Analiza

Przepisał: Ricko

Rok 2016/2017 - Wersja 1.02 - 07.02.2017

Spis treści

Rozdział 1

Ogólna teoria różniczkowania

1.1 Pochodna

Ustalmy przestrzenie unormowane X, Y nad tym samym ciałem $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ i zbiór otwarty $U \subset X$

Definicja 1.1.1. *Funkcję $f\colon U \to Y$ nazywamy **różniczkowalną w punkcie** $x_0 \in U$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie ciągłe odwzorowanie liniowe $\Lambda\colon X \to Y$, że*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - \Lambda h}{||h||} = 0 \tag{1.1}$$

Uwaga 1.1.1. *Jeżeli funkcja $f\colon U \to Y$ jest różniczkowalna w punkcie $x_0 \in U$ to istnieje dokładnie jeden ciągły operator liniowy $\Lambda\colon X \to Y$ spełniający warunek 1.1.*

Dowód.

1. Niech $\Lambda_1, \Lambda_2\colon X \to Y$ będą ciągłymi odwzorowaniami liniowymi i
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - \Lambda_k h}{||h||} = 0 \quad \text{dla } k \in \{1, 2\}$$
2. $\dfrac{\Lambda_1 h - \Lambda_2 h}{||h||} = \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0) - \Lambda_2 h}{||h||} - \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0) - \Lambda_1 h}{||h||} \xrightarrow{h\to 0} 0$
3. $\varepsilon > 0$
4. $\delta > 0 \qquad \underset{h\in X}{\forall} \left(0 < ||h|| \leqslant \delta \Rightarrow \left|\left|\dfrac{\Lambda_1 h - \Lambda_2 h}{||h||}\right|\right| \leqslant \varepsilon\right)$
5. $0 < \left|\left|\delta \dfrac{h}{||h||}\right|\right| = \delta$
$$\frac{\left|\left|\Lambda_1\left(\delta\frac{h}{||h||}\right) - \Lambda_2\left(\delta\frac{h}{||h||}\right)\right|\right|}{\delta} \leqslant \varepsilon$$
$$\frac{\delta}{||h||}\frac{||\Lambda_1 h - \Lambda_2 h||}{\delta} \leqslant \varepsilon$$
$$||\Lambda_1 h - \Lambda_2 h|| \leqslant \varepsilon ||h|| \qquad \text{dla } h \in X \setminus \{0\}$$

6. $||\Lambda_1 - \Lambda_2|| \leqslant \varepsilon \, (\forall_{\varepsilon > 0}) \Longrightarrow \Lambda_1 = \Lambda_2$

$\square$

Definicja 1.1.2. *Jeżeli funkcja $f \colon U \to Y$ jest różniczkowalna w punkcie x_0 to jedyny ciągły operator liniowy $\Lambda \colon X \to Y$ spełniający warunek (1.1) nazywamy* ***pochodną*** *funkcji f w punkcie x_0 i oznaczamy symbolem $f'(x_0)$.*

Definicja 1.1.3. *Funkcję $f \colon U \to Y$ nazywamy* ***różniczkowalną*** *wtedy i tylko wtedy, gdy jest ona różniczkowalna w każdym punkcie zbioru U.*

Przykład 1.1.1. *Każde ciągłe odwzorowanie liniowe $\Lambda \colon X \to Y$ jest funkcją różniczkowalną oraz $\Lambda'(x) = \Lambda$ dla każdego $x \in X$*

Dowód.
Jeżeli $x \in X$, a $h \in X \setminus \{0\}$ to

$$\frac{\Lambda(x+h) - \Lambda(x) - \Lambda h}{||h||} = \frac{\Lambda x + \Lambda h - \Lambda x - \Lambda h}{||h||} \xrightarrow{h \to 0} 0$$

$\square$

Przykład 1.1.2. *Jeżeli X_1, X_2, Y są przestrzeniami unormowanymi to każde ciągłe odwzorowanie dwuliniowe $\Lambda \colon X_1 \times X_2 \to Y$ jest funkcją różniczkowalną oraz*

$$\Lambda'(x_1, x_2)(h_1, h_2) = \Lambda(x_1, h_2) + \Lambda(h_1, x_2) \quad \textit{dla } (x_1, x_2), (h_1, h_2) \in X_1 \times X_2$$

Dowód.

1. $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$
2. $A \colon X_1 \times X_2 \to Y$
   $A(h_1, h_2) = \Lambda(x_1, h_2) + \Lambda(h_1, x_2)$
3. A jest funkcją ciągłą
   $(h_1, h_2) \in X_1 \times X_2$
   $(h_{1,n}, h_{2,n}) \in X_1 \times X_2$ - ciąg punktów zbieżny do punktu (h_1, h_2) (zbieżność po współrzędnych $h_{1,n} \to h_1, h_{2,n} \to h_2$)
   $A(h_{1,n}, h_{2,n}) = \Lambda(x_1, h_{2,n}) + \Lambda(h_{1,n}, x_2) \to \Lambda(x_1, h_2) + \Lambda(h_1, x_2) = A(h_1, h_2)$
4. Jeżeli $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in X_1 \times X_2, \ \alpha \in K$ to

$$\begin{aligned} A(\alpha(a_1, a_2) + (b_1, b_2)) =& A(\alpha a_1 + b_1, \alpha a_2 + b_2) = \\ & \Lambda(x_1, \alpha a_2 + b_2) + \Lambda(\alpha a_1 + b_1, x_2) = \\ & \alpha\Lambda(x_1, a_2) + \Lambda(x_1, b_2) + \alpha\Lambda(a_1, x_2) + \Lambda(b_1, x_2) = \\ & \alpha(\Lambda(x_1, a_2) + \Lambda(a_1, x_2)) + (\Lambda(x_1, b_2) + \Lambda(b_1, x_2)) = \\ & \alpha A(a_1, a_2) + A(b_1, b_2) \end{aligned}$$

5. $\dfrac{\Lambda((x_1,x_2)+(h_1,h_2))-\Lambda(x_1,x_2)-A(h_1,h_2)}{||(h_1,h_2)||}=$
$\dfrac{\Lambda((x_1+h_1,x_2+h_2))-\Lambda(x_1,x_2)-A(h_1,h_2)}{||(h_1,h_2)||}=$
$\dfrac{\Lambda(x_1,x_2)+\Lambda(x_1,h_2)+\Lambda(h_1,x_2)+\Lambda(h_1,h_2)-\Lambda(x_1,x_2)-\Lambda(x_1,h_2)-\Lambda(h_1,x_2)}{||(h_1,h_2)||}=$
$\dfrac{\Lambda(h_1,h_2)}{||(h_1,h_2)||}$ dla $(h_1,h_2)\in X_1\times X_2\setminus\{(0,0)\}$

6. Jeżeli $(h_1,h_2)\in X_1\times X_2\setminus\{(0,0)\}$

$$\left|\left|\frac{\Lambda(h_1,h_2)}{||(h_1,h_2)||}\right|\right| = \frac{1}{||(h_1,h_2)||}||\Lambda(h_1,h_2)|| \underbrace{\leqslant}_{\text{z } K20} \frac{||\Lambda||\cdot||h_1||\cdot||h_2||}{\sqrt{||h_1||^2+||h_2||^2}} \leqslant \frac{||\Lambda||}{2}\sqrt{||h_1||^2+||h_2||^2} =$$
$$= \frac{||\Lambda||}{2}||(h_1,h_2)|| \xrightarrow{(h_1,h_2)\to 0} 0$$

$$\Lambda'(x_1,x_2)(h_1,h_2) = \Lambda(x_1,h_2)+\Lambda(h_1,x_2)$$

□

Twierdzenie 1.1.1. *Każda funkcja różniczkowalna w punkcie jest w tym punkcie ciągła.*

Dowód.

1. $f\colon U\to Y$ - funkcja różniczkowalna w $x_0\in U$
2. $u\colon U\to Y$ dana wzorem
$$u(x)=\begin{cases}\frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{||(x-x_0)||} & x\neq x_0\\ 0 & x=x_0\end{cases} \tag{1.2}$$
3. Funkcja u jest ciągła w punkcie x_0
4. Jeśli $x\in U$
$f(x)=\underbrace{f(x_0)}_{\text{stała}}+\underbrace{f'(x_0)(x-x_0)}_{\text{odzw.lin.cg.}}+\underbrace{||x-x_0||}_{\text{ciągła}}\cdot\underbrace{u(x)}_{\text{ciągła}}$
5. Funkcja f jest ciągła w punkcie $x\in U$

□

Twierdzenie 1.1.2. *Jeżeli funkcje $f,g\colon U\to Y$ są różniczkowalne w punkcie $x_0\in U$ oraz $\alpha,\beta\in K$ to funkcja $\alpha f+\beta g$ jest różniczkowalna w punkcie x_0 oraz*

$$(\alpha f+\beta g)'(x_0)=\alpha f'(x_0)+\beta g'(x_0)$$

Twierdzenie 1.1.3. *Załóżmy, że X,Y,Z są przestrzeniami unormowanymi, a $U\subset X$ oraz $W\subset Y$ są zbiorami otwartymi. Jeżeli funkcja $f\colon U\to Y$ jest różniczkowalna w punkcie $x_0\in U$ oraz $f(U)\subset W$, a funkcja $g\colon W\to Z$ jest różniczkowalna w punkcie $f(x_0)$ to funkcja $g\circ f$ jest różniczkowalna w punkcie x_0 oraz*

$$(g\circ f)'(x_0)=g'(f(x_0))\circ f'(x_0)$$

.

Dowód.

1. $y_0 = f(x_0)$
2. Określmy funkcję $u\colon U \to Y$ wzorem (1.2) oraz funkcję $w\colon W \to Z$ wzorem
$$w(y) = \begin{cases} \frac{g(y)-g(y_0)-g'(y_0)(y-y_0)}{||(y-y_0)||} & y \neq y_0 \\ 0 & y = y_0 \end{cases}$$
3. Funkcja u jest ciągła w punkcie x_0, a funkcja w jest ciągła w punkcie y_0
4. $g'(y_0) \circ f'(x_0)\colon X \to Z$ jest ciągłym operatorem liniowym.
5. $g(f(x)) - g(f(x_0)) - g'(f(x_0)) \circ f'(x_0)(x - x_0) =$
$= g'(y_0)(f(x) - f(x_0)) + ||f(x) - f(x_0)||w(f(x)) - g'(y_0) \circ f'(x_0)(x - x_0) =$
$= g'(y_0)(f'(x_0)(x - x_0) + ||x - x_0||u(x)) + ||f(x) - f(x_0)||w(f(x)) - g'(y_0) \circ f'(x_0)(x - x_0) =$
$= g'(y_0)f'(x_0)(x - x_0) + ||x - x_0||g'(y_0)u(x) + ||f(x) - f(x_0)||w(f(x)) - g'(y_0) \circ f'(x_0)(x - x_0) =$
$= ||x - x_0||g'(y_0)u(x) + ||f(x) - f(x_0)||w(f(x))$ dla $x \in U$
6. Jeżeli $x \in U \setminus \{x_0\}$
$$\left\|\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))) - g'(f(x_0)) \circ f'(x_0)(x - x_0)}{||x - x_0||}\right\| =$$
$$= \left\|g'(y_0)u(x) + \frac{\left\|f'(x_0)(x - x_0) + ||x - x_0||u(x)\right\|w(f(x))}{||x - x_0||}\right\| \leqslant$$
$$\leqslant ||g'(y_0)u(x)|| + \frac{(||f'(x_0)|| \cdot ||x - x_0|| + ||x - x_0|| \cdot ||u(x)||) \cdot ||w(f(x))||}{||x - x_0||} =$$
$$\underbrace{||g'(y_0)u(x)||}_{\xrightarrow{x\to x_0} 0} + (\underbrace{||f'(x_0)||}_{\text{stała}} + \underbrace{||u(x)||}_{\text{stała}})\underbrace{||w(f(x))||}_{\xrightarrow{x\to x_0} 0} \xrightarrow{x\to x_0} 0$$

□

Oznaczenie 1.1.1.

$Isom(X, Y) = \{\Lambda\colon X \to Y : \Lambda$ *- odwzorowanie ciągłe, liniowe, 1-1* $, \Lambda(X) = Y,\ \Lambda^{-1}$ *- odwzorowanie ciągłe*$\}$

Twierdzenie 1.1.4. *Załóżmy, że funkcja $f\colon U \to Y$ jest różnowartościowa i różniczkowalna w punkcie $x_0 \in U$. Jeżeli $f(U)$ jest podzbiorem otwartym przestrzeni Y, $f'(x_0) \in Isom(X, Y)$, f jest ciągła w x_0 to funkcja f^{-1} jest różniczkowalna w punkcie $f(x_0)$ oraz*
$$\left(f^{-1}\right)'(f(x_0)) = f'(x_0)^{-1}$$

Twierdzenie 1.1.5. *Załóżmy, że $X, Y_1, \ldots, Y_N$ są przestrzeniami unormowanymi, a $U \subset X$ jest zbiorem otwartym.*

i) Jeżeli $f_1\colon U \to Y_1, \dots, f_N\colon U \to Y_N$ *to funkcja* $(f_1, \dots, f_N)$ *jest różniczkowalna w punkcie* $x_0 \in U$ *wtedy i tylko wtedy, gdy każda z funkcji* $f_1, \dots, f_N$ *jest w tym punkcie różniczkowalna.*

ii) Jeżeli $(f_1, \dots, f_N)$ *jest różniczkowalna w punkcie* $x_0 \in U$ *to* $(f_1, \dots, f_N)'(x_0)h = (f_1'(x_0)h, \dots, f_N'(x_0)h)$ *dla* $h \in X$.

Dowód.

I) 1. $f = (f_1, \dots, f_N)$

2. Dla $k \in \{1, \dots, N\}$ niech $\pi_k\colon \bigtimes_{j=1}^{N} Y_j \to Y_k$ oznacza rzutowanie. $\pi_k(y_1, \dots, y_N) = y_k$ dla $(y_1, \dots, y_N) \in \bigtimes_{j=1}^{N} Y_j$

3. $f_k = \pi_k \circ f$ dla $k \in \{1, \dots, N\}$

4. Jeżeli f jest różniczkowalna w punkcie $x_0 \in U$ to dla każdego $k \in \{1, \dots, N\}$ funkcja f_k jest różniczkowalna w punkcie x_0 oraz

$$f_k'(x_0) = \pi_k \circ f'(x_0)$$

a zatem

$$(f_1, \dots, f_N)'(x_0)h = (f_1'(x_0)h, \dots, f_N'(x_0)h) \text{ dla } h \in X$$

II) 1. Załóżmy, że $f_1, \dots, f_N$ są różniczkowalne w punkcie $x_0 \in U$

2. $\Lambda\colon X \to \bigtimes_{j=1}^{N} Y_j$

$$\Lambda(h) = (f_1'(x_0)h, \dots, f_N'(x_0)h)$$

3. Λ jest liniowe i ciągłe (odwzorowanie w produkcie jest ciągłe)

4. $$\frac{f(x_0+h) - f(x_0) - \Lambda h}{||h||} = \frac{f_1(x_0+h) - f_1(x_0) - f_1'(x_0)h, \dots, f_N(x_0+h) - f_N(x_0) - f_N'(x_0)h}{||h||} =$$

$$= \frac{f_1(x_0+h) - f_1(x_0) - f_1'(x_0)h}{||h||}, \dots, \frac{f_N(x_0+h) - f_N(x_0) - f_N'(x_0)h}{||h||} \longrightarrow (0, 0, \dots)$$

□

Wniosek 1.1.1. *Załóżmy, że* X, Y_1, Y_2, Z *są przestrzeniami unormowanymi, a* $U \subset X$ *jest zbiorem otwartym. Jeżeli funkcje* $f_1\colon U \to Y_1,\ f_2\colon U \to Y_2$ *są różniczkowalne w punkcie* $x_0 \in U$*, a* $\Lambda\colon Y_1 \times Y_2 \to Z$ *jest ciągłym odwzorowaniem dwuliniowym to funkcja* $\Lambda \circ (f_1, f_2)$ *jest różniczkowalna w punkcie* $x_0 \in U$ *oraz*

$$(\Lambda \circ (f_1, f_2))'(x_0) = \Lambda(\bullet, f_2(x_0)) \circ f_1'(x_0) + \Lambda(f_1(x_0), \bullet) \circ f_2'(x_0)$$

Równoważna równość

$$(\Lambda \circ (f_1, f_2))'(x_0) = \Lambda(f_1'(x_0)h, f_2(x_0)) + \Lambda(f_1(x_0), f_2'(x_0)h)$$

Dowód.
Według przykładu 2 oraz twierdzenia 5 i 3 funkcja $\Lambda \circ (f_1, f_2)$ jest różniczkowalna w punkcie x_0 i dla każdego $h \in X$ mamy
$(\Lambda \circ (f_1, f_2))'(x_0)h = \Lambda'(f_1(x_0), f_2(x_0)) \underbrace{(f_1, f_2)'h}_{(f_1'(x_0)h, f_2'(x_0)h)} = \Lambda(f_1(x_0), f_2'(x_0)h) + \Lambda(f_1'(x_0)h, f_2(x_0))$ □

Wniosek 1.1.2. *Jeżeli funkcje $f\colon U \to Y$ oraz $\varphi\colon U \to K$ są różniczkowalne w punkcie $x_0 \in U$ to ich iloczyn φf jest funkcją różniczkowalną w punkcie x_0 oraz*

$$(\varphi \cdot f)'(x_0) = (\varphi'(x_0)h) \cdot f(x_0) + \varphi(x_0)f'(x_0)h \text{ dla } h \in X$$

Dowód.

