u_1) +$$

$$a^2\alpha(u_2, u_2) = ab^2 - ab^2 - ab^2 + a^2c = a(ac - b^2)$$

Zatem nasza macierz funkcjonału w bazie $[w_1, w_2]$ ma macierz $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a(ac - b^2) \end{bmatrix}$ czyli taką samą jak macierz diagonalna po prawej stronie, stąd obie przestrzenie są izometryczne.

1.9 04.05.15

1.9.1 Zad.1 / Str.61

Mamy pokazać, że $(a_1, a_2, \dots, a_n) \cong (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ gdzie $i1 \dots in$ jest permutacją zbioru $1 \dots n$

Wprowadzimy pewne oznaczenia:

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

$$B = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$$

Mając przestrzeń (U, α) zakładamy, że A jest macierzą funkcjonału α w bazie $(u_1, \dots, u_n)$, a B jest macierzą tego samego funkcjonału w bazie $(u_{i1}, \dots, u_{in})$. Zatem $A \cong B$.

1.9.2 Zad.6a / Str.61

Mamy pokazać, że $(2, 3) \cong (1, 6)$ nad $\mathbb{R}$ i $\mathbb{Z}_p$ dla $p \neq 3$

Nad $\mathbb{R}$ sprawdzamy wymiary, rzędy i sygnaturę dla każdej z przestrzeni.

W obu $\dim = 2$, $r = 2$, $\text{sgn} = 2$, stąd nasze przestrzenie są izometryczne.

Dla $\mathbb{Z}_p$ gdy $p = 2$ mamy $(0, 1) \cong (1, 0)$ co udowadnia nam zad. 1.

Gdy $p \neq 2$ rozpatrujemy dwie sytuacje:

Pierwszą, gdy $6 \in \dot{\mathbb{Z}}_p^2$

Wtedy z faktu, że $(a_1, \dots, a_n) \cong (a_1 x_1^2, \dots, a_n x_n^2)$ mamy $(1, 1) \cong (1, 6) = (1 \cdot 1, 1 \cdot 6)$

Drugim faktem, z którego skorzystamy jest identyczność lub rozłączność warstw.

Jeśli $6 \in \dot{\mathbb{Z}}_p^2$ to wtedy $2\dot{\mathbb{Z}}_p^2 = 3\dot{\mathbb{Z}}_p^2$, ponieważ $2 \cdot 3 = 6$, a $6 \in \dot{\mathbb{Z}}_p^2$

Wtedy możemy zapisać $3 = 2x^2$ i przez to $(2, 3) = (2, 2x^2) \cong (2, 2)$ (kwadraty znikają z faktu pierwszego).

Trzecim istotny fakt związany jest ze zbiorem norm wektorów nieizotropowych. Mianowicie $c \in D(a, b) \Leftrightarrow (a, b) \cong (c, cab)$

Jeśli założymy, że $2 \in D(1, 1)$, wtedy $2 = 1 \cdot 1^2 + 1 \cdot 1^2$ to wtedy z tego faktu otrzymamy, że $(1, 1) \cong (2, 2 \cdot 1 \cdot 1) = (2, 2)$

Zatem z tych trzech faktów mamy $(1, 6) \cong (1, 1) \cong (2, 2) \cong (2, 3)$

Teraz rozpatrzmy drugą sytuację, gdy $6 \notin \dot{\mathbb{Z}}_p^2$

Tutaj skorzystamy z zadania 6c ze strony 29, dzięki któremu będziemy wiedzieli, że $|\dot{\mathbb{Z}}_p / \dot{\mathbb{Z}}_p^2| = 2$

Zatem wyróżnić będziemy mogli dwie warstwy tej grupy ilorazowej: $\dot{\mathbb{Z}}_p / \dot{\mathbb{Z}}_p^2 = \{\dot{\mathbb{Z}}_p^2, 6\dot{\mathbb{Z}}_p^2\}$