1. Określmy $\Lambda\colon K \times Y \to Y$ wzorem $\Lambda(\alpha, y) = \alpha y$
2. Λ jest ciągła i dwuliniowa oraz $\varphi \cdot f = \Lambda(\varphi, f)$
3. Na mocy wniosku 1 funkcja $\varphi \cdot f$ jest różniczkowalna w x_0

   $$(\varphi \cdot f)'(x_0)h = \Lambda(\varphi'(x_0)h, f(x_0)) + \Lambda(\varphi(x_0), f'(x_0)h) = (\varphi'(x_0)h)f(x_0) + \varphi(x_0)f'(x_0)h \text{ dla } h \in X.$$

□

1.2 Interpretacja geometryczna

Definicja 1.2.1. *Załóżmy, że X jest przestrzenią unormowaną, a $A \subset X$. Jeżeli $x_0 \in clA$ to punkt $x \in X$ nazywamy **wektorem stycznym** do zbioru A w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 0$ lub $x \neq 0$ i istnieje taki ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktów należących do zbioru $A \setminus \{x_0\}$ i zbieżnych do x_0, że*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - x_0}{||a_n - x_0||} = \frac{x}{||x||}$$

Jeżeli zbiór T określony wzorem

$$T = \{x \in X\colon x \text{ jest wektorem stycznym do zbioru } A \text{ w punkcie } x_0\}$$

jest podprzestrzenią liniową przestrzeni X to zbiór

$$T + x_0 = \{x + x_0\colon x \in T\}$$

nazywamy płaszczyzną styczną do zbioru A w punkcie x_0.

Twierdzenie 1.2.1. *Jeżeli funkcja $f\colon U \to Y$ jest różniczkowalna w punkcie $x_0 \in U$, to*

i) punkt $(x, y) \in X \times Y$ jest wektorem stycznym do wykresu f wtedy i tylko wtedy, gdy $y = f'(x_0)x$

ii) $\{(x, y) \in X \times Y\colon y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\}$ jest płaszczyzną styczną do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$.

Dowód.

I) ($\Longrightarrow$)

1. Z założenia wektor $(x, y) \in X \times Y$ jest styczny do wykresu funkcji f.

   1° $(x, y) = (0, 0)$
   $y = 0 = f'(x_0)0 = f'(x_0)x$

   2° $(x, y) \neq (0, 0)$

2. Istnieje taki ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktów zbioru U, że $(x_n, f(x_n)) \neq (x_0, f(x_0))$ dla $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ oraz
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(x_n, f(x_n)) - (x_0, f(x_0))}{||(x_n, f(x_n)) - (x_0, f(x_0))||} = \frac{(x, y)}{||(x, y)||}$$

3. W produkcie ma miejsce zbieżność po współrzędnych zatem
$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_0}{||(x_n - x_0, f(x_n) - f(x_0)||} = \frac{x}{||(x, y)||}$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{||(x_n - x_0, f(x_n) - f(x_0)||} = \frac{y}{||(x, y)||}$$

4. Określmy funkcję $u\colon U \to Y$ daną wzorem (1.2).

5. Jeżeli $x \in U$ to
$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + ||x - x_0||u(x)$$

6. Jeżeli $n \in \mathbb{N}$ to
$$\frac{y}{||(x, y)||} \longleftarrow \frac{f(x_n) - f(x_0)}{||(x_n - x_0, f(x_n) - f(x_0)||} = \frac{f'(x_0)(x_n - x_0) + ||x_n - x_0||u(x_n)}{||(x_n - x_0, f(x_n) - f(x_0)||} =$$
$$= f'(x_0)\underbrace{\frac{x_n - x_0}{||(x_n - x_0, f(x_n) - f(x_0)||}}_{\xrightarrow{n\to\infty} \frac{x}{||(x,y)||}} + \underbrace{\frac{||x_n - x_0||}{||(x_n - x_0, f(x_n) - f(x_0)||}}_{\xrightarrow{n\to\infty} \left|\left|\frac{x}{||(x,y)||}\right|\right|} \underbrace{u(x_n)}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0} \longrightarrow f'(x_0)\frac{x}{||(x, y)||}$$

7. Mamy zatem $\dfrac{y}{||(x, y)||} = f'(x_0)\dfrac{x}{||(x, y)||}$

8. $y = f'(x_0)x$

II) ($\Longleftarrow$)

1. Z założenia $y = f'(x_0)x$ dla $x \in X$

   1° $x = 0,\ y = 0 \Rightarrow (x, y) = (0, 0)$ zatem (x, y) jest wektorem stycznym (do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$)

   2° $x \neq 0$

2. $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - zbieżny do 0 ciąg dodatnich liczb rzeczywistych
   $x_0 + \alpha_n x \in U$ dla $n \in \mathbb{N}$ (możemy taki wybrać na mocy otwartości zbioru U)

3. $((x_0 + \alpha_n x, f(x_0 + \alpha_n x)))_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem punktów z wykresu funkcji f, różnych od punktu $(x_0, f(x_0))$ i zbieżnym do punktu $(x_0, f(x_0))$

4. Jeżeli $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
&\frac{(x_0+\alpha_n x, f(x_0+\alpha_n x)) - (x_0, f(x_0))}{||(x_0+\alpha_n x, f(x_0+\alpha_n x)) - (x_0, f(x_0))||} = \\
&= \frac{(\alpha_n x, f(x_0+\alpha_n x) - f(x_0))}{||(\alpha_n x, f(x_0+\alpha_n x) - f(x_0))||} = \\
&= \frac{(\alpha_n x, f'(x_0)(\alpha_n x) + ||\alpha_n x|| u(x_0+\alpha_n x))}{||(\alpha_n x, f'(x_0)(\alpha_n x) + ||\alpha_n x|| u(x_0+\alpha_n x))||} = \\
&= \frac{(x, f'(x_0)x + ||x|| u(x_0+\alpha_n x))}{||(x, f'(x_0)x + ||x|| \underbrace{u(x_0+\alpha_n x)}_{\longrightarrow 0})||} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{(x, f'(x_0)x)}{||(x, f'(x_0)x)||} = \frac{(x,y)}{||(x,y)||}
\end{aligned}$$

5. (x, y) jest wektorem stycznym do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$

Teza części $ii)$ wynika z części $i)$ □

1.3 Twierdzenie o przyrostach

Twierdzenie 1.3.1 (K11)**.** *Jeżeli funkcja $f\colon U \to Y$ jest ciągła w punktach $x_1, x_2 \in U$ i różniczkowalna w każdym punkcie postaci $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2,\ \lambda \in (0,1)$, to istnieje takie $\xi \in (0,1)$, że*

$$||f(x_1) - f(x_2)|| \leqslant ||f'(\xi x_1 + (1-\xi)x_2)|| \cdot ||x_1 - x_2||$$

Twierdzenie 1.3.2 (K12)**.** *Jeżeli funkcja $f\colon U \to \mathbb{R}$ jest ciągła w punktach $x_1, x_2 \in U$ i różniczkowalna w każdym punkcie postaci $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2,\ \lambda \in (0,1)$, to istnieje takie $\xi \in (0,1)$, że*

$$f(x_1) - f(x_2) = f'(\xi x_1 + (1-\xi)x_2)(x_1 - x_2)$$

Twierdzenie 1.3.3 (K13)**.** *Załóżmy, że zbiór U jest spójny. Jeżeli $f\colon U \to Y$ i $f'(x) = 0$ dla każdego $x \in U$, to f jest funkcją stałą.*

1.4 Pochodna kierunkowa

Ustalmy przestrzeni X, Y nad tym samym ciałem $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ i zbiór otwarty $U \subset X$.

Definicja 1.4.1. *Mówimy, że funkcja $f\colon U \to Y$ ma w punkcie $x_0 \in U$ pochodną kierunkową w kierunku wektora $a \in X$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje granica*

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{f(x_0+\alpha a) - f(x_0)}{\alpha};$$

Granicę tę (jeżeli istnieje) oznaczamy symbolem $\nabla_a f(x_0)$ i nazywamy ***pochodną kierunkową*** *funkcji f w punkcie x_0 w kierunku wektora a*

Twierdzenie 1.4.1 (K1)**.** *Jeżeli funkcja $f\colon U \to Y$ jest różniczkowalna w punkcie $x_0 \in U$ to ma ona w tym punkcie pochodną kierunkową w kierunku każdego wektora $a \in X$ oraz $\nabla_a f(x_0) = f'(x_0)a$*

1.5 Pochodne cząstkowe

Ustalmy liczbę naturalną $n \in \mathbb{N}$, przestrzenie unormowane $X_1, \ldots, X_N, Y$ nad tym samym ciałem $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ oraz zbiór otwarty $U \subset \bigtimes_{j=1}^{N} X_j$

Definicja 1.5.1. *Mówimy, że funkcja $f\colon U \to Y$ ma w punkcie $(x_1, \ldots, x_N) \in U$ pochodną cząstkową względem przestrzeni X_j (lub i względem j-tej zmiennej) gdzie $j \in \{1, \ldots, N\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja $f(x_1, \ldots, x_{j-1}, \bullet, x_{j+1}, \ldots, x_N)$ jest różniczkowalna w punkcie x_j*
Jeżeli $j \in \{1, \ldots, N\}$ i funkcja $f\colon U \to Y$ ma w punkcie $(x_1, \ldots, x_N)$ pochodną cząstkową względem przestrzeni X_j to $f(x_1, \ldots, x_{j-1}, \bullet, x_{j+1}, \ldots, x_N)'(x_j)$ nazywamy ***pochodną cząstkową*** *funkcji f względem przestrzeni X_j (lub i względem j-tej zmiennej) i oznaczamy symbolem $f'_{X_j}(x_1, \ldots, x_N)$*

$$f'_{X_j}(x_1, \ldots, x_N) = f(x_1, \ldots, x_{j-1}, \bullet, x_{j+1}, \ldots, x_N)'(x_j)$$

Definicja 1.5.2. *Jeżeli $j \in \{1, \ldots, N\}$ to funkcja $\Pi_j\colon \bigtimes_{k=1}^{N} X_k \to X_j$ daną wzorem $\pi_j(x_1, \ldots, x_N) = x_j$ nazywamy* ***rzutowaniem*** *na przestrzeń X_j, a funkcję $\Lambda_j\colon X_j \to \bigtimes_{k=1}^{N} X_k$ daną wzorem $\Lambda_j(u) = (0, \ldots, 0, \underbrace{u}_{j}, 0, \ldots, 0)$ nazywamy* ***zanurzeniem*** *przestrzeni X_j w produkt $\bigtimes_{k=1}^{N} X_k$*

Twierdzenie 1.5.1. *Jeżeli funkcja $f\colon U \to Y$ jest różniczkowalna w punkcie $(x_1, \ldots, x_N) \in U$, to ma ona w tym punkcie pochodne cząstkowe względem każdej przestrzeni $X_1, \ldots, X_N$ oraz*

1. $f'_{X_j}(x_1, \ldots, x_N) = f'(x_1, \ldots, x_N) \circ \Lambda_j$
2. $f'(x_1, \ldots, x_N) = \sum_{k=1}^{N} f'_{X_k}(x_1, \ldots, x_N) \circ \pi_k$

Dowód.

1. Jeżeli $j \in \{1, \ldots, N\}$ to dla "małych" $h \in X_j \setminus \{0\}$ mamy
$$\frac{f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + h, x_{j+1}, \ldots, x_N) - f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_N) - f'(x_1, \ldots, x_N)\Lambda_j h}{||h||} =$$
$$= \frac{f((x_1, \ldots, x_N) + (0, \ldots, 0, h, 0, \ldots, 0)) - f(x_1, \ldots, x_N) - f'(x_1, \ldots, x_N)(0, \ldots, 0, h, 0, \ldots, 0)}{||(0, \ldots, 0, h, 0, \ldots, 0)||} \xrightarrow{h \to 0}$$
0 a zatem funkcja f ma w punkcie $(x_1, \ldots, x_N)$ pochodną cząstkową względem przestrzeni X_j i zachodzi 1.

2. Jeżeli $(h_1, \ldots, h_N) \in \bigtimes_{j=1}^{N} X_j$ to
$$f'(x_1, \ldots, x_N)(h_1, \ldots, h_N) = f'(x_1, \ldots, x_N)\left(\sum_{k=1}^{N} \Lambda_k h_k\right) = \sum_{k=1}^{N} f'(x_1, \ldots, x_N)\Lambda_k h_k =$$
$$= \sum_{k=1}^{N} f'_{X_k}(x_1, \ldots, x_N)\pi_k(h_1, \ldots, h_N)$$

□

1.6 Funkcje klasy C^1

Definicja 1.6.1. *Funkcję $f\colon U \to Y$ nazywamy funkcją klasy C^1 wtedy i tylko wtedy, gdy jest ona funkcją różniczkowalną i funkcja $f'\colon U \to L(X,Y)$ jest ciągła.*

Twierdzenie 1.6.1 (K16)**.** *Złożenie funkcji klasy C^1 jest funkcją klasy C^1*

Dowód. (Szkic)
Załóżmy, że X, Y, Z są przestrzeniami unormowanymi $U \subset X$ i $W \subset Y$ są zbiorami otwartymi, a $f\colon U \to Y$ oraz $g\colon W \to Z$ są funkcjami klasy C^1 i $f(U) \subset W$.
Odwzorowanie $\Lambda\colon L(X,Y) \times L(Y,Z) \to L(X,Z)$ dane wzorem

$$\Lambda(A,B) = B \circ A$$

jest dwuliniowe i ciągłe oraz

$$(g \circ f)' = \Lambda(f', g' \circ f)$$

□

Twierdzenie 1.6.2 (K17)**.** *Załóżmy, że $X_1, \ldots, X_N, Y$ są przestrzeniami unormowanymi, a $U \subset \bigtimes_{j=1}^{N} X_j$ jest zbiorem otwartym. Funkcja $f : U \to Y$ jest klasy C^1 wtedy i tylko wtedy, gdy w każdym punkcie zbioru U ma ona pochodne cząstkowe względem każdej przestrzeni $X_1, \ldots, X_N$ i każda z funkcji $f'_{X_1}, \ldots, f'_{X_N}$ jest ciągła.*

Twierdzenie 1.6.3 (K18)**.** *Załóżmy, że $U \subset \mathbb{R}^N$ jest zbiorem otwartym, $f\colon U \to \mathbb{R}^M$, a $f_1, \ldots, f_M\colon U \to \mathbb{R}$ są takimi funkcjami, że $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_M(x))$ dla $x \in U$.*

i) Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie $x_0 \in U$, to

$$f'(x_0)(h_1, \ldots, h_N) = \left(\begin{bmatrix} f_{1,1}(x_0) & \ldots & f_{1,N}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{M,1}(x_0) & \ldots & f_{M,N}(x_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_N \end{bmatrix} \right)^T$$

dla $(h_1, \ldots, h_N) \in \mathbb{R}^N$

ii) Jeżeli istnieje takie otoczenie $U_0 \subset U$ punktu $x_0 \in U$, że każda z funkcji $f_1, \ldots, f_M$ ma w każdym punkcie tego otoczenia wszystkie pochodne cząstkowe i te wszystkie pochodne cząstkowe jako funkcje rzeczywiste określone na zbiorze U_0 są ciągłe w punkcie x_0, to funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0.

iii) Funkcja f jest klasy C^1 wtedy i tylko wtedy, gdy każda z funkcji $f_1, \ldots, f_M$ ma w każdym punkcie zbioru U wszystkie pochodne cząstkowe i te wszystkie pochodne cząstkowe $f_{m,n}\colon U \to \mathbb{R}$ dla $m \in \{1, \ldots, M\}$, $n \in \{1, \ldots, N\}$ są funkcjami ciągłymi.