W odróżnieniu od poprzedniej sytuacji, teraz z faktu, że $6 \notin \dot{\mathbb{Z}}_p^2$ mamy $2\dot{\mathbb{Z}}_p^2 \neq 3\dot{\mathbb{Z}}_p^2$

Zatem jeśli mamy dwie warstwy to albo:

$$a) \quad 2\dot{\mathbb{Z}}_p^2 = \dot{\mathbb{Z}}_p^2 \quad \quad 3\dot{\mathbb{Z}}_p^2 = 6\dot{\mathbb{Z}}_p^2$$

$$b) \quad 3\dot{\mathbb{Z}}_p^2 = \dot{\mathbb{Z}}_p^2 \quad \quad 2\dot{\mathbb{Z}}_p^2 = 6\dot{\mathbb{Z}}_p^2$$

Dla wersji a mamy:

$(1, 6) \cong (1, 3)$ (bo $6 = 2 \cdot 3$ gdzie 2 znika (równość warstw), stąd $6 = 3$)

$(2, 3) \cong (1, 3)$ (analogicznie $2 = 2 \cdot 1$, po zniknięciu 2 mamy $2 = 1$).

Zatem $(1, 6) \cong (2, 3)$

Dla wersji b mamy podobnie:

$(1, 6) \cong (1, 2)$ (bo $6 = 3 \cdot 2$ gdzie 3 znika (równość warstw), stąd $6 = 2$)

$(2, 3) \cong (2, 1) \cong (1, 2)$ (analogicznie $3 = 3 \cdot 1$, po zniknięciu 3 mamy $3 = 1$), a później korzystamy z zadania 1 o permutacjach.

Zatem $(1, 6) \cong (2, 3)$.

1.9.3 Zad.6b / Str.61

W tym zadaniu w odróżnieniu od podpunktu a mamy pokazać, że $(2, 3) \not\cong (1, 6)$

Dla $\mathbb{Z}_3$:

$(2, 3) \cong (1, 6)$

$(2, 0) \cong (1, 0) \Rightarrow 1 \in D(2, 0) \Rightarrow 1 = 2x^2$ - A to jest sprzeczność w $\mathbb{Z}_3$

Dla $\mathbb{Q}$ dowiedzenie tego faktu jest skomplikowane rachunkowo.

1.9.4 Zad.8a / Str.124

Mamy wykazać, że $U \perp V = V \perp U$

Najpierw jednak krótkie przypomnienie na temat sumy prostej ortogonalnej:

$(U, \alpha), (V, \beta)$ - przestrzenie nad ciałem K

$(U\alpha) \perp (V, \beta) = (U \times V, \gamma)$

$\gamma((u_1, v_1), (u_2, v_2)) = \alpha(u_1, u_2) + \beta(v_1, v_2)$

$\gamma = \alpha \perp \beta$ - oznaczmy tak na potrzeby zadania

$(U, \alpha) \perp (V, \beta) = (U \times V, \alpha \perp \beta)$

W naszym zadaniu aby wykazać izometrię musimy znaleźć izomorfizm $f : U \times V \rightarrow V \times U$ spełniający zależność

$(\alpha \perp \beta)((u_1, v_1)(u_2, v_2)) = (\beta \perp \alpha)(f((u_1, v_1)(u_2, v_2)))$

Naturalnym kandydatem jest funkcja $f(u, v) = (v, u)$ zamieniająca współrzędne. Wtedy:

$(\beta \perp \alpha)(f((u_1, v_1)(u_2, v_2))) = (\beta \perp \alpha)((v_1, u_1)(v_2, u_2)) = \beta(v_1, v_2) + \alpha(u_1, u_2) = \alpha(u_1, u_2) + \beta(v_1, v_2) = (\alpha \perp \beta)((u_1, v_1)(u_2, v_2))$

Odwzorowanie f musi być przekształceniem liniowym, 1 - 1 oraz 'na' (należy to sprawdzić, na zajęciach pominęte).

1.9.5 Zad.8c / Str.124

Mamy wykazać $U \cong S$ i $V \cong T \Rightarrow U \perp V \cong S \perp T$.