1.7 Odwzorowania regularne i dyfeomorfizmy

Ustalmy przestrzenie unormowane X, Y nad tym samym ciałem $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ oraz zbiór otwarty $U \subset X$

Twierdzenie 1.7.1. *Jeżeli X oraz Y są przestrzeniami Banacha, a funkcja $f\colon U \to Y$ jest klasy C^1, $x_0 \in U$ i $f'(x_0) \in Isom(X, Y)$ to istnieje takie otoczenie $U_0 \subset U$ punktu x_0, że $f(U_0)$ jest podzbiorem otwartym przestrzeni Y, $f\big|_{U_0}$ jest różnowartościowe i $f^{-1}\big|_{U_0}$ jest klasy C^1.*

Lemat 1.7.1. *Jeżeli X, Y są przestrzeniami Banacha to $Isom(X, Y)$ jest podzbiorem otwartym $L(X, Y)$, a jeżeli $Isom(X, Y) \neq \emptyset$ to funkcja $\Lambda \longmapsto \Lambda^{-1}$, $\Lambda \in Isom(X, Y)$ jest ciągła.*

Dowód.

1. $\Lambda_0 \in Isom(X, Y)$
2. Możemy założyć, że $\Lambda_0 \neq 0$
3. $r := \frac{1}{2}||\Lambda_0^{-1}||^{-1}$
4. Niech $\Lambda \in K(\Lambda_0, r)$ - kula w $L(X, Y)$
5. Pokażemy (i to zakończy dowód), że Λ jest izomorfizmem oraz $||\Lambda^{-1} - \Lambda_0^{-1}|| < 2||\Lambda_0^{-1}||^2 \cdot ||\Lambda - \Lambda_0||$
6. $\Lambda_1 := \Lambda_0^{-1} \circ (\Lambda_0 - \Lambda) \in L(X, X)$
7. $||\Lambda_1|| = ||\Lambda_0^{-1} \circ (\Lambda_0 - \Lambda)|| \leqslant ||\Lambda_0^{-1}|| \cdot \underbrace{||\Lambda_0 - \Lambda||}_{<\, r} < ||\Lambda_0^{-1}|| \cdot r = \frac{1}{2}$
8. Jeżeli $n \in \mathbb{N}$, to $||\Lambda_1^n|| \leqslant ||\Lambda_1||^n$, a zatem szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \Lambda_1^n$ jest bezwzględnie zbieżny (oczywiście $\Lambda_1^n = \underbrace{\Lambda_1 \circ \cdots \circ \Lambda_1}_{n \text{ razy}}$), a wobec zupełności przestrzeni $L(X, Y)$ jest zbieżny.
9. $\Lambda_2 := \sum\limits_{n=0}^{\infty} \Lambda_1^n \in L(X, X)$ (gdzie $\Lambda_1^0 = id_X$).
10. $((id_X - \Lambda_1) \circ \Lambda_2)x = \Lambda_2 x - \Lambda_1\Lambda_2 x = \Lambda_2 x - \Lambda_1 \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} \Lambda_1^n x\right) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \Lambda_1^n x - \sum\limits_{n=0}^{\infty} \underbrace{\Lambda_1(\Lambda_1 x)}_{\Lambda^{n+1}x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \Lambda_1^n x - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \Lambda_1^n x = x$

    oraz $\Lambda_2 \circ (id_X - \Lambda_1)(x) = \Lambda_2 x - \Lambda_2(\Lambda_1 x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \Lambda_1^n x - \sum\limits_{n=0}^{\infty} \underbrace{\Lambda_1^n \Lambda_1 x}_{\Lambda^{n+1}x} = x.$
11. $id_X - \Lambda_1\colon X \xrightarrow[1-1]{\text{na}} X$ oraz $(id_X - \Lambda_1)^{-1} = \Lambda^2$
12. $id_X - \Lambda_1 \in Isom(X, X)$
13. $id_X - \Lambda_1 = \underbrace{id_X - \Lambda_0^{-1} \circ (\Lambda_0 - \Lambda)}_{id_X - \Lambda_0^{-1} \circ \Lambda} = \Lambda_0^{-1} \circ \Lambda$
14. $\Lambda = \Lambda_0 \circ (id_X - \Lambda_1)$ oraz $\Lambda^{-1} = (id_X - \Lambda_1)^{-1} \circ \Lambda_0^{-1} = \Lambda_2 \circ \Lambda_0^{-1}$

15. $\Lambda \in Isom(X,Y)$ (jako złożenie izomorfizmów) oraz
$||\Lambda^{-1}-\Lambda_0^{-1}|| = ||\Lambda_2 \circ \Lambda_0^{-1} - \Lambda_0^{-1}|| = ||(\Lambda_2 - id_X)\circ \Lambda_0^{-1}|| \leqslant ||\Lambda_2 - id_X|| \cdot ||\Lambda_0^{-1}|| \leqslant \left|\left| \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_1^n \right|\right| \cdot ||\Lambda_0^{-1}|| \leqslant$
$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{||\Lambda_1^n||}_{\leqslant\, ||\Lambda_1||^n} \cdot ||\Lambda_0^{-1}|| \leqslant ||\Lambda_0^{-1}|| \cdot \sum_{n=1}^{\infty} ||\Lambda_1||^n = ||\Lambda_0^{-1}|| \cdot \frac{||\Lambda_1||}{1-||\Lambda_1||} = ||\Lambda_0^{-1}|| \cdot \frac{||\Lambda_0^{-1}\circ(\Lambda_0 - \Lambda)||}{1-||\Lambda_1||} <$
$< ||\Lambda_0^{-1}|| \cdot \frac{||\Lambda_0^{-1}|| \cdot ||\Lambda_0 - \Lambda||}{1-\frac{1}{2}} = 2||\Lambda_0^{-1}||^2 \cdot ||\Lambda_0 - \Lambda||$

□

Dowód. [Tw.]

1. $g := f'(x_0)^{-1} \circ f \colon U \to X$ jest funkcją klasy C^1 (jako złożenie funkcji klasy C^1) oraz
$g'(x) = f'(x_0)^{-1} \circ f'(x)$ dla $x \in U$
2. $g'(x_0) = id_X$
3. $h \colon U \to X$
$h(x) = x - g(x)$
4. h jest funkcją klasy C^1
$h'(x_0) = id_X - id_X = 0$ (gdyż $(id_X)'(x) = id_X$)
5. Istnieje $r \in (0,\infty) \colon \underset{x\in K(x_0,2r)}{\forall} \left(||h'(x)|| \leqslant \frac{1}{2}\right)$
$\underset{x\in K(x_0,r)}{\forall} (g'(x) \in Isom(X,X))$
6. $\underset{z\in K(g(x_0),\frac{r}{2})}{\forall} \ \underset{x\in K(x_0,r)}{\exists!} (z = g(x))$

1° $z \in K(g(x_0), \frac{r}{2})$

2° Jeżeli $x \in X$ i $||x-x_0|| \leqslant r$ (wypukłe) to $||z+h(x)-x_0|| = ||z-g(x_0)+g(x_0)+x-g(x)-x_0|| =$
$||z-g(x_0)+h(x)-h(x_0)|| \leqslant ||z-\underbrace{g(x_0)}_{\leqslant \frac{r}{2}}|| + ||h(x)-h(x_0)|| \underbrace{<}_{\text{z } K13} \frac{r}{2} + \frac{1}{2}\underbrace{||x-x_0||}_{\leqslant r} \leqslant r$

3° Wzór $T(x) = z + h(x)$ określa funkcję $T \colon \{x \in X \colon ||x-x_0|| \leqslant r\} \to K(x_0,r)$

4° Jeżeli $x_1, x_2 \in X$ i $||x_1 - x_0|| \leqslant r,\ ||x_2 - x_0|| \leqslant r$ to $||T(x_1)-T(x_2)|| = ||h(x_1)-h(x_2)|| \underbrace{\leqslant}_{\text{z } K11}$
$\underbrace{\leqslant}_{\text{z } K11} \frac{1}{2}||x_1 - x_2||$

5° Istnieje dokładnie jeden taki punkt $x \in X,\ ||x-x_0|| \leqslant r$, że $T(x) = x$ czyli $z + \underbrace{h(x)}_{x-g(x)} = x$

6° $z = g(x)$ oraz $x = T(x) \in K(x_0,r)$

7. $U_0 = \underbrace{K(x_0,r) \cap g^{-1}\left(K\left(g(x_0), \frac{r}{2}\right)\right)}_{\text{otwarte otoczenie punktu } x_0}$
8. $g(U_0) = K(g(x_0), \frac{r}{2})$
$U_0 \subset K(x_0,r) \subset U$

9. $f = f'(x_0) \circ g$

10. $f(U_0) = f'(x_0)(g(U_0)) = f'(x_0)(K(g(x_0), \frac{r}{2}))$ - zbiór otwarty w przestrzeni Y (na mocy twierdzenia Banacha o odwzorowaniu otwartym)

11. $f\Big|_{U_0} = f'(x_0) \circ g\Big|_{U_0}$

12. $g\Big|_{U_0}$ jest różnowartościowa
$x_1, x_2 \in U_0$
Załóżmy, że $g(x_1) = g(x_2)$
$g(x_1) \in K(g(x_0), \frac{r}{2})$
$x_1, x_2 \in K(x_0, r)$ (na mocy punktu 6)
$x_1 = x_2$

13. $f\Big|_{U_0}$ jest funkcją różnowartościową jako złożenie funkcji różnowartościowych.

14. $f'\Big|_{U_0}(x) = f'(x_0) \circ g'\Big|_{U_0}(x) \in Isom(X, Y)$ dla $x \in U_0$ (złożenie izomorfizmów).

15. $f\Big|_{U_0}^{-1} = g\Big|_{U_0}^{-1} \circ f'(x_0)^{-1}$

16. Jeżeli $x_1, x_2 \in K(x_0, r)$, to $||g(x_1) - g(x_2)|| = ||(x_1 - h(x_1)) - (x_2 - h(x_2))|| =$ $||(x_1 - x_2) - (h(x_1) - h(x_2))|| \geqslant ||x_1 - x_2|| - ||h(x_1) - h(x_2)|| \geqslant ||x_1 - x_2|| - \frac{1}{2}||x_1 - x_2|| = \frac{1}{2}||x_1 - x_2||$

17. Jeżeli $z_1, z_2 \in g(U_0)$, to zmieniając $x_1 = g\Big|_{U_0}^{-1}(z_1), x_2 = g\Big|_{U_0}^{-1}(z_2)$ mamy
$$||z_1 - z_2|| = ||g(x_1) - g(x_2)|| \geqslant \frac{1}{2}||x_1 - x_2|| = \frac{1}{2}\left|\left|g\Big|_{U_0}^{-1}(z_1) - g\Big|_{U_0}^{-1}(z_2)\right|\right|$$
czyli spełniony mamy warunek Lipschitza (no i oczywiście ciągłość) ze stałą 2 dla funkcji $g\Big|_{U_0}^{-1}$

18. Funkcja $f\Big|_{U_0}^{-1}$ jest ciągła.

19. Na mocy twierdzenia 1.4 funkcja $f\Big|_{U_0}^{-1}$ jest różniczkowalna oraz
$$\left(f\Big|_{U_0}^{-1}\right)'\left(f\Big|_{U_0}(x)\right) = f'\Big|_{U_0}(x)^{-1} \text{ dla } x \in U_0$$
czyli
$$f\Big|_{U_0}^{-1}(y) = \left(f\Big|_{U_0}'\left(f\Big|_{U_0}^{-1}(y)\right)\right)^{-1} \text{ dla } y \in f(u_0)$$

20. $\left(f\Big|_{U_0}^{-1}\right)'$ jest funkcją ciągłą (na mocy lematu 1).

Definicja 1.7.1. *Funkcję $f\colon U \to Y$ nazywamy* ***odwzorowaniem regularnym*** *wtedy i tylko wtedy, gdy jest ono klasy C^1 oraz*
$$\underset{x \in U}{\forall}(f'(x) \in Isom(X, Y))$$
Funkcję f nazywamy ***dyfeomorfizmem*** *wtedy i tylko wtedy, gdy f jest funkcją różnowartościową, $f(U)$ jest podzbiorem otwartym przestrzeni Y, funkcje f oraz f^{-1} są klasy C^1.*

□

Twierdzenie 1.7.2. *Załóżmy, że X, Y są przestrzeniami Banacha, $f\colon U \to Y$.*

i) Jeżeli f jest dyfeomorfizmem to f oraz f^{-1} są odwzorowiami regularnymi.

ii) Jeżeli f jest odwzorowaniem regularnym, to dla każdego $x_0 \in U$ istnieje takie jego otoczenie $U_0 \subset U$, że $f\big|_{U_0}$ jest dyfeomorfizmem.

iii) Jeżeli f jest odwzorowaniem regularnym, to dla każdego zbioru otwartego $V \subset U$ zbiór $f(V)$ jest podzbiorem otwartym przestrzeni Y.

iv) Jeżeli f jest różnowartościowym odwzorowaniem regularnym to jest dyfeomorfizmem.

Dowód.

i) 1. $g = f^{-1}$

2. $g \circ f = id_U,\ f \circ g = id_{f(U)}$

3. $g' f(x) \circ f'(x) = id_X$ dla $x \in X$
$f'(g(y)) \circ g'(y) = id_Y$ dla $y \in f(U)$

4. $f'(x)\colon X \overset{\text{na}}{\underset{\text{1-1}}{\rightarrow}} Y$ dla $x \in U$
$g'(x)\colon Y \overset{\text{na}}{\underset{\text{1-1}}{\rightarrow}} X$ dla $y \in f(U)$

5. $f'(x) \in Isom(X, Y)$, a $g'(y) \in Isom(Y, X)$ na mocy twierdzenia Banacha o operatorze odwrotnym.

ii) Wystarczy zastosować twierdzenie 1.

iii) 1. $V \subset U$ - zbiór otwarty.

2. $y_0 \in f(V)$

3. $y_0 = f(x_0)$ dla $x_0 \in V$

4. Na mocy twierdzenia 1 istnieje takie otoczenie $U_0 \subset V$ punktu x_0, że $f(U_0)$ jest podzbiorem otwartym przestrzeni Y.

5. $y_0 = f(\underbrace{x_0}_{\in U_0}) \in f(U_0)$ - zbiór otwarty zawarty w $f(V)$

6. $f(V)$ jest podzbiorem otwartym przestrzeni Y.

iv) 1. Według tezy iii) zbiór $f(U)$ jest zbiorem otwartym w przestrzeni Y

2. Funkcja $f^{-1}\colon f(U) \to X$ jest ciągła.

1° $V \subset U$ - zbiór otwarty.

2° $(f^{-1})^{-1}(V) = \{y \in f(U)\colon f^{-1}(y) \in V\} = f(U \cap V)$ - zbiór otwarty na mocy iii)
Ostatnią równość pokazuje się przez zawieranie w obie strony.
($\subseteq$) $y = f(x), x \in U$, a zatem $x = f^{-1}(y) \in V$
($\supseteq$) $y = f(x), x \in U \cap V$

3. Z twierdzenia 1.4 funkcja f^{-1} jest różniczkowalna oraz

$$(f^{-1})'(f(x)) = f'(x)^{-1} \text{ dla } x \in U$$

tj.

$$(f^{-1})'(y) = f'(f^{-1}(y))^{-1} \text{ dla } y \in f(U)$$

a zatem (porównaj też lemat 1) funkcja $(f^{-1})'$ jest ciągła.