Oznaczmy $(U, \alpha) \stackrel{g}{\cong} (S, \gamma)$ oraz $(V, \beta) \stackrel{h}{\cong} (T, \delta)$

Szukamy izomorfizmu $f : U \times V \rightarrow S \times T$ takiego, że

$(\alpha \perp \beta)((u_1, v_1)(u_2, v_2)) = (\gamma \perp \delta)(f((u_1, v_1)(u_2, v_2)))$

Wiemy, że:

$g : U \rightarrow S$ - izomorfizm oraz $\alpha(u_1, u_2) = \gamma(g(u_1), g(u_2))$

$h : V \rightarrow T$ - izomorfizm oraz $\beta(u_1, u_2) = \delta(h(u_1), h(u_2))$

Zdefiniujemy zatem izomorfizm $f((u_1, v_1), (u_2, v_2)) = (g(u_1), h(v_1)), (g(u_2), h(v_2))$ - od razu mamy, że jest to izomorfizm (ponieważ na każdej składowej mamy izomorfizm).

Zatem $(\gamma \perp \delta)(f((u_1, v_1)(u_2, v_2))) = (\gamma \perp \delta)((g(u_1), h(v_1)), (g(u_2), h(v_2))) = \gamma(g(u_1), g(u_2)) + \delta(h(v_1), h(v_2)) = \alpha(u_1, u_2) + \beta(u_1, u_2) = (\alpha \perp \beta)((u_1, v_1)(u_2, v_2))$

Co należało pokazać (mamy izometrię).

1.9.6 Zad.8d / Str.124

Mamy wykazać, że $\dim U \perp V = \dim U + \dim V$

Będziemy szukali bazy iloczynu kartezjańskiego (ponieważ $(U\alpha) \perp (V, \beta) = (U \times V, \gamma)$)

Niech $u_1, \dots, u_n$ - baza U

$v_1, \dots, v_m$ - baza V

Wtedy: $\underbrace{(u_1, 0), \dots, (u_n, 0)}_n, \underbrace{(0, v_1), \dots, (0, v_m)}_m$ - baza $U \times V$

Wymiary bazy U i V wynosiły n i m czyli po jednej stronie mamy $\dim U + \dim V = n + m$

A baza iloczynu kartezjańskiego wynosiła tyle samo: $\dim U \perp V = n + m$

Stąd $\dim U \perp V = \dim U + \dim V$

1.10 11.05.14

1.10.1 Zad.8e / Str 124

Mamy pokazać, że $\det(U \perp V) = \det U \cdot \det V$

Niech

$$(U, \alpha) \cong A$$

$$(V, \beta) \cong B$$

$$\text{Wtedy } (U, \alpha) \perp (V, \beta) \cong A \perp B = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} = \det A \cdot \det B$$

Mamy wtedy dwa przypadki, które należy sprawdzić:

$$1. \det(U \perp V) = 0 = \det(A \perp B) = 0 \Leftrightarrow \det A = 0 \vee \det B = 0 \Leftrightarrow \det U = 0 \vee \det V = 0$$

$$2. \det(U \perp V) \neq 0 \Leftrightarrow \det(A \perp B) \neq 0 \Leftrightarrow \det A \neq 0 \wedge \det B \neq 0$$

$$\text{Wtedy } \det(U \perp V) = \det \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \dot{K}^2 = (\det A \cdot \det B) \dot{K}^2 = \det A \dot{K}^2 \cdot \det B \dot{K}^2 = \det U \cdot \det V$$

1.10.2 Zad.2 / Str.154

Mamy wykazać, że dla dowolnej przestrzeni U nad ciałem K i dla ciała K będącego 1-wymiarową przestrzenią nad K

- $U \otimes 0 = 0$

Sprawdzimy to macierzowo, jeśli weźmiemy iloczyn Kroneckera macierzy przestrzeni U i macierzy 0 to dostaniemy 0

- $U \otimes K$

Niech (U, α) będzie prz. dwuliniową, a $K = \text{lin}(1)$

Wtedy $\alpha(1, 1) = 1$, a macierz funkcjonału α w bazie $\{1\}$ wynosi wtedy $[1]$

$$\text{Zatem } U \otimes K \cong U \otimes [1] \cong U$$

- $K \otimes K \cong K$

W poprzednim podpunkcie podstawiamy $U = K$ i mamy udowodnione.

1.10.3 Zad.6a / Str. 155

Mamy pokazać, że $(A \perp B) \otimes C$

$$\text{Wtedy } \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \otimes C = \begin{bmatrix} A \otimes C & 0 \\ 0 & B \otimes C \end{bmatrix} = (A \otimes C) \perp (B \otimes C)$$

1.10.4 Zad.6b / Str.155

Mamy pokazać, że jeśli $A \otimes B = A \otimes C$ i $A \neq 0$ to $B = C$

Zatem niech $A \otimes B = A \otimes C$

$$\text{Wtedy } A \otimes B = [a_{ij}B] = [a_{ij}C]$$

Jeśli $a_{ij} \neq 0$ to można przez to dzielić

$$a_{ij}[b_{ij}] = a_{ij}[c_{ij}] / : a_{ij}$$

$[b_{ij}] = [c_{ij}]$
 Stąd $B = C$

1.10.5 Zad.3 / Str.155

Mamy pokazać, że jeśli (U, α) i (V, β) są symetryczne to $(U \otimes V, \alpha \otimes \beta)$ jest przestrzenią symetryczną czyli $(\alpha \otimes \beta)(u_1 \otimes v_1, u_2 \otimes v_2) = (\alpha \otimes \beta)(u_2 \otimes v_2, u_1 \otimes v_1)$ to znaczy $\alpha(u_1, u_2) \cdot \beta(v_1, v_2) = \alpha(u_2, u_1) \cdot \beta(v_2, v_1)$

Niech $\sum_{i,j} a_{ij} u_i \otimes v_j, \sum_{k,l} b_{kl} u_k \otimes v_l \in U \otimes V$

Wtedy $\alpha \otimes \beta(\sum_{i,j} a_{ij} u_i \otimes v_j, \sum_{k,l} b_{kl} u_k \otimes v_l) = \sum_{i,j} \sum_{k,l} a_{ij} b_{kl} \alpha \otimes \beta(u_i \otimes v_j, u_k \otimes v_l) = \sum_{k,l} \sum_{i,j} b_{kl} a_{ij} \alpha \otimes \beta(u_k \otimes v_l, u_i \otimes v_j) = \alpha \otimes \beta(\sum_{k,l} b_{kl} u_k \otimes v_l, \sum_{i,j} a_{ij} u_i \otimes v_j)$

Dla przestrzeni alternujących jest błąd w książce.

1.10.6 Zad.4 / Str. 155

Mamy wykazać, że jeśli $\{u_i\}$ jest bazą ortogonalną przestrzeni (U, α) , a $\{v_j\}$ jest bazą ortogonalną przestrzeni (V, β) to $\{u_i \otimes v_j\}$ jest bazą ortogonalną $(U \otimes V, \alpha \otimes \beta)$

Niech $\{u_1, \dots, u_n\}$ - baza ortogonalna U

$\{v_1, \dots, v_m\}$ - baza ortogonalna V

Wtedy $\mathcal{B} = \{u_i \otimes v_j : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ - baza $U \otimes V$

Jeśli $i \neq k$ i $j \neq l$ to

$\alpha \otimes \beta(u_i \otimes v_j, u_k \otimes v_l) = \underbrace{\alpha(u_i, u_k)}_{=0 \text{ z prostopadłości dla } \alpha} \cdot \underbrace{\beta(v_j, v_l)}_{=0 \text{ z prostopadłości dla } \beta} = 0$ poza przekątną czyli $\mathcal{B}$ jest

bazą ortogonalną (ma elementy niezerowe tylko na przekątnej).