4. f^{-1} jest klasy C^1.

5. f jest dyfeomorfizmem.

□

1.8 Twierdzenia o funkcji uwikłanej

Ustalmy przestrzenie Banacha X, Y, Z i zbiór otwarty $D \subset X \times Y$

Twierdzenie 1.8.1. *Załóżmy, że $f\colon D \to Z$ jest funkcją klasy C^1 oraz $(x_0, y_0) \in D$. Jeżeli $f'_Y(x_0, y_0)\colon Y \xrightarrow[\text{1-1}]{\text{na}} Z$, to istnieją zbiory otwarte $U_0 \subset X,\ W_0 \subset Y$ oraz taka funkcja $\varphi\colon U_0 \to Y$ klasy C^1, że $x_0 \in U_0,\ y_0 \in W_0,\ \varphi(U_0) \subset W_0$ oraz*

$$\underset{(x,y)\in U_0\times W_0}{\forall} f(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x)$$

Dowód.

1. $F\colon D \to X,\ G\colon D \to Z,\ H\colon D \to X \times Z$
   $F(x,y) = x,\ G(x,y) = f(x,y),\ H(x,y) = \underbrace{F(x,y)}_{x}, \underbrace{G(x,y)}_{f(x,y)}$

2. $F'_X(x,y) = id_X$
   $F'_Y(x,y) = 0$
   $G'_X(x,y) = f'_X(x,y)$
   $G'_Y(x,y) = f'_Y(x,y)$
   $H'_X(x,y) = (id_X, f'X(x,y))$
   $H'_Y(x,y) = (0, f'_Y(x,y))$ dla $(x,y) \in D$.

3. $H'(x_0,y_0)(x,y) = H'_X(x_0,y_0) \circ \pi_1(x,y) + H'_Y(x_0,y_0) \circ \pi_2(x,y) = H'_X(x_0,y_0)x + H'_Y(x_0,y_0)y = (x, f'_X(x_0,y_0)x) + (0, f'_Y(x_0,y_0)) = (x, f'_X(x_0,y_0)x + f'_Y(x_0,y_0)y)$ dla $(x,y) \in X \times Y$
   $H\colon X \times Y \to X \times Z,\ H$ jest klasy C^1 (bo składowe są C^1 na mocy K17). Czy $H'(x_0,y_0)\colon X \times Y \xrightarrow[\text{1-1}]{\text{na}} X \times Z$ - czyli czy $H'(x_0,y_0)$ jest izomorfizmem?
   Najpierw pokażemy różnowartościowość i , że jest 'na': $(x,z) \in (X \times Z)$
   $(x,z) = H'(x_0,y_0)(u,w) = H'_X(x_0,y_0)u + H'_Y(x_0,y_0)w = (u, f'_X(x_0,y_0)u + f'_Y(x_0,y_0)w)$
   Wystarczy przyjąć $u = x$ i $w = f'_Y(x_0,y_0)^{-1}(z - f'_X(x_0,y_0)x)$.

4. Ponieważ H' jest klasy C^1 to według twierdzenia 1 z poprzedniego paragrafu istnieje takie otoczenie $D_0 \subset X \times Y$ punktu (x_0,y_0), że $H\Big|_{D_0}$ jest dyfeomorfizmem.

5. Istnieją takie zbiory otwarte $U_0 \subset X,\ W_0 \subset Y$, że $(x_0,y_0) \in U_0 \times W_0 \subset D_0$.

6. $H(U_0 \times W_0)$ jest podzbiorem otwartym przestrzeni $X \times Z$.

7. Jeżeli $(u, w) \in U_0 \times W_0$, a $(x, z) \in H(U_0 \times W_0)$ to

$$\begin{aligned} H\Big|_{U_0 \times W_0}^{-1}(x, z) = (u, w) &\Leftrightarrow (x, z) = H(u, w) \\ &\Leftrightarrow (x, z) = (u, f(u, w)) \\ &\Leftrightarrow u = x \wedge z = f(x, w) \end{aligned}$$

8. Istnieje taka funkcja $\phi\colon H(U_0 \times W_0) \to W_0$, że

$$H\Big|_{U_0 \times W_0}^{-1}(x, z) = (x, \phi(x, z)) \text{ dla } (x, z) \in H(U_0 \times W_0)$$

9. Ponieważ H jest dyfeomorfizmem to funkcja $H\Big|_{U_0 \times W_0}^{-1}$ jest klasy C^1, więc ϕ jest klasy C^1 (jako składowa).

10. $U_1 = \{x \in U_0 \colon (x, 0) \in H(U_0 \times W_0)\}$ jest zbiorem otwartym.

11. $(x_0, 0) = (x_0, f(x_0, y_0)) = H(x_0, y_0) \in H(U_0 \times W_0)$

12. $x_0 \in U_1$

13. $\varphi\colon U_1 \to Y$
    $\varphi(x) = \phi(x, 0)$

14. φ jest klasy C^1 oraz $\varphi(U_1) \subset W_0$

15. Jeśli $(x, y) \in U_1 \times W_0$ to

$$\begin{aligned} f(x, y) = 0 &\Leftrightarrow H(x, y) = (x, 0) \\ &\Leftrightarrow (x, y) = H\Big|_{U_0 \times W_0}^{-1}(x, 0) \\ &\Leftrightarrow (x, y) = (x, \phi(x, 0)) \\ &\Leftrightarrow y = \phi(x, 0)) \\ &\Leftrightarrow y = \varphi(x) \end{aligned}$$

□

Twierdzenie 1.8.2. *Załóżmy, że $f\colon D \to Z$ jest funkcją klasy C^1 oraz*

$$\underset{(x,y)\in D}{\forall} (f'_Y(x, y)\colon Y \xrightarrow[\text{1-1}]{na} Z)$$

Jeżeli $U \subset X$ jest zbiorem otwartym, a $\varphi\colon U \to Y$ jest taką funkcją ciągłą, że

$$\underset{x \in U}{\forall} ((x, \varphi(x)) \in D \wedge f(x, \varphi(x)) = 0)$$

to φ jest klasy C^1 oraz $\varphi'(x) = -f'_Y(x, \varphi(x))^{-1} \circ f'_X(x, \varphi(x))$ dla $x \in U$.

Dowód.

1. $x_0 \in U$

2. Stosując twierdzenie 1 do punktu (x_0, y_0) otrzymujemy z otwartości zbioru $U_0 \subset X, W_0 \subset Y$ i taką funkcję $\psi\colon U_0 \to Y$ klasy C^1, że $x_0 \in U_0, \varphi(x_0) \in W_0, \psi(U_0) \subset W_0$
$$\underset{(x,y)\in U_0\times W_0}{\forall} (f(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = \psi(x))$$

3. Jeśli $x \in U_0 \cap \underbrace{\varphi^{-1}(W_0)}_{\subset U}$ to $(x, \varphi(x)) \in U_0 \times W_0$ oraz $f(x, \varphi(x)) = 0$ i zatem $\varphi(x) = \psi(x)$

4. $\varphi\Big|_{U_0\cap\varphi^{-1}(W_0)} = \psi\Big|_{U_0\cap\varphi^{-1}(W_0)}$

5. $\varphi\Big|_{U_0\cap\varphi^{-1}(W_0)}$ jest klasy C^1, $x_0 \in U_0 \cap \varphi^{-1}(W_0)$ i na mocy ciągłości funkcji φ zbiór $\varphi^{-1}(W_0)$ jest otwarty, a zatem $U_0 \cap \varphi^{-1}(W_0)$ jest otwarty i jest otoczeniem punktu x_0.

6. φ jest klasy C^1.

7. Jeżeli $x \in U$, to
$$\begin{aligned} 0 &= (f \circ (id_U, \varphi))'x = \\ &= f'(id_U(x), \varphi(x)) \circ (id_X, \varphi'(x)) = \\ &= f'(x, \varphi(x)) \circ (id_X, \varphi'(x)) = \\ &= (f'_X(x, \varphi(x)) \circ \pi_1 + f'_Y(x, \varphi(x)) \circ \pi_2) \circ (id_X, \varphi'(x)) = \\ &= f'_X(x, \varphi(x)) + f'_Y(x, \varphi(x)) \circ \varphi'(x) \end{aligned}$$
Stąd
$$f'_Y(x, \varphi(x)) \circ \varphi'(x) = -f'_X(x, \varphi(x))$$
i wobec tego
$$\varphi'(x) = -f'_Y(x, \varphi(x))^{-1} \circ f'_X(x, \varphi(x))$$

□

1.9 Pochodne wyższych rzędów

Ustalmy przestrzenie unormowane X, Y i zbiór otwarty $U \subset X$

Oznaczenie 1.9.1.

$$L^m(X,Y) = \{\Lambda\colon X^m \to Y : \Lambda \textit{ jest } m-\textit{liniowe i ciągłe } \} \textit{ dla } m \in \mathbb{N}$$

Lemat 1.9.1. *Jeżeli $m \in \mathbb{N}$, a funkcja $f\colon U \to L^m(X,Y)$ jest różniczkowalna w punkcie $x_0 \in U$ to odwzorowanie $\Lambda\colon X^{m+1} \to Y$ dane wzorem*
$$\Lambda(h_1, \ldots, h_{m+1}) = f'(x_0)(h_{m+1})(h_1, \ldots, h_m) \textit{ dla } h_1, \ldots, h_{m+1} \in X$$
jest $m+1$-liniowe i ciągłe.

Dowód.

1. Jeżeli $h_1, \dots, h_m \in X$, to $\Lambda(h_1, \dots, h_m, \bullet)$ jest odwzorowaniem liniowym.
2. Jeżeli $h \in X$ to $f'(x_0)h$ jest odwzorowaniem $m-$liniowym, a zatem Λ jest funkcją liniową względem każdej z m pierwszych zmiennych.
3. Λ jest $(m+1)$ liniowa.
4. Jeżeli $h_1, \dots, h_m \in X$ to

$$\begin{aligned} ||\Lambda(h_1, \dots, h_m)|| &= ||\underbrace{f'(x_0)(h_{m+1})(h_1, \dots, h_m)}_{\in L^m(X,Y)}|| \leqslant \\ &\leqslant \underbrace{||f'(x_0)(h_{m+1})||}_{\in L(X, L^m(X,Y))} \cdot \prod_{j=1}^{m} ||h_j|| \leqslant \\ &\leqslant ||f'(x_0)|| \cdot ||h_{m+1}|| \cdot \prod_{j=1}^{m} ||h_j|| = \\ &= ||f'(x_0)|| \cdot \prod_{j=1}^{m+1} ||h_j|| \end{aligned}$$

   co dowodzi ciągłości.

$\square$

Definicja 1.9.1. *Załóżmy, że $f\colon U \to Y$*

i) Jeżeli f jest różniczkowalna w punkcie $x_0 \in U$, to $f^{(1)}x_0 = f'(x_0)$.

ii) Jeżeli $m \in \mathbb{N}$, to funkcja f jest $(m+1)$-krotnie różniczkowalna w punkcie $x_0 \in U$ wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja f jest m-krotnie różniczkowalna w pewnym otoczeniu $U_0 \subset U$ punktu x_0 i funkcja $f^{(m)}\big|_{U_0}$ jest różniczkowalna w punkcie $x_0 \in U_0$. Jeżeli funkcja f jest $(m+1)$-krotnie różniczkowalna w punkcie x_0 to

$$f^{(m+1)}(x_0)(h_1, \dots, h_{m+1}) = f^{(m)}\big|_{U_0}(x_0)(h_{m+1})(h_1, \dots, h_m)$$

dla $h_1, \dots, h_{m+1} \in X$, gdzie $U_0 \subset U$ jest takim otoczeniem punktu x_0, że funkcja $f^{(m)}\big|_{U_0}$ jest różniczkowalna w punkcie x_0.

Wniosek 1.9.1. *Jeżeli funkcja $f\colon U \to Y$ jest $m-$krotnie różniczkowalna w punkcie x_0, to $f^{(m)}(x_0) \in L^m(X,Y)$.*

Dowód.
Stosujemy lemat do funkcji $f^{(m)}\big|_{U_0} : X \to L^m(X,Y)$, $f^{(m)}\big|_{U_0}'(x_0)(h_{m+1})(h_1, \dots, h_m)$.
Zatem $f^{(m+1)}(x_0) \in L^{(m+1)}(X,Y)$. $\square$

Uwaga 1.9.1. *Jeżeli $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$, $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ i $m \in \mathbb{N}$ to funkcja f jest $m-$krotnie różniczkowalna w punkcie $x_0 \in (a,b)$ w sensie definicji 1 wtedy i tylko wtedy, gdy jest ona $m-$krotnie różniczkowalna w "starym" sensie. Jeżeli funkcja f jest m-krotnie różniczkowalna w punkcie $x_0 \in (a,b)$ to*

$$\underbrace{f^{(m)}(x_0)}_{z\ def.1}(h_1, \dots, h_m) = \underbrace{f^{(m)}(x_0)}_{\text{"stary" sens}}\, h_1 \cdot \dots \cdot h_m \ \text{dla}\ h_1, \dots, h_m \in \mathbb{R}$$

Dowód.
Na ćwiczeniach □

Twierdzenie 1.9.1. *Załóżmy, że funkcja $f\colon U \to Y$ jest $m-$krotnie różniczkowalna w każdym punkcie zbioru otwartego $V \subset U$ i niech $F(x) = f^{(m)}(x)$ dla $x \in V$. Jeżeli $n \in \mathbb{N}$ to funkcja F jest $n-$krotnie różniczkowalna w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja f jest $(m+n)$-krotnie różniczkowalna w punkcie x_0. Jeżeli F jest n-krotnie różniczkowalna w punkcie $x_0 \in V$ to*

$$f^{(m+n)}(x_0)(h_1, \ldots, h_{m+n}) = F^{(n)}(x_0)(h_{m+1}, \ldots, h_{m+n})(h_1, \ldots, h_m)$$

Dowód.
Dla $m = 1$ widać od razu, dla większych dowód pomijamy. □

Twierdzenie 1.9.2. *Jeżeli funkcja $f\colon U \to Y$ jest $m-$krotnie różniczkowalna w punkcie $x_0 \in U$, to*

$$f^{(m)}(x_0)(h_{\sigma(1)}, \ldots, h_{\sigma(m)}) = f^{(m)}(x_0)(h_1, \ldots, h_m)$$

dla wszystkich wektorów i dla każdej permutacji σ zbioru $\{1, \ldots, n\}$.