1.10.7 Zad.5 / Str.155

Mamy pokazać, że iloczyn tensorowy dwóch przestrzeni euklidesowych jest przestrzenią euklidesową.

Niech $(U, \alpha), (V, \beta)$ będą przestrzeniami euklidesowymi (nad $\mathbb{R}$ i symetryczne)

Wiemy, że posiadają one bazy ortogonalne:

$(U, \alpha) \cong (u_1, \dots, u_n) \quad u_i > 0 \quad \forall i \in 1 \dots n$

$(V, \beta) \cong (v_1, \dots, v_m) \quad v_j > 0 \quad \forall j \in 1 \dots m$

Wtedy $(u_1 v_1, \dots, a_1 v_m, a_2 b_1, \dots, a_2 b_m \dots)$

Te iloczyny (u_i, v_j) na przekątnej zawsze będą większe od 0 zatem mamy bazę ortogonalną.

1.11 18.05.15

1.11.1 Zad.9 / Str.155

Mamy wykazać, że jeśli Z jest całkowicie izotropową podprzestrzenią przestrzeni U to $Z \otimes V$ jest całkowicie izotropową podprzestrzenią przestrzeni $U \otimes V$

Przypomnimy co znaczy, że podprzestrzeń jest całkowicie izotropowa:

$Z < U$ - całkowicie izotropowa tzn. $\forall z_1, z_2 \in Z \quad \alpha(z_1, z_2) = 0$

Mamy przestrzeń $(Z \otimes V, \alpha \otimes \beta)$

Weźmy $z_1 \otimes v_1, z_2 \otimes v_2 \in Z \otimes V$

Wtedy $\alpha \otimes \beta(z_1 \otimes v_1, z_2 \otimes v_2) = \underbrace{\alpha(z_1, z_2)}_{=0} \cdot \beta(v_1, v_2) = 0 \cdot \beta(v_1, v_2)$ - czyli zawsze będzie równe 0 stąd $Z \otimes V$ jest całkowicie izotropowa.

1.11.2 Zad.11 / Str.155

Mamy wykazać, że jeśli $U \cong S$ i $V \cong T$ to $U \otimes V \cong S \otimes T$

Mamy dane przestrzenie dwuliniowe $(U, \alpha), (V, \beta), (S, \gamma), (T, \delta)$

Zatem niech $U \xrightarrow{g} S$ i $V \xrightarrow{h} T$ - czyli mamy tu izometrie (izomorfizmy) g z U do S i h z V do T

Szukamy odwzorowania będącego przekształceniem liniowym i izomorfizmem, oznaczmy go jako

$f : U \otimes V \rightarrow S \otimes T$ takiego, że

$$\alpha \otimes \beta(u_1 \otimes v_1, u_2 \otimes v_2) = \gamma \otimes \delta(f(u_1 \otimes v_1), f(u_2 \otimes v_2))$$

Najprościej było by wziąć odwzorowanie przeprowadzające u na $g(u)$ i v na $h(v)$, ale wtedy nie będzie ono jednoznaczne zatem takie rozwiązanie odpada.

Wiemy, że jednoznaczne wartości uzyskamy biorąc wektory bazowe niech zatem

$(u_1, \dots, u_n)$ - baza U

$(v_1, \dots, v_m)$ - baza V

Wtedy odwzorowanie $f(u_i \otimes v_j) = g(u_i) \otimes h(v_j)$ dla $i = 1 \dots n, j = 1 \dots m$ jest poprawnie określone, a ponadto

$\{u_i \otimes v_j, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ jest bazą $U \otimes V$

Z izometrii między U i S oraz V i T wiemy, że

$(g(u_1), \dots, g(u_n))$ - baza S

$(h(v_1), \dots, h(v_m))$ - baza T stąd

$\{g(u_i) \otimes h(v_j), 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ jest bazą $S \otimes T$

Zatem mamy automatycznie izomorfizm, ponieważ odwzorowanie f przeprowadza bazę na bazę.