Dowód.
Dowód będzie indukcyjny względem m

I) $m = 2$

1. Załóżmy, że $f\colon U \to Y$ jest dwukrotnie różniczkowalna w punkcie $x_0 \in U$ i niech $h_1, h_2 \in X$. Mamy wykazać, że
$$f^{(2)}(x_0)(h_1, h_2) = f^{(2)}(x_0)(h_2, h_1)$$
Możemy założyć, że $h_1 \neq 0 \neq h_2$
2. $r_0 \in (0, \infty)\colon f$ jest różniczkowalna w każdym punkcie $K(x_0, r_0)$ i $f'\big|_K(x_0, r_0)$ jest funkcją różniczkowalną w punkcie x_0.
3. $\delta = \frac{r_0}{||h_1||+||h_2||}$
4. $\varphi\colon (0, \delta) \to Y$
$$\varphi(t) = f(x_0 + t(h_1 + h_2)) - f(x_0 + th_1) - f(x_0 + th_2) + f(x_0)$$
Zauważmy, że $x_0 + t(h_1 + h_2) \in K(x_0, r_0)$, gdyż
$$||t(h_1 + h_2)|| \leqslant t \cdot (||h_1|| + ||h_2||) < \frac{r_0}{||h_1|| + ||h_2||} \cdot (||h_1|| + ||h_2||) = r_0$$
5. Pokażemy, że (i to zakończy dowód twierdzenia dla $m = 2$)
$$\lim_{t \to 0} \frac{\varphi(t)}{t^2} = f^{(2)}(x_0)(h_1, h_2)$$
6. $u\colon K(0, r_0) \to L(X, Y)$
$$u(h) = f'(\underbrace{x_0 + h}_{\in\ K(x_0, r_0)}) - f'(x_0) - f^{(2)}(\bullet, h)$$

7. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{u(h)}{||h||}=0$
8. Ustalmy $\varepsilon>0$.
9. $$r\in(0,r_0)\colon \underset{h\in X}{\forall}\left(0\leqslant ||h||\leqslant r\Longrightarrow \left|\left|\frac{u(h)}{||h||}\right|\right|\leqslant \frac{\varepsilon}{2||h_1||\cdot(||h_1||+||h_2||)}\right)$$
10. $$\underset{h\in X}{\forall}\left(||h||<r\Longrightarrow ||u(h)||\leqslant \frac{\varepsilon||h||}{2||h_1||\cdot(||h_1||+||h_2||)}\right)$$

    $t\in\left(0,\frac{r}{||h_1||+||h_2||}\right)$
11. $W:=K\left(0,\dfrac{r}{t}\right)\cap K\left(-h_2,\dfrac{r}{t}\right)$
12. $0\in W,\ h_1\in W$
13. $g\colon W\to Y$ dane wzorem
$$g(x)=f(\underbrace{x_0+t(x+h_2)}_{\in\ K(x_0,r)})-f(x_0+tx)-t^2f^{(2)}(x,h_2)$$
14. $$\begin{aligned}g(h_1)-g(0)&=f(x_0+t(h_1+h_2))-f(x_0+th_1)-t^2f^{(2)}(x_0)(h_1,h_2)-(f(x_0+th_2)-f(x_0))=\\&=\varphi(t)-t^2f^{(2)}(x_0)(h_1,h_2)\end{aligned}$$
15. $$||\varphi(t)-t^2f^{(2)}(x_0)(h_1,h_2)||=||g(h_1)-g(0)||\leqslant ||g'(\xi h_1)||\cdot||h_1||\text{ dla pewnego }\xi\in(0,1)$$
16. Jeżeli $x\in W$ to wiedząc, że $f'(x_0+h)=u(h)+f'(x_0)+f^{(2)}(\bullet,h)$ mamy
$$\begin{aligned}g'(x)&=f'(x_0+t(x+h_2)\circ(t\cdot id_X)-f'(x_0+tx)\circ(t\cdot id_X)-t^2f^{(2)}(\bullet,h_2)=\\&=tf'(x_0+t(x+h_2)-tf'(x_0+tx)-t^2f^{(2)}(\bullet,h_2)=\\&=t(u(t(x+h_2))+f'(x_0)+f^{(2)}(\bullet,t(x+h_2))-t(u(tx)+f'(x_0)+f^{(2)}(\bullet,tx))-t^2f^{(2)}(\bullet,h_2)=\\&=t(u(t(x+h_2))-u(tx))\end{aligned}$$
17. $$\begin{aligned}||\varphi(t)-t^2f^{(2)}(x_0)(h_1,h_2)||&\leqslant ||t(u(t(\xi h_2+h_2))-u(t\xi h_1))||\cdot||h_1||\leqslant\\&\leqslant t(||u(t(\xi h_1+h_2))||+||u(t\xi h_1)||)\cdot||h_1||\leqslant\\&\underbrace{\leqslant}_{(*)} t\left(\frac{\varepsilon||t(\xi h_1+h_2)||}{2||h_1||\cdot(||h_1||+||h_2||)}+\frac{\varepsilon||t\xi h_1||}{2||h_1||\cdot(||h_1||+||h_2||)}\right)\cdot||h_1||=\\&=\varepsilon t^2\left(\frac{||(\xi h_1+h_2)||}{2||h_1||\cdot(||h_1||+||h_2||)}+\frac{||\xi h_1||}{2||h_1||\cdot(||h_1||+||h_2||)}\right)<\varepsilon t^2\end{aligned}$$

    Przy (*) skorzystaniu z punktu 9

II) 1. Ustalmy $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$. Załóżmy (założenie indukcyjne), że zdanie wypisane w wypowiedzi twierdzenia 2 jest prawdą.

2. Niech $f\colon U \to Y$ będzie funkcją $(m+1)-$krotnie różniczkowalną w punkcie $x_0 \in U$ i niech $h_1, \dots, h_{m+1} \in X$, a σ będzie permutacją zbioru $\{1, \dots, n\}$. Rozważymy dwa przypadki

1° $\sigma(m+1) = m+1$

3. Niech $U_0 \subset U$ będzie takim otoczeniem punktu x_0, że f jest $m-$krotnie różniczkowalna w każdym punkcie zbioru U_0.

4.

$$\begin{aligned} f^{(m+1)}(x_0)(h_{\sigma(1)}, \dots, h_{\sigma(m)}) &= f^m\Big|_{U_0}'(x_0)(h_{\sigma(m+1)})(h_{\sigma(1)}, \dots, h_{\sigma(m)}) = \\ &= f^m\Big|_{U_0}'(x_0)(h_{m+1})(h_{\sigma(1)}, \dots, h_{\sigma(m)}) \end{aligned}$$

5. $\mathcal{L}, \mathcal{L}_\sigma\colon L^m(X,Y) \to Y$
$\mathcal{L}(\Lambda) = \Lambda(h_1, \dots, h_m) \qquad \mathcal{L}_\sigma(\Lambda) = \Lambda(h_{\sigma(1)}, \dots, h_{\sigma(m)})$

6. Odwzorowanie $\mathcal{L}$ i $\mathcal{L}_\sigma$ są liniowe i ciągłe

$$||\mathcal{L}(\Lambda)|| = ||\Lambda(h_1, \dots, h_m)|| \leqslant ||\Lambda|| \cdot \prod_{j=1}^{m} ||h_j||$$

7.

$$\begin{aligned} f^{(m+1)}(x_0)(h_{\sigma(1)}, \dots, h_{\sigma(m+1)}) &= \mathcal{L}_\sigma\left(f^{(m)}\Big|_{U_0}'(x_0)(h_{m+1})\right) = \\ &= \left(\mathcal{L}_\sigma \circ f^{(m)}\Big|_{U_0}\right)'(x_0)(h_{m+1}) = \text{ z zał.ind.} \\ &= \left(\mathcal{L} \circ f^{(m)}\Big|_{U_0}\right)'(x_0)(h_{m+1}) = \\ &= \mathcal{L}\left(f^{(m)}\Big|_{U_0}'(x_0)(h_{m+1})\right) = \\ &= f^{(m+1)}(x_0)(h_1, \dots, h_{m+1}) \end{aligned}$$

2° $\sigma(m+1) \neq m+1$

Niech τ będzie taką permutacją zbioru $\{1, ..., m+1\}$, że $\tau(\sigma(m+1)) = \sigma(m+1)$ oraz $\tau(\sigma(m)) = m+1$ (są to dwie różne liczby).
$F(x) = f^{(m-1)}(x)$ dla x z pewnego otoczenia x_0. Jeżeli $h_1, ...h_m \in X$ to

$$\begin{aligned} f^{(m+1)}(x_0)(h_{\sigma(1)}, \dots, h_{\sigma(m+1)}) &= f^{(m+1)}(x_0)(h_{\tau(\sigma(1))}, \dots, h_{\tau(\sigma(m+1))}) = \\ &= F^{(2)}(x_0)(h_{\tau(\sigma(m))}, h_{\tau(\sigma(m+1))})(h_{\tau(\sigma(1))}, \dots, h_{\tau(\sigma(m-1))}) = \\ &= F^{(2)}(x_0)(h_{\tau(\sigma(m+1))}, \dots, h_{\tau(\sigma(m))})(h_{\tau(\sigma(1))}, \dots, h_{\tau(\sigma(m-1))}) = \\ &= f^{(m+1)}(x_0)(h_{\tau(\sigma(1))}, \dots, h_{\tau(\sigma(m-1))}, h_{\tau(\sigma(m+1))}, \dots, h_{\tau(\sigma(m))}) = \\ &= f^{(m+1)}(x_0)(h_1, \dots, h_{m+1}) \end{aligned}$$

□

Definicja 1.9.2. *Funkcję $f\colon U \to Y$ nazywamy*

- *m-**krotnie rózniczkowalną** wtedy i tylko wtedy, gdy jest ona m-krotnie różniczkowalna w każdym punkcie zbioru U.*

- ***klasy*** *C^m wtedy i tylko wtedy, gdy jest ona m-krotnie różniczkowalna i funkcja $f^{(m)}\colon U \to L^m(X,Y)$ jest ciągła.*
- ***klasy*** *C^∞ wtedy i tylko wtedy, gdy jest ona m-krotnie różniczkowalna dla każdego $m \in \mathbb{N}$.*
- ***klasy*** *C^0 wtedy i tylko wtedy, gdy jest ona ciągła.*

Wniosek 1.9.2. *Każda funkcja m-krotnie różniczkowalna jest klasy C^{m-1}.*

Wniosek 1.9.3. *Jeżeli funkcje $f, g\colon U \to Y$ są dwukrotnie różniczkowalne w punkcie $x_0 \in U$ [klasy $C^m (m \in \mathbb{N})$; klasy C^∞], to dla każdych α, β funkcja $\alpha f + \beta g$ jest dwukrotnie różniczkowalna w punkcie $x_0 \in U$ [klasy C^m; klasy C^∞] oraz*

$$(\alpha f + \beta g)^{(m)}(x_0) = \alpha f^{(m)}(x_0) + \beta g^{(m)}(x_0)$$

Wniosek 1.9.4. *Załóżmy, że $f\colon U \to Y$ jest funkcją m-krotnie różniczkowalną i określmy funkcję $F\colon U \to L^m(X,Y)$ wzorem*

$$F(x) = f^{(m)}(x)$$

Jeżeli $n \in \mathbb{N}$ to funkcja f jest $(m+n)$-krotnie różniczkowalna [klasy C^{m+n}] wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja F jest n-krotnie różniczkowalna [klasy C^n]. W szczególności f jest funkcją klasy C^∞ wtedy i tylko wtedy, gdy F jest klasy C^∞.

Wniosek 1.9.5. *Załóżmy, że $X, Y_1, \ldots, Y_N$ są przestrzeniami unormowanymi, a $U \subset X$ jest zbiorem otwartym. Jeżeli $f_1\colon U \to Y_1, \ldots, f_N\colon U \to Y_N$, a $f\colon U \to \bigtimes_{j=1}^{N} Y_j$ oraz*

$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_N(x)) \text{ dla } x \in U$$

to

i) funkcja f jest m-krotnie różniczkowalna w punkcie $x_0 \in U$ [klasy C^m dla $m \in \mathbb{N}$; klasy C^∞] wtedy i tylko wtedy, gdy każda z funkcji $f_1, \ldots, f_N$ jest różniczkowalna w punkcie $x_0 \in U$ [klasy C^m; klasy C^∞]

ii) jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie $x_0 \in U$, to

$$f^{(m)}(x_0)(h_1, \ldots, h_m) = (f_1^{(m)}(x_0)(h_1, \ldots, h_m), \ldots, f_N^{(m)}(x_0)(h_1, \ldots, h_m)) \text{ dla } h_1, \ldots, h_m \in X$$

Wniosek 1.9.6. *Załóżmy, że X, Y, Z są przestrzeniami unormowanymi, $U \subset X$ oraz $W \subset Y$ są zbiorami otwartymi. Jeżeli funkcje $f\colon U \to Y, g\colon W \to Z$ są funkcjami m-krotnie różniczkowalnymi [klasy C^m dla $m \in \mathbb{N}$; klasy C^∞] oraz $f(U) \subset W$, to funkcja $g \circ f$ jest $m-$krotnie różniczkowalna [klasy C^m; klasy C^∞].*

Lemat 1.9.2. *Każde ciągłe odwzorowanie dwuliniowe jest klasy C^∞.*

Dowód.

1. Niech X_1, X_2, Y będą przestrzeniami unormowanymi, a $\Lambda\colon X_1 \times X_2 \to Y$ będzie ciągłym odwzorowaniem dwuliniowym.

2. Λ jest funkcją rózniczkowalną oraz

$$\Lambda'(x_1,x_2)(h_1,h_2) = \Lambda(x_1,h_2) + \Lambda(h_1,x_2) \text{ dla } x_1,h_1 \in X_1, x_2,h_2 \in X_2$$

3. Λ' jest odwzorowaniem liniowym.
Jeżeli $(x_1,x_2),(z_1,z_2) \in X_1 \times X_2$, a α jest skalarem to dla każdego $(h_1,h_2) \in X_1 \times X_2$

$$\begin{aligned}\Lambda'(\alpha(x_1,x_2)+(z_1,z_2))(h_1,h_2) &= \Lambda'(\alpha x_1+z_1,\alpha x_2+z_2)(h_1,h_2) = \\ &= \Lambda(\alpha x_1+z_1,h_2)+\Lambda(h_1,\alpha x_2+z_2) = \\ &= \alpha\Lambda(x_1,h_2)+\Lambda(z_1,h_2)+\alpha(h_1,x_2)+\Lambda(h_1,z_2) = \\ &= \alpha(\Lambda(x_1,h_2)+\Lambda(h_1,x_2))+(\Lambda(z_1,h_2)+\Lambda(h_1,z_2)) = \\ &= \alpha\Lambda'(x_1,x_2)(h_1,h_2)+\Lambda'(z_1,z_2)(h_1,h_2) = \\ &= (\alpha(\Lambda'(x_1,x_2)+\Lambda'(z_1,z_2))(h_1,h_2)\end{aligned}$$

4. $\Lambda' \colon X_1 \times X_2 \to L(X_1 \times X_2, Y)$ jest funkcją liniową.
Jeżeli $(x_1,x_2) \in X_1 \times X_2$ to

$$\begin{aligned}||\Lambda'(x_1,x_2)|| &= \sup\{||\Lambda'(x_1,x_2)(h_1,h_2)|| \colon ||(h_1,h_2)|| \leqslant 1\} = \\ &= \sup\{\underbrace{||\Lambda(x_1,h_2)+\Lambda(h_1,x_2)||}_{\leqslant||\Lambda(x_1,h_2)||+||\Lambda(h_1,x_2)||\leqslant||\Lambda||\cdot||x_1||\cdot||h_2||+||\Lambda||\cdot||h_1||\cdot||x_2||} \colon ||(h_1,h_2)|| \leqslant 1\} \leqslant \\ &\leqslant ||\Lambda||(||x_1||+||x_2||) \leqslant \sqrt{2}||\Lambda||\sqrt{||x_1||^2+||x_2||^2} = \sqrt{2}||\Lambda||\cdot||(x_1,x_2)||\end{aligned}$$

□

Dowód. [Wniosku]

1. Funkcja $g \circ f$ jest różniczkowalna.

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) \text{ dla } x \in U$$

2. $\Lambda \colon L(X,Y) \times L(Y,Z) \to L(X,Z)$ dana wzorem $\Lambda(A,B) = B \circ A$

3. Λ jest dwuliniowa

$$\Lambda(\alpha A_1 + A_2, B) = B \circ (\alpha A_1 + A_2) = \alpha B \circ A_1 + B \circ A_2 = \alpha\Lambda(A_1,B) + \Lambda(A_2,B)$$

$$\Lambda(A, \alpha B_1 + B_2) = (\alpha B_1 + B_2) \circ A = \alpha B_1 \circ A + B_2 \circ A = \alpha\Lambda(A,B_1) + \Lambda(A,B_2)$$

i ciągła

$$||\Lambda(A,B)|| = ||B \circ A|| \leqslant ||B|| \cdot ||A||$$

4. $(g \circ f)'(x) = \Lambda(f'(x), g'(f(x))) = \Lambda \circ (f', g' \circ f)(x)$ dla $x \in U$.

5. $(g \circ f)' = \Lambda \circ (f', g' \circ f)$

□

Twierdzenie 1.9.3. *Jeżeli X,Y są przestrzeniami Banacha i $Isom(X,Y) \neq \emptyset$, to funkcja $\Lambda \longmapsto \Lambda^{-1}$, $\Lambda \in Isom(X,Y)$ jest klasy C^∞.*

Dowód. [Tylko dla klasy C^1]

1. $\alpha\colon L(X,Y)\times L(Y,X)\to L(X,X)$ dana wzorem $\alpha(A,B)=B\circ A$

2. $F\colon L(X,Y)\times L(Y,X)\to L(X,X)$ dana wzorem $F(A,B)=\alpha(A,B)-id_X$

3. α jest dwuliniowe i ciągłe, a zatem jest klasy C^∞.

4. $F_{L(X,Y)}(A,B)=F(\bullet,B)'(A)=\alpha(\bullet,B)'(A)=\alpha(\bullet,B)$
   $F_{L(Y,X)}(A,B)=F(A,\bullet)'(B)=\alpha(A,\bullet)'(B)=\alpha(A,\bullet)$ dla $A\in L(X,Y)$ i $B\in L(Y,X)$

5. Jeżeli $\Lambda\in Isom(X,Y)$, to
$$F(\Lambda,\Lambda^{-1})=\Lambda^{-1}\circ\Lambda-id_X=0$$

6. $\Phi\colon Isom(X,Y)\to L(Y,X)$ dane wzorem $\Phi(\Lambda)=\Lambda^{-1}$

7. $\underset{\Lambda\in Isom(X,Y)}{\forall}(F(\Lambda,\Phi(\Lambda))=0)$

8. Jeżeli $(A,B)\in Isom(X,Y)$, to
$$F'_{L(Y,X)}(A,B)\colon (Y,X)\xrightarrow[\text{na}]{1-1}L(X,X)$$

   a) $C\in L(X,X)$
$$C=F_{L(Y,X)}(A,B)(B_0)=\alpha(A,\bullet)(B_0)=\alpha(A,B_0)=B_0\circ A$$
   Zatem $B_0=C\circ A^{-1}$.

   b)
$$\underbrace{F_{L(Y,X)}(A,B)(C_1)}_{=\alpha(A,C_1)=C_1\circ A}=\underbrace{F_{L(Y,X)}(A,B)(C_2)}_{=\alpha(A,C_2)=C_2\circ A}$$
   Zatem $C_1=C_2$, bo A jest izomorfizmem.

9. Stosując twierdzenie 1.8.2 do funkcji $f\Big|_{Isom(X,Y)\times L(Y,X)}$ i Φ stwierdzamy, że Φ jest klasy C^1 oraz
$$\Phi'(\Lambda)=-F_{L(Y,X)}(\Lambda,\Phi(\Lambda))^{-1}\circ F'_{L(X,Y)}(\Lambda,\Phi(\Lambda))=-\alpha(\Lambda,\bullet)^{-1}\circ\alpha(\bullet,\Phi(\Lambda))\text{ dla }\Lambda\in Isom(X,Y)$$

Dowód dla C^∞ pomijamy. □

Wniosek 1.9.7. *Załóżmy, że X,Y,Z sa przestrzeniami Banacha, a $D\subset X\times Y$ jest zbiorem otwartym. Jeżeli $f\colon D\to Z$ jest funkcją klasy C^m $(m=\mathbb{N}\cup\{\infty\})$ oraz*
$$\underset{(x,y)\in D}{\forall}(f'_Y(x,y)\colon Y\xrightarrow[na]{1-1}Z)$$
a $U\subset X$ jest zbiorem otwartym , $\varphi\colon U\to Y$ jest funkcją ciągłą oraz
$$\underset{x\in U}{\forall}((x,\varphi(x))\in D\wedge f(x,\varphi(x))=0)$$
to φ jest funkcją klasy C^m oraz
$$\varphi'(x)=-f'_Y(x,\varphi(x))^{-1}\circ f'_X(x,\varphi(x))\qquad(*)$$

Dowód.

1. Według twierdzenia 1.8.2 funkcja φ jest klasy C^1 oraz achodzi $(*)$.

2. Stosując twierdzenie 1.9.3 stwierdzamy, że φ jest klasy C^m.

□

Wniosek 1.9.8. *Jeżeli $f\colon U \to Y$ jest dyfeomorfizmem, a $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ to f jest klasy C^m wtedy i tylko wtedy, gdy f^{-1} jest klasy C^m*

Dowód.

1. Załóżmy, że f jest klasy C^{m+1} oraz (założenie indukcyjne), że f^{-1} jest klasy C^m.

2. $$(f^{-1})'(y) = f'(f^{-1}(y))^{-1} \text{ dla } y \in f(U)$$

3. Stosując twierdzenie 1.9.3 stwierdzamy, że $(f^{-1})'$ jest funkcją klasy C^m, a zatem f^{-1} jest klasy C^{m+1}.

□

1.10 Pochodne kierunkowe wyższych rzędów

1.11 Wzór Taylora

Ustalmy przestrzenie unormowane X, Y, zbiór otwarty $U \subset X$ i liczbę naturalną $n \geqslant 2$.

Twierdzenie 1.11.1. *Załóżmy, że funkcja $f\colon U \to \mathbb{R}$ jest $(n-1)$-krotnie różniczkowalna.*
Jeżeli $x_0 \in U, h \in X, x_0 + h \in U$, a funkcja f jest n-krotnie różniczkowalna (*) w każdym punkcie postaci $x_0 + \lambda h$ dla $\lambda \in [0,1]$ to istnieje takie $\xi \in (0,1)$, że

$$f(x_0+h) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(x_0)(h,\ldots,h)}{j!} + \frac{f^{(n)}(x_0+\xi h)(h,\ldots,h)}{n!}$$

(*) wystarczy założyć, że funkcja f jest n-krotnie różniczkowalna w każdym punkcie postaci $x_0 + \lambda h$ dla $\lambda \in (0,1)$ i funkcja $f^{(n-1)}$ jest funkcją ciągłą w punktach $\{x_0, x_0+h\}$.

Dowód. [Szkic]
Stosujemy wzór Taylora do funkcji $g\colon (-\delta, 1+\delta) \to \mathbb{R}$ określonej wzorem $g(t) = f(x_0 + th)$, gdzie δ jest taką liczbą rzeczywistą i dodatnią, że

$$\underset{t \in (-\delta, 1+\delta)}{\forall} (x_0 + th \in U)$$

oraz

$$g^{(j)}(t) = f^{(j)}(x_0+th)(h,\ldots,h)$$

□

Twierdzenie 1.11.2. *Załóżmy, że funkcja $f\colon U \to Y$ jest $(n-1)$-krotnie różniczkowalna. Jeżeli $x_0 \in U, h \in X$ i funkcja f jest n-krotnie różniczkowalna w każdym punkcie postaci $x_0 + \lambda h$ dla $\lambda \in [0,1]$ to istnieje takie $\xi \in (0,1)$, że*

$$\left|\left| f(x_0+h) - \left(f(x_0) + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{f^{(j)}(x_0)(h,\dots,h)}{j!} \right) \right|\right| \leqslant \frac{1}{n!}||h||^n||f^{(n)}(x_0+\xi h)||$$

W przypadku $n=1$ jest to twierdzenie o przyrostach.

Dowód.

1. Możemy założyć, że X i Y są przestrzeniami rzeczywistymi oraz
$$R := f(x_0+h) - \left(f(x_0) + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{f^{(j)}(x_0)(h,\dots,h)}{j!} \right) \neq 0$$
2. Z wniosku z twierdzenia Hahna-Banacha (twierdzenie o wydobywaniu normy) istnieje funkcjonał $y^* \in Y^*$, że $y^*R = ||R||$ oraz $||y^*|| = 1$.
3. $g := y^* \circ f$
4. g jest funkcją $(n-1)$-krotnie różniczkowalną oraz $g^{(j)}(x) = y^* \circ f^{(j)}(x)$ dla $j \in \{1,\dots,n\}$ oraz $x \in U$, a ponadto funkcja g jest n-krotnie różniczkowalna w każdym punkcie postaci $x_0 + \lambda h$ dla $\lambda \in [0,1]$ oraz $g^{(n)}(x_0+\lambda h) = y^* \circ f^{(n)}(x_0+\lambda h)$ dla $\lambda \in [0,1]$
5. Funkcja g spełnia założenia twierdzenia 1.11.1, zatem na mocy tego twierdzenia istnieje takie $\xi \in (0,1)$, że
$$g(x_0+h) = g(x_0) + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{g^{(j)}(x_0)(h,\dots,h)}{j!} + \frac{1}{n!}g^{(n)}(x_0+\xi h)(h,\dots,h)$$
6.
$$\begin{aligned} ||R|| = |y^*R| &= \left| g(x_0+h) - \left(g(x_0) + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{g^{(j)}(x_0)(h,\dots,h)}{j!} \right) \right| = \\ &= \left| \frac{1}{n!} g^{(n)}(x_0+\xi h)(h,\dots,h) \right| = \\ &= \left| \frac{1}{n!} y^* f^{(n)}(x_0+\xi h)(h,\dots,h) \right| \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{n!}||y^*|| \cdot ||f^{(n)}(x_0+\xi h)|| \cdot ||h||^n = \\ &= \frac{1}{n!}||f^{(n)}(x_0+\xi h)|| \cdot ||h||^n \end{aligned}$$

□

Twierdzenie 1.11.3. *Jeżeli funkcja $f\colon U \to Y$ jest n-krotnie różniczkowalna w punkcie $x_0 \in U$, to*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - \left(f(x_0) + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j!} f^{(j)}(x_0)(h,\dots,h) \right)}{||h||^n} = 0 \quad (P)$$

Dla $n=1$ jest to definicja pochodnej.

Lemat 1.11.1. *Jeżeli funkcja* $\Lambda\colon X^n \to Y$ *jest* n*-addytywna **) i symetryczna ***), to*

(1) $\Lambda(x+z,\dots,x+z) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \Lambda(\underbrace{x,\dots,x}_{j}, \underbrace{z,\dots,z}_{n-j})$ *dla* $x, z \in X$

**) $\Lambda(x,\dots,x_{j-1},x+z,x_{j+1},\dots,x_n) = \Lambda(x_1,\dots,x_{j-1},x,x_{j+1},\dots,x_n) + \Lambda(x_1,\dots,x_{j-1},z,x_{j+1},\dots,x_n)$ *dla każdego* $j \in \{1,\dots,n\}$ *i dla każdych* $x_1,\dots,x_{j-1},x,z,x_{j+1},\dots,x_n \in X$

***) $\Lambda(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)}) = \Lambda(x_1,\dots,x_n)$ *dla każdej permutacji* σ *zbioru* $\{1,\dots,n\}$ *i dla każdych* $x_1,\dots,x_n \in X$

Oznaczenie 1.11.1. $(h,\dots,h) = h^n$

Dowód. [Indukcyjny]

1. Ustalmy $n \in \mathbb{N}$ i załóżmy (założenie indukcyjne), że (1) zachodzi dla każdej n-addytywnej i symetrycznej funkcji $\Lambda\colon X^n \to Y$
2. Załóżmy, że $\Lambda\colon X^{n+1} \to Y$ jest funkcją $(n+1)$-addytywną i symetryczną
3. Jeżeli $x, z \in X$

$$\begin{aligned}
\Lambda(\underbrace{x+z,\dots,x+z}_{n+1}) &= \Lambda(\underbrace{x+z,\dots,x+z}_{n},x) + \Lambda(\underbrace{x+z,\dots,x+z}_{n},z) \overset{\text{zał.}}{=} \\
&\overset{\text{zał.}}{=} \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\Lambda(\underbrace{x,\dots,x}_{j},\underbrace{z,\dots,z}_{n-j},x) + \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\Lambda(\underbrace{x,\dots,x}_{j},\underbrace{z,\dots,z}_{n-j},z) = \\
&= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\Lambda(\underbrace{x,\dots,x}_{j+1},\underbrace{z,\dots,z}_{n-j}) + \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\Lambda(\underbrace{x,\dots,x}_{j},\underbrace{z,\dots,z}_{n-j+1}) = \\
&= \Lambda(x,\dots,x) + \sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j-1}\Lambda(\underbrace{x,\dots,x}_{j},\underbrace{z,\dots,z}_{n-j+1}) + \\
&+ \sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}\Lambda(\underbrace{x,\dots,x}_{j},\underbrace{z,\dots,z}_{n-j+1}) + \Lambda(z,\dots,z) = \\
&= \Lambda(x,\dots,x) + \sum_{j=1}^{n}\left(\binom{n}{j-1}+\binom{n}{j}\right)\Lambda(\underbrace{x,\dots,x}_{j},\underbrace{z,\dots,z}_{n-j+1}) + \Lambda(z,\dots,z) = \\
&= \Lambda(x,\dots,x) + \sum_{j=1}^{n}\binom{n+1}{j}\Lambda(\underbrace{x,\dots,x}_{j},\underbrace{z,\dots,z}_{n-j+1}) + \Lambda(z,\dots,z) = \\
&= \sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}\Lambda(\underbrace{x,\dots,x}_{j},\underbrace{z,\dots,z}_{n-j+1})
\end{aligned}$$

□

Lemat 1.11.2. *Jeżeli funkcja* $\Lambda\colon X^n \to Y$ *jest* n*-liniowa, ciągła i symetryczna to funkcja* $p\colon X \to Y$ *określona wzorem*

$$p(h) = \Lambda(h,\dots,h)$$

jest różniczkowalna oraz

$$p'(h)z = h\Lambda(h, \dots, h, z) \text{ dla } h, z \in X$$

Dowód.
Jeżeli $h, z \in X$ dla $n \geqslant 2$, to

$$\begin{aligned} p(h+z) - p(h) - h\Lambda(h, \dots, h, z) &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \Lambda(\underbrace{h, \dots, h}_{j}, \underbrace{z, \dots, z}_{n-j}) - \Lambda(h, \dots, h) - h\Lambda(h, \dots, h, z) = \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} \Lambda(\underbrace{h, \dots, h}_{j}, \underbrace{z, \dots, z}_{n-j}) - h\Lambda(h, \dots, h, z) = \\ &= \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n}{j} \Lambda(\underbrace{h, \dots, h}_{j}, \underbrace{z, \dots, z}_{n-j}) \end{aligned}$$

Zatem

$$\lim_{z \to 0} \frac{p(h+z) - p(h) - h\Lambda(h, \dots, h, z)}{||z||} = \lim_{z \to 0} \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n}{j} \frac{\Lambda(\overbrace{h, \dots, h}^{j}, \overbrace{z, \dots, z}^{n-j})}{||z||} = 0$$

bo

$$||\Lambda(h, \dots, h, z, \dots, z)|| \leqslant ||\Lambda|| \cdot ||h||^j \cdot ||z||^{n-j}$$

gdzie oczywiście $j \leqslant n-2$ czyli $n - j \geqslant 2$. □

Dowód. [Tw. 1.11.3]
Dla $n = 1$ jest to pochodna.

1. Ustalmy liczbę naturalną $n \in \mathbb{N}$ i załóżmy (założenie indukcyjne), że (P) zachodzi dla każdej n-krotnie różniczkowalnej w punkcie $x_0 \in U$ funkcji $f\colon U \to Y$

2. Niech $f\colon U \to Y$ będzie funkcją $(n+1)$-krotnie różniczkowalną w punkcie $x_0 \in U$ oraz $F := f'$. Określmy funkcję $g\colon U - x_0 \to Y$ wzorem

$$g(h) = f(x_0 + h) - \left(f(x_0) + \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{j!} f^{(j)}(x_0)(h, \dots, h) \right)$$

3. Mamy wykazać, że $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g^{(n)}}{||h||^{n+1}} = 0$

4. Dla każdego $j \in \{1, \dots, n+1\}$ określmy funkcję

$$p_j(h) = f^{(j)}(x_0)(h, \dots, h)$$

5. Według lematu 1.11.2 dla każdego $j \in \{1, \dots, n+1\}$ funkcja p_j jest różniczkowalna oraz

$$p_j(h)z = jf^{(j)}(x_0)(h, \dots, h, z)$$

6.

$$g(h) = f(x_0 + h) - \left(f(x_0) + \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{j!} p_j(h) \right)$$

7. Funkcja g jest różniczkowalna (w pewnym otoczeniu zera) oraz

$$g'(h) = f'(x_0 + h) - \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{j!} p_j(h)$$

8. Jeżeli $h, z \in X$ to

$$p'_j(h)z = jf^{(j)}(x_0)(h, \dots, h, z) = jf^{(j)}(x_0)(z, h, \dots, h) = jF^{(j-1)}(x_0)(h, \dots, h)(z)$$

a zatem $p'_j(h) = jF^{(j-1)}(x_0)(h, \dots, h)$ dla $h \in X$ oraz $j \in \{1, \dots, n+1\}$

9. $$g'(h) = F(x_0 + h) - \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{j!} jF^{(j-1)}(x_0)(h, \dots, h) = F(x_0 + h) - \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} jF^{(j)}(x_0)(h, \dots, h)$$

dla h z pewnego otoczenia zera.