Na koniec pozostaje sprawdzić, że $\alpha \otimes \beta(u_i \otimes v_j, u_k \otimes v_l) = \gamma \otimes \delta(f(u_i \otimes v_j), f(u_k \otimes v_l))$

Wyjdziemy z prawej strony i dojdziemy do lewej:

$$\gamma \otimes \delta(f(u_i \otimes v_j), f(u_k \otimes v_l)) = \gamma \otimes \delta(g(u_i) \otimes h(v_j), g(u_k) \otimes h(v_l)) =$$

$$\gamma(g(u_i), g(u_k)) \cdot \delta(h(v_j), h(v_l)) = \alpha(u_i, u_k) \cdot \beta(v_j, v_l) = \alpha \otimes \beta(u_i \otimes v_j, u_k \otimes v_l)$$

1.11.3 Zad.4a / Str.71

Mamy pokazać, że $(a_1, \dots, a_n) \cong (b_1, \dots, b_n) \Leftrightarrow (aa_1, \dots, aa_n) \cong (ab_1, \dots, ab_n)$ dla $a, a_k, b_k \in \dot{K}$

$\Rightarrow$

$(aa_1, \dots, aa_n)$ możemy przedstawić jako $(a) \otimes (a_1, \dots, a_n)$, a $(ab_1, \dots, ab_n)$ możemy przedstawić jako $(a) \otimes (b_1, \dots, b_n)$

Utożsamimy te macierze z przestrzeniami z poprzedniego zadania.

Niech $(U, \alpha) \cong (a)$ oraz $(S, \gamma) \cong (a)$ (przestrzenie mają te same macierze), wtedy $(U, \alpha) \cong (S, \gamma)$

Jeśli $V = (a_1, \dots, a_n)$ oraz $T = (b_1, \dots, b_n)$ to wiedząc, że $(a_1, \dots, a_n) \cong (b_1, \dots, b_n)$ otrzymujemy $(V, \beta) \cong (T, \delta)$

Teraz wystarczy podstawić do poprzedniego zadania i otrzymujemy izometrię $(aa_1, \dots, aa_n) \cong (ab_1, \dots, ab_n)$

$\Leftarrow$

Wiemy, że $(aa_1, \dots, aa_n) \cong (ab_1, \dots, ab_n)$

Sposób będzie analogiczny jak poprzednio tylko, że

$(U, \alpha) \cong (a^{-1})$ oraz $(S, \gamma) \cong (a^{-1})$ (przestrzenie mają te same macierze), wtedy $(U, \alpha) \cong (S, \gamma)$

Jeśli $V = (aa_1, \dots, aa_n)$ oraz $T = (ab_1, \dots, ab_n)$ to wiedząc, że $(aa_1, \dots, aa_n) \cong (ab_1, \dots, ab_n)$ otrzymujemy $(V, \beta) \cong (T, \delta)$

I ponownie korzystamy z zadania powyższego.

1.11.4 Zad.4c / Str.71

Mamy pokazać, że jeśli $(a_1, a_2, a_3) \cong (b_1, b_2, b_3)$ to $(a_1a_2, a_1a_3, a_2a_3) \cong (b_1b_2, b_1b_3, b_2b_3)$

Korzystając ze wskazówki wiemy, że $a_1a_2a_3\dot{K}^2 = b_1b_2b_3\dot{K}^2$ (wyznaczniki) co powoduje, że $(a_1a_2a_3) \cong (b_1b_2b_3)$

Ponownie musimy skorzystać z zadania 11 ze strony 155, w którym wykazaliśmy że jeśli $U \cong S$ i $V \cong T$ to $U \otimes V \cong S \otimes T$, u nas

$$U = (a_1, a_2, a_3)$$

$$S = (b_1, b_2, b_3)$$

$$V = (a_1a_2a_3)$$

$$T = (b_1b_2b_3)$$

Wtedy $U \otimes V \cong S \otimes T$ czyli w naszym przypadku:

$$(a_1, a_2, a_3) \otimes (a_1a_2a_3) \cong (b_1, b_2, b_3) \otimes (b_1b_2b_3)$$