10. Na mocy założenie indukcyjnego (zastosowanego do funkcji F) mamy

$$\lim_{h \to 0} \frac{g'(h)}{||h||^n} = 0$$

11. Według twierdzenia $K11$

$$||g(h)|| = ||g(h) - g(0)|| \overset{(*)}{\leqslant} ||g'(\xi h)|| \cdot ||h|| \text{ dla} \xi \in (0, 1)$$

$(*)$ $r \in (0, \infty)$: $K(x_0, r) \subset U_0$, gdzie U_0 jest takim otoczeniem punktu x_0, że f jest różniczkowalna w każdym punkcie zbioru U_0. Powyższa nierówność zachodzi dla $h \in K(0, r)$

12. $$\frac{||g(h)||}{||h||^{n+1}||} \leqslant \frac{||g'(\xi h)|| \cdot ||h||}{||h||^{n+1}} = \underbrace{\underbrace{\frac{||g'(\xi h)||}{||\xi h||^n}}_{\xrightarrow{n \to \infty} 0} \cdot \underbrace{\frac{||\xi h||^n}{||h||^n}}_{\text{ogr.}}}_{\to 0}$$

□

Wniosek 1.11.1. *Jeżeli funkcja $f \colon U \to Y$ jest n-krotnie różniczkowalna w punkcie $x_0 \in U$, $n \geqslant 2$ oraz*

$$\underset{j \in \{1, \dots, n-1\}}{\forall} (f^{(j)}(x_0) = 0)$$

to

$$\frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(h, \dots, h) = \lim_{\alpha \to 0^+} \frac{f(x_0 + \alpha h) - f(x_0)}{\alpha^n}$$

Dowód.

1. $$0 = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(h, \dots, h)}{||h||^n}$$

2.
$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{\alpha\to 0^+} \frac{f(x_0+\alpha h) - f(x_0) - \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(\alpha h,\dots,\alpha h)}{||\alpha h||^n} = \\ &= \lim_{\alpha\to 0^+} \frac{f(x_0+\alpha h) - f(x_0) - \frac{\alpha^n}{n!}f^{(n)}(x_0)(h,\dots,h)}{\alpha^n||h||^n} = \\ &= \lim_{\alpha\to 0^+} \frac{f(x_0+\alpha h) - f(x_0)}{\alpha^n||h||^n} - \frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{||h||^n}f^{(n)}(x_0)(h,\dots,h) \end{aligned}$$

3.
$$\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{||h||^n}f^{(n)}(x_0)(h,\dots,h) = \lim_{\alpha\to 0^+}\frac{f(x_0+\alpha h)-f(x_0)}{\alpha^n||h||^n}$$

A zatem
$$\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(h,\dots,h) = \lim_{\alpha\to 0^+}\frac{f(x_0+\alpha h)-f(x_0)}{\alpha^n}$$

□

1.12 Ekstrema lokalne

Ustalmy rzeczywistą przestrzeń unormowaną X i zbiór otwarty $U \subset X$

Twierdzenie 1.12.1. *Jeżeli funkcja $f\colon U \to \mathbb{R}$ ma w punkcie $x_0 \in U$ ekstremum lokalne i pochodną kierunkową w kierunku wektora $a \in X$, to $\nabla_a f(x_0) = 0$.*

Dowód.

1. $r \in (0,\infty)\colon K(x_0,r) \subset U\colon \underset{x\in K(x_0,r)}{\forall} (f(x) \leqslant f(x_0)) \vee \underset{x\in K(x_0,r)}{\forall} (f(x) \geqslant f(x_0))$
2. $\delta := \frac{r}{||a||}$, oczywiście zakładamy, że $a \neq 0$.
3. $\varphi\colon (-\delta,\delta) \to \mathbb{R}$ dana wzorem $\varphi(t) = f(x_0+ta) \in K(x_0,r)$
   $||ta|| = |t|\cdot||a|| \leqslant \delta||a|| = r$
4. $\underset{t\in(-\delta,\delta)}{\forall} (\varphi(t) \leqslant \varphi(0)) \vee \underset{t\in(-\delta,\delta)}{\forall} (\varphi(t) \geqslant \varphi(0))$
5. $\varphi'(0) \xleftarrow{t\to 0} \frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t} \leqslant \frac{f(x_0+ta)-f(x_0)}{t} \xrightarrow{t\to 0} \nabla_a f(x_0)$
6. Funkcja φ jest różniczkowalna w 0 i $\varphi(0) = \nabla_a f(x_0)$
7. $\varphi(0) = 0$ (na mocy punktu 4, funkcja φ ma w 0 ekstremum.)

□

Wniosek 1.12.1. *Jeżeli funkcja $f\colon U \to \mathbb{R}$ ma w punkcie $x_0 \in U$ ekstremum lokalne i jest w tym punkcie różniczkowalna, to $f'(x_0) = 0$.*

Twierdzenie 1.12.2. *Załóżmy, że funkcja $f\colon U \to \mathbb{R}$ jest n-krotnie różniczkowalna w punkcie $x_0 \in U$, $n \geqslant 2$ oraz*
$$\underset{j\in\{1,\dots,n-1\}}{\forall} (f^{(j)}(x_0) = 0)$$

i) Jeżeli funkcja f ma w punkcie x_0 maksimum lokalne to

$$\underset{h\in X}{\forall}\ (f^{(n)}(x_0)(h,\ldots,h)\leqslant 0)$$

ii) Jeżeli funkcja f ma w punkcie x_0 minimum lokalne to

$$\underset{h\in X}{\forall}\ (f^{(n)}(x_0)(h,\ldots,h)\geqslant 0)$$

iii) Jeżeli

$$\underset{c\in[0,\infty)}{\exists}\ \underset{h\in X}{\forall}\ (f^{(n)}(x_0)(h,\ldots,h)\leqslant -c||h||^n)$$

to funkcja f ma w punkcie x_0 właściwe maksimum lokalne.

iv) Jeżeli

$$\underset{c\in[0,\infty)}{\exists}\ \underset{h\in X}{\forall}\ (f^{(n)}(x_0)(h,\ldots,h)\geqslant c||h||^n)$$

to funkcja f ma w punkcie x_0 właściwe minimum lokalne.

Dowód.

i) 1. $r\in(0,\infty)\colon K(x_0,r)\subset U\colon \underset{x\in K(x_0,r)}{\forall}\ (f(x)\leqslant f(x_0))$

2. Ustalmy $h\in X$, według wniosku 1.11.1 mamy

$$\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(h,\ldots,h)=\lim_{\alpha\to 0^+}\frac{f(x_0+\alpha h)-f(x_0)}{\alpha^n}\leqslant 0$$

ii) Analogicznie

iii) 1. $c\in(0,\infty)\colon \underset{h\in X}{\forall}\ (f^{(n)}(x_0)(h,\ldots,h)\leqslant -c||h||^n)$

2. Na mocy twierdzenia 1.11.3 mamy

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-(f(x_0)+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(h,\ldots,h))}{||h||^n}=0$$

3. $r\in(0,\infty)\colon \underset{h\in X}{\forall}\left(0<||h||<r\Rightarrow\left\|\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(h,\ldots,h)}{||h||^n}\right\|\leqslant\frac{c}{2n!}\right)$

4. Jeżeli $h\in K(0,r)$, to

$$|f(x_0+h)-f(x_0)-\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(h,\ldots,h)|\leqslant\frac{c}{2n!}||h||^n$$

skąd

$$f(x_0+h)-f(x_0)-\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(h,\ldots,h)\leqslant\frac{c}{2n!}||h||^n$$

i dalej

$$f(x_0+h)-f(x_0)\leqslant\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(h,\ldots,h)+\frac{c}{2n!}||h||^n\leqslant-\frac{1}{n!}c||h||^n+\frac{c}{2n!}||h||^n=-\frac{c}{2n!}||h||^n<0 \text{ dla } h\neq 0$$

iv) Analogicznie

□

Uwaga 1.12.1. *Załóżmy, że $\Lambda\colon X^n \to \mathbb{R}$ jest odwzorowaniem n-liniowym (n - liczba nieparzysta) i symetrycznym. Jeżeli Λ jest odwzorowaniem niezerowym, to*

$$\underset{h\in X}{\exists}\ (\Lambda(h,\ldots,h) < 0) \wedge \underset{h\in X}{\exists}\ (\Lambda(h,\ldots,h) > 0)$$

Dowód.

$$\Lambda(-h,\ldots,-h) = (-1)^n\Lambda(h,\ldots,h) \text{ dla } h \in X$$

a zatem wystarczy pokazać, że

$$\underset{h\in X}{\exists}\ (\Lambda(h,\ldots,h) \neq 0)$$

To zaś wynika z następującego lematu. □

Lemat 1.12.1. *Załóżmy, że X i Y są rzeczywistymi przestrzeniami liniowymi, a $\Lambda\colon X^n \to Y$ jest odwzorowaniem n-liniowym i symetrycznym. Jeżeli*

$$(1) \qquad \underset{h\in X}{\forall}\ (\Lambda(h,\ldots,h) = 0)$$

to $\Lambda = 0$.

Dowód. (indukcyjny)

1. Ustalmy $n \in \mathbb{N}$ i załóżmy (założenie indukcyjne), że każde odwzorowanie n-liniowe i symetryczne $\Lambda\colon X^n \to Y$ spełniające warunek (1) jest zerowe.

2. Niech $\Lambda\colon X^{n+1} \to Y$ będzie odwzorowaniem $(n+1)$-liniowym, symetrycznym i spełniającym warunek (1).

3. $h_0 \in X$

4. $\Lambda_0\colon X^n \to Y$ dane wzorem $\Lambda_0(h_1,\ldots,h_n) = \Lambda(h_1,\ldots,h_n,h_0)$

5. Λ_0 jest odwzorowaniem n-liniowym i symetrycznym.

6. Jeżeli $h \in X$, a $t \in \mathbb{R}$, to na mocy lematu 1.11.1
$$0 = \Lambda(th+h_0,\ldots,th+h_0) = \sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}\Lambda(\underbrace{th,\ldots,th}_{j},\underbrace{h_0,\ldots,h_0}_{n+1-j}) = \sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}\Lambda(\underbrace{h,\ldots,h}_{j},\underbrace{h_0,\ldots,h_0}_{n+1-j})t^j$$

7. $\Lambda(\underbrace{h,\ldots,h}_{j},\underbrace{h_0,\ldots,h_0}) = 0$ dla $j \in \{1,\ldots,n+1\}$

8. $\underbrace{\Lambda(h,\ldots,h,h_0)}_{\Lambda_0(h,\ldots,h)} = 0$ dla $h \in X$

9. Z założenie indukcyjnego $\Lambda_0 = 0$
$$\underset{h_1,\ldots,h_n}{\forall}\ (\underbrace{\Lambda_0(h_1,\ldots,h_n)}_{\Lambda(h_1,\ldots,h_n,h_0)} = 0)$$

10. $\Lambda = 0$

$\square$

Uwaga 1.12.2. *Jeżeli $\Lambda\colon (\mathbb{R}^N)^n \to \mathbb{R}$ jest odwzorowaniem n-liniowym, to*

$$\underset{c\in(0,\infty)}{\exists} \ \underset{h\in\mathbb{R}^N}{\forall} \ (\Lambda(h,\dots,h) \leqslant -c||h||^n) \Leftrightarrow \underset{h\in\mathbb{R}^N\setminus\{0\}}{\forall} \ (\Lambda(h,\dots,h) < 0)$$

oraz

$$\underset{c\in(0,\infty)}{\exists} \ \underset{h\in\mathbb{R}^N}{\forall} \ (\Lambda(h,\dots,h) \geqslant c||h||^n) \Leftrightarrow \underset{h\in\mathbb{R}^N\setminus\{0\}}{\forall} \ (\Lambda(h,\dots,h) > 0)$$

Dowód.

1. Załóżmy, że $\Lambda(h,\dots,h) >)$ dla $h \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$
2. $c := \inf\{\Lambda(h,\dots,h)\colon h \in \mathbb{R}^N,\ ||h|| = 1\}$ (kres jest osiągnięty na mocy twierdzenia Weierstrassa)
3. Jeżeli $h \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, to
$$\Lambda\left(\frac{h}{||h||},\dots,\frac{h}{||h||}\right) \geqslant c$$
a zatem
$$\frac{1}{||h||^n}\Lambda(h,\dots,h) \geqslant c$$
4. Stąd $\Lambda(h,\dots,h) \geqslant c||h||^n$ dla $h \in \mathbb{R}^N$.

$\square$

Wniosek 1.12.2. *Załóżmy, że $U \subset \mathbb{R}^N$ jest zbiorem otwartym, a $f\colon U \to \mathbb{R}$ jest funkcją dwukrotnie różniczkowalną w punkcie $x_0 \in U$ oraz $f_{|j}(x_0) = 0$ dla $j \in \{1,\dots,N\}$. Niech*

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} f_{|11}(x_0) & \dots & f_{|1j}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{|j1}(x_0) & \dots & f_{|jj}(x_0) \end{vmatrix}$$

i) Jeżeli funkcja f ma w punkcie x_0 maksimum lokalne, to

$$\underset{j\in\{1,\dots,N\}}{\forall} \ ((-1)^j\Delta_j \geqslant 0)$$

ii) Jeżeli funkcja f ma w punkcie x_0 minimum lokalne, to

$$\underset{j\in\{1,\dots,N\}}{\forall} \ (\Delta_j \geqslant 0)$$

iii) Jeżeli

$$\underset{j\in\{1,\dots,N\}}{\forall} \ ((-1)^j\Delta_j > 0)$$

to funkcja f ma w punkcie x_0 właściwe maksimum lokalne.

iv) Jeżeli

$$\underset{j\in\{1,\ldots,N\}}{\forall} (\Delta_j > 0)$$

to funkcja f ma w punkcie x_0 właściwe minimum lokalne.

Dowód.
Ponieważ

$$f'(x_0)(h_1,\ldots,h_N) = \sum_{j=1}^{N} f_{|j}(x_0)h_j \text{ dla } (h_1,\ldots,h_N) \in \mathbb{R}^N$$

oraz

$$f^{(2)}(x_0)(h,h) = \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} f_{|jk}(x_0)h_jh_k \text{ dla } (h_1,\ldots,h_N) \in \mathbb{R}^N$$

a ponadto

$$f_{|jk}(x_0) = f_{|kj}(x_0) \text{ dla } j,k \in \{1,\ldots,N\}$$

Wystarczy więc zastosować twierdzenie 1.12.2, uwagę 1.12.2 oraz twierdzenie Sylvestera z algebry. □

Wniosek 1.12.3. *Załóżmy, że $U \subset \mathbb{R}^2$ jest zbiorem otwartym, a $f\colon U \to \mathbb{R}$ jest funkcją dwukrotnie różniczkowalną w punkcie $x_0 \in U$ oraz $f_{|1}(x_0) = 0, f_{|2}(x_0) = 0$*

i) Jeżeli

$$\begin{vmatrix} f_{|11}(x_0) & f_{|12}(x_0) \\ f_{|21}(x_0) & f_{|22}(x_0) \end{vmatrix} > 0$$

to funkcja f ma w punkcie x_0 właściwe ekstremum lokalne; maksimum lokalne właściwe, gdy $f_{|11}(x_0) < 0$ i minimum lokalne właściwe, gdy $f_{|11}(x_0) > 0$

ii) Jeżeli

$$\begin{vmatrix} f_{|11}(x_0) & f_{|12}(x_0) \\ f_{|21}(x_0) & f_{|22}(x_0) \end{vmatrix} < 0$$

to funkcja f w punkcie x_0 ekstremum lokalnego nie ma.