Licząc iloczyn Kroneckera otrzymujemy

$$(a_1^2a_2a_3, a_1a_2^2a_3, a_1a_2a_3^2) \cong (b_1^2b_2b_3, b_1b_2^2b_3, b_1b_2b_3^2)$$

Możemy pominąć kwadraty (grupa klas kwadratów)

$$(a_2a_3, a_1a_3, a_1a_2) \cong (b_2b_3, b_1b_3, b_1b_2)$$

Elementy na przekątnej można permutować (np. jako wartości funkcjonału na bazie, którą można permutować)

Zatem otrzymujemy $(a_1a_2, a_1a_3, a_2a_3) \cong (b_1b_2, b_1b_3, b_2b_3)$

1.11.5 Zad.4b / Str.71

Mamy wykazać, że jeśli $(a_1, \dots, a_n) \cong (b_1, \dots, b_n)$ oraz $(c_1, \dots, c_m) \cong (d_1, \dots, d_m)$ to $(a_1, \dots, a_n, c_1, \dots, c_m) \cong (b_1, \dots, b_n, d_1, \dots, d_m)$

Skorzystamy z zadania 8 ze strony 124, gdzie pokazaliśmy, że jeśli $U \cong S$ i $V \cong T$ to $U \perp V \cong S \perp T$

Zatem niech:

$$U = (a_1, \dots, a_n)$$

$$S = (b_1, \dots, b_n)$$

$$V = (c_1, \dots, c_m)$$

$$T = (d_1, \dots, d_m)$$

Wtedy $(a_1, \dots, a_n) \perp (c_1, \dots, c_m) \cong (b_1, \dots, b_n) \perp (d_1, \dots, d_m)$

Macierzy obu sum też są kongruentne zatem $(a_1, \dots, a_n, c_1, \dots, c_m) \cong (b_1, \dots, b_n, d_1, \dots, d_m)$ co mieliśmy pokazać.

1.11.6 Zad.6a / Str.72

Mamy pokazać, że przestrzenie $U = (1, 1, 1, -1)$ i $V = (1, -1, -1, -1)$ nad $\mathbb{R}$ mają identyczne wymiary, wyznaczniki i zbiory norm wektorów nieizotropowych.

Wymiary: patrzymy na macierze i od razu widzimy, że obie przestrzenie mają wymiar równy 4

Wyznaczniki: w obu przypadkach $\det U = \det V = -1\mathbb{R}^2$

Zbiory norm wektorów nieizotropowych: $D(1, 1, 1, -1) = \underbrace{\{x^2 + y^2 + z^2 - t^2 : x, y, z, t \in \mathbb{R}\} \setminus \{0\}}_{=\mathbb{R}}$

Analogicznie $D(1, -1, -1, -1) = \mathbb{R}$

1.11.7 Zad.6b / Str.72

Korzystając z twierdzenia Witta o skracaniu mamy wykazać, że $(1, 1, 1, -1) \not\cong (1, -1, -1, -1)$

Załóżmy, że są izometryczne, wtedy:

$$(1, 1, 1, -1) \cong (1, -1, -1, -1)$$

Korzystając z twierdzenia Witta o skracaniu uzyskujemy

$$(1, 1) \cong (-1, -1)$$

Wiemy, że jednym z niezmienników izometrii jest zbiór norm wektorów nieizotropowych zatem:

$$D(1, 1) = D(-1, -1)$$

Wtedy $-1 = x^2 + y^2$ co jest niemożliwe nad $\mathbb{R}$

Obie przestrzenie nie są więc izometryczne.

Rozdział 2

Zadanie dodatkowe (nie z ćwiczeń)

2.1 30.03.15

2.1.1 Zad.7b / Str. 38

Komentarz: Na ćwiczeniach podano wyłącznie, że to zadanie trzeba zrobić metoda ręczną.

Zatem mamy $K = \mathbb{Z}_7$. Chcemy pokazać, że $D(a, b) = \dot{K}$ dla każdych $a, b \in \dot{K}$

Z zadania 6 z tej samej strony wiemy, że $1 \in D(a, b) \quad \forall_{a, b \in K} \Rightarrow D(a, b) = \dot{K} \quad \forall_{a, b \in K}$

Korzystając z tego musimy pokazać, że $1 = ax^2 + by^2 \quad \forall_{a, b \in \dot{K}}$

a i b może być równe 1, 2, 3, 4, 5, 6. Trzeba sprawdzić wszystkie możliwości z takimi wartościami (części nie trzeba będzie liczyć bo będzie symetryczna np. 1 i 3 oraz 3 i 1):

- Dla $a = 1$ i $b = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ - bierzemy $x = 1$ i $y = 0$ i mamy: $1 = 1 \cdot 1^2 + b \cdot 0^2 = 1$
- Dla $a = 2$ i $b = 2, 3, 4, 5, 6$ - bierzemy $x = 2$ i $y = 0$ i mamy: $1 = 2 \cdot 2^2 + b \cdot 0^2 \Rightarrow 1 = 8 \xrightarrow{\mathbb{Z}_7} 1 = 1$
- Dla $a = 3$ i $b = 3$ - bierzemy $x = 2$ i $y = 1$ i mamy: $1 = 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 1^2 \Rightarrow 1 = 12 + 3 \Rightarrow 1 = 15 \xrightarrow{\mathbb{Z}_7} 1 = 1$
- Dla $a = 3$ i $b = 4$ - bierzemy $x = 0$ i $y = 3$ i mamy: $1 = 3 \cdot 0^2 + 4 \cdot 3^2 \Rightarrow 1 = 0 + 36 \Rightarrow 1 = 36 \xrightarrow{\mathbb{Z}_7} 1 = 1$
- Dla $a = 3$ i $b = 5$ - bierzemy $x = 1$ i $y = 1$ i mamy: $1 = 3 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1^1 \Rightarrow 1 = 3 + 5 \Rightarrow 1 = 8 \xrightarrow{\mathbb{Z}_7} 1 = 1$
- Dla $a = 3$ i $b = 6$ - bierzemy $x = 1$ i $y = 3$ i mamy $1 = 3 \cdot 1^2 + 6 \cdot 3^2 \Rightarrow 1 = 3 + 54 \Rightarrow 1 = 57 \xrightarrow{\mathbb{Z}_7} 1 = 1$
- Dla $a = 4$ i $b = 4, 5, 6$ - bierzemy $x = 3$ i $y = 0$ i mamy $1 = 4 \cdot 3^2 + b \cdot 0^2 \Rightarrow 1 = 36 + 0 \Rightarrow 1 = 36 \xrightarrow{\mathbb{Z}_7} 1 = 1$
- Dla $a = 5$ i $b = 5$ - bierzemy $x = 3$ i $y = 1$ i mamy $1 = 5 \cdot 3^2 + 5 \cdot 1^2 \Rightarrow 1 = 45 + 5 \Rightarrow 1 = 50 \xrightarrow{\mathbb{Z}_7} 1 = 1$
- Dla $a = 5$ i $b = 6$ - bierzemy $x = 1$ i $y = 2$ i mamy $1 = 5 \cdot 1^2 + 6 \cdot 2^2 \Rightarrow 1 = 5 + 24 \Rightarrow 1 = 29 \xrightarrow{\mathbb{Z}_7} 1 = 1$
- Dla $a = 6$ i $b = 6$ - bierzemy $x = 2$ i $y = 3$ i mamy $1 = 6 \cdot 2^2 + 6 \cdot 3^2 \Rightarrow 1 = 24 + 54 \Rightarrow 1 = 78 \xrightarrow{\mathbb{Z}_7} 1 = 1$

Reszta możliwości jest symetryczna.