1.13 Ekstrema związane

Ustalmy przestrzenie Banacha X oraz Y, zbiór otwarty $U \subset X$, takie funkcje $G\colon U \to Y$ klasy C^1 oraz punkt $x_0 \in U$ i załóżmy, że $G(x_0) = 0$ i $G'(x_0)(X) = Y$, a ponadto załóżmy istnienie takiej domkniętej przestrzeni liniowej X_2, że

$$X = X_1 \oplus X_2$$

gdzie

$$X_1 := G'(x_0)^{-1}(\{0\})$$

Przyjmijmy też oznaczenia

$$M = G^{-1}(\{0\})$$

i następującą definicję

Definicja 1.13.1. *Mówimy, że funkcja $f\colon U \to \mathbb{R}$ ma w punkcie x_0 maksimum lokalne związane (zbiorem M) [minimum lokalne związane (zbiorem M)] wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie otoczenie $U_0 \subset U$ punktu x_0, że $f(x) \leqslant f(x_0)$ dla każdego $x \in U_0 \cap M$ [$f(x_0) \leqslant f(x)$ dla każdego $x_0 \in U_0 \cap M$]. Mówimy, że funkcja ma w punkcie x_0 ekstremum lokalne związane (zbiorem M) wtedy i tylko wtedy, gdy ma ona w punkcie x_0 maksimum lokalne związane (zbiorem M) lub minimum lokalne związane (zbiorem M).*

Twierdzenie 1.13.1. *Jeżeli funkcja $f\colon U \to \mathbb{R}$ jest w punkcie x_0 różniczkowalna i ma w tym punkcie ekstremum lokalne związane to $f'(x_0)\big|_{X_1} = 0$.*

Dowód.
Pomijamy (do przeprowadzenia tego dowodu potrzebowalibyśmy twierdzenia zwanego Pierwszym Twierdzeniem Lusternika.) □

Definicja 1.13.2. *Jeżeli funkcja $f\colon U \to \mathbb{R}$ jest w punkcie x_0 różniczkowalna, to funkcjonał $\Lambda\colon Y \to \mathbb{R}$ dany wzorem*

$$(1) \qquad \Lambda = f'(x_0) \circ G'(x_0)\Big|_{X_2}^{-1}$$

nazywamy ***funkcjonałem Lagrange'a****.*

Uzasadnienie, że $\Lambda \in Y^*$
Pokażemy, że $G'(x_0)\Big|_{X_2} : X_2 \xrightarrow[1-1]{na} Y$

- *'na'*
  1. $y \in Y$
  2. $x \in X \quad y = G'(x_0)x$
  3. $x = x_1 + x_2$ *gdzie* $x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2$
  4. $y = G'(x_0)(x_1 + x_2) = \underbrace{G'(x_0)x_1}_{0} + G'(x_0)x_2 = G'(x_0)x_2$

- *'1-1'*
  Zastosujemy warunek równoważny różnowartościowości (zerowanie się odwzorowanie jedynie w zerze).
  1. *Niech* $G'(x_0)x_2 = 0 \quad x_2 \in X_2$
  2. $x_2 \in X_1$
  3. $x_2 = 0$

Więc na mocy twierdzenia Banacha o operatorze odwrotnym $G'(x_0)\Big|_{X_2}^{-1}$ jest ciągłe stąd $\Lambda \in Y^*$.

Twierdzenie 1.13.2. *[Drugie Twierdzenie Lusternika]*
Jeżeli funkcja $f\colon U \to \mathbb{R}$ jest w punkcie x_0 różniczkowalna i ma w tym punkcie ekstremum lokalne związane, a Λ oznacza funkcjonał Lagrange'a (1), to

$$(2) \qquad f'(x_0) = \Lambda \circ G'(x_0)$$

Dowód.

1. $x \in X$
2. $x = x_1 + x_2$ gdzie $x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2$
3.

$$\begin{aligned}
f'(x_0)(x) &= f'(x_0)(x_1 + x_2) = \\
&= \underbrace{f'(x_0)x_1}_{0 \text{ tw.1}} + f'(x_0)x_2 = \\
&= \underbrace{f'(x_0) \circ G'(x_0)\Big|_{X_2}^{-1}}_{\Lambda} \circ G'(x_0)\Big|_{X_2} x_2 = \\
&= \Lambda \circ G'(x_0)\Big|_{X_2} x_2 = \\
&= \Lambda \circ G'(x_0)x_2 = \\
&= \Lambda \circ (\underbrace{G'(x_0)x_1}_{0} + G'(x_0)x_2) = \\
&= \Lambda(G'(x_0)(x_1 + x_2)) = \\
&= \Lambda \circ G'(x_0)x
\end{aligned}$$

$\square$

Uwaga 1.13.1. *Funkcjonał $\Lambda\colon Y \to \mathbb{R}$ spełniający warunek (2) jest wyznaczony jednoznacznie.*

Dowód.

1. Niech $\Lambda_1, \Lambda_2\colon Y \to \mathbb{R}$ oraz $\Lambda_1 \circ G'(x_0) = f'(x_0) = \Lambda_2 \circ G'(x_0)$.
2. Weźmy dowolne $y \in Y$.
3. $y = G'(x_0)x$ dla $x \in X$
4. $\Lambda_1 y = \Lambda_1(G'(x_0)x) = \Lambda_2(G'(x_0)x) = \Lambda_2 y$

$\square$

Twierdzenie 1.13.3. *Załóżmy, że funkcja $f\colon U \to \mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna w punkcie $x_0 \in U$ i istnieje funkcjonał $\Lambda \in Y^*$ spełniający warunek (2), a funkcja G jest dwukrotnie różniczkowalna w punkcie x_0*

i) Jeżeli

$$\underset{c\in(0,\infty)}{\exists} \ \underset{x_1\in X_1}{\forall} \ ((f^{(2)}(x_0) - \Lambda \circ G^{(2)}(x_0))(x_1, x_1) \leqslant -c||x_1||^2)$$

to funkcja f ma w punkcie x_0 maksimum lokalne związane.

ii) Jeżeli

$$\underset{c\in(0,\infty)}{\exists} \ \underset{x_1\in X_1}{\forall} \ ((f^{(2)}(x_0) - \Lambda \circ G^{(2)}(x_0))(x_1, x_1) \geqslant c||x_1||^2)$$

to funkcja f ma w punkcie x_0 minimum lokalne związane.

Dowód.
Pomijamy $\square$

1.14 Odwzorowanie regularne i dyfeomorfizmy pomiędzy przestrzeniami kartezjańskimi

Ustalmy liczby naturalne M, N oraz zbiór otwarty $U \subset \mathbb{R}^N$ i załóżmy, że $N \leqslant M$.

Definicja 1.14.1. *Jeżeli funkcja $f\colon U \to \mathbb{R}^M$ ma w punkcie x_0 wszystkie pochodne cząstkowe to liczbę $|f'(x_0)|$ określoną wzorem*

$$|f'(x_0)| = \sqrt{\sum_{1\leqslant j_1<\dots<j_N\leqslant M} (Det[f_{j_k|l}(x_0)]_{N\times N})^2}$$

*nazywamy **modułem pochodnej** odwzorowania f w punkcie x_0, gdzie $f_1, \dots, f_M\colon U \to \mathbb{R}$ są takimi funkcjami, że $f(x) = (f_1(x), \dots, f_M(x))$ dla $x \in U$.*

Przykład 1.14.1.
$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$
$f(x) = (x, x^2, \sin x)$
$|f'(x)| = \sqrt{\sum_{j\in\{(1),(2),(3)\}} [f_j'(x)]^2} = \sqrt{1^2 + (2x)^2 + (\cos x)^2}$

Przykład 1.14.2.
$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$
$f(x, y) = (x + y, -x + \sin y, x^2 y)$
$|f'(x, y)| = \sqrt{\sum_{(j_1,j_2)\in\{(1,2),(1,3),(2,3)\}} (Det[f_{j_k|l}(x)]_{[2\times 2]})^2} = \sqrt{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \cos y \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2xy & x^2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -1 & \cos y \\ 2xy & x^2 \end{vmatrix}^2}$

Definicja 1.14.2. *Odwzorowanie $f\colon U \to \mathbb{R}^M$ nazywamy **regularnym** wtedy i tylko wtedy, gdy jest ono funkcją klasy C^1 oraz*

$$\underset{x\in U}{\forall} \ (|f'(x)| > 0)$$

*Odwzorowanie $f\colon U \to \mathbb{R}^M$ nazywamy **dyfeomorfizmem** wtedy i tylko wtedy, gdy jest ono różnowartościowym odwzorowaniem regularnym i funkcja odwrotna $f^{-1}\colon f(U) \to \mathbb{R}^N$ jest ciągła*

Uwaga 1.14.1. *Jeżeli $f\colon U \to \mathbb{R}^N$ to f jest odwzorowaniem regularnym [dyfeomorfizmem] w sensie definicji 1.14.2 wtedy i tylko wtedy, gdy jest odwzorowaniem regularnym [dyfeomorfizmem] w sensie definicji 1.7.1*

Twierdzenie 1.14.1. *Jeżeli funkcja $f\colon U \to \mathbb{R}^M$ jest różniczkowalna w punkcie $x_0 \in U$, to każde dwa z następujących zdań i) $-$ iii) są równoważne*

i) $|f'(x_0)| > 0$

ii) wektory $f_{|1}(x_0), \dots, f_{|N}(x_0)$ przestrzeni $\mathbb{R}^M$ są liniowo niezależne.

iii) $f'(x_0)\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ jest funkcją różnowartościową.

Dowód.

1.

$$\begin{aligned}|f'(x_0)| > 0 &\Leftrightarrow \underset{j_1<\dots<j_N}{\exists} \; Det[f_{j_k|l}(x_0)]_{N\times N} \neq 0 \\ &\Leftrightarrow rz[f_{j|l}(x_0)]_{M\times N} = N \\ &\Leftrightarrow \text{ kolumny } f_{|1}(x_0),\dots,f_{|N}(x_0) \text{ macierzy } [f_{j|l}(x_0)]_{M\times N} \text{ są liniowo zależne}\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}f'(x_0) \text{ jest funkcją róznowartościową } &\Leftrightarrow \underset{x\in\mathbb{R}^N}{\forall} \; (\underbrace{f'(x_0)x = 0}_{\sum_{l=1}^{N} f_{|l}(x_0)x_l = 0} \Rightarrow x = 0) \\ &\Leftrightarrow \underset{x_1,\dots,x_N\in\mathbb{R}^N}{\forall} \left(\sum_{l=1}^{N} f_{|l}(x_0)x_l = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\dots,x_N = 0\right) \\ &\Leftrightarrow \text{ wektory } f_{|1}(x_0),\dots,f_{|N}(x_0) \text{ są liniowo niezależne}\end{aligned}$$

□

Twierdzenie 1.14.2. *Jeżeli $f\colon U \to \mathbb{R}^M$ jest odwzorowaniem regularnym, to dla każdego punktu $x_0 \in U$ istnieje takie jego otoczenie $U_0 \subset U$, że $f\Big|_{U_0}$ jest dyfeomorfizmem.*

Dowód.

1. $x_0 \in U$
2. $1 \leqslant j_1 < \dots < j_N \leqslant M \qquad Det[f_{j_k|l}(x_0)]_{N\times N} \neq 0$
3. $W := \{x \in U\colon Det[f_{j_k|l}(x)]_{N\times N} \neq 0\}$ jest otoczeniem punktu x_0.
4. $g := (f_{j_1},\dots,f_{j_N})$
5. $g\Big|_W$ jest odwzorowaniem regularnym.
6. $U_0 \subset W$: otoczenie punktu x_0, $g\Big|_{U_0}$ jest dyfeomorfizmem.
7. Pokażemy, że $f\Big|_{U_0}$ jest funkcją różnowartościową i $f\Big|_{U_0}^{-1}$ jest funkcją ciągłą.
8. $h\colon f(U) \to \mathbb{R}^N$ dane wzorem $h(y_1,\dots,y_N) = (y_{j_1},\dots,y_{J_N})$.
9. $g = h \circ f$
10. Ponieważ $g\Big|_{U_0}$ jest funkcją różnowartościową, więc (zauważając, że $g\Big|_{U_0} = h \circ f\Big|_{U_0}$) funkcja $f\Big|_{U_0}$ jest różnowartościowa. Ponadto $f\Big|_{U_0}^{-1} = g\Big|_{U_0}^{-1} \circ h$, a zatem $f\Big|_{U_0}^{-1}$ tez jest funkcją ciągłą.

□

Twierdzenie 1.14.3. *Złożenie odwzorowań regularnych [dyfeomorfizmów] jest odwzorowaniem regularnym [dyfeomorfizmem].*

Dowód.
Dla regularnych: wystarczy skorzystać z twierdzenia 1.14.1 (zdania i) i iii) są równoważne), analogicznie dla dyfeomorfizmów.
Szkic: $(g \circ f)(x_0) = g'(f(x_0)) \circ f'(x_0)$ - złożenie funkcji różnowartościowych jest funkcją różnowartościową.
□

Twierdzenie 1.14.4. *Załóżmy, że zbiory $U, W \subset \mathbb{R}^N$ są otwarte. Jeżeli funkcja $f\colon U \to \mathbb{R}^N$ jest różniczkowalna w punkcie $x_0 \in U$ i $f(U) \subset W$, a funkcja $g\colon W \to \mathbb{R}^M$ jest różniczkowalna w punkcie $f(x_0)$, to*

$$|(g \circ f)'(x_0)| = |g'(f(x_0))| \cdot |f'(x_0)|$$

Dowód.

1. $h = g \circ f$
2. $h = (h_1, \ldots, h_M)$, gdzie $h_1, \ldots, h_M\colon U \to \mathbb{R}$.
   $h_j = g_j \circ f$ dla $j \in \{1, \ldots, M\}$
3. Jeżeli $1 \leqslant j_1 < \cdots < j_N \leqslant M$, to $[h_{j_k|l}(x_0)]_{N\times N} = [g_{j_k|n}(x_0)]_{N\times N} \cdot [f_{n|l}(x_0)]_{N\times N}$
   Stosujemy tutaj K18 oraz twierdzenie z algebry dotyczące macierzy.
4.

$$\begin{aligned}
|h'(x_0)| &= \sqrt{\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_N\leqslant M} (Det[h_{j_k|l}(x_0)]_{N\times N})^2} = \\
&= \sqrt{\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_N\leqslant M} (Det[g_{j_k|n}(x_0)]_{N\times N} \cdot \underbrace{Det[f_{n|l}(x_0)]_{N\times N})^2}_{|f'(x_0)|}} = \\
&= |f'(x_0)| \cdot \sqrt{\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_N\leqslant M} (Det[g_{j_k|n}(x_0)]_{N\times N})^2} = \\
&= |f'(x_0)| \cdot |g'(f(x_0))|
\end{aligned}$$

□

Twierdzenie 1.14.5. *Załóżmy, że funkcja $f\colon U \to \mathbb{R}^M$ jest dyfeomorfizmem klasy C^r dla pewnego $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Jeżeli $P \leqslant M$ i $W \subset \mathbb{R}^P$ jest zbiorem otwartym, a $g\colon W \to \mathbb{R}^M$ jest odwzorowaniem [regularnym, dyfeomorfizmem] klasy C^r oraz $g(W) \subset f(U)$ to $f^{-1} \circ g$ jest odwzorowaniem [regularnym, dyfeomorfizmem] klast C^r.*

Dowód.
Pomijamy □

1.15 Twierdzenie o rzędzie

Twierdzenie 1.15.1. *Załóżmy, że $U \subset \mathbb{R}^N$ jest zbiorem otwartym, a $f\colon U \to \mathbb{R}^M$ jest funkcją klasy C^p dla pewnego $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Jeżeli $*$), to*

$$rz[f_{m|n}(x)]_{M\times N} = r \text{ dla każdego } x \in U$$

$*$) $f_1, \dots, f_M \colon U \to \mathbb{R}$ oznaczają takie funkcje, że $f(x) = (f_1(x), \dots, f_N(x))$ dla $x \in U$, to dla każdego punktu $x_0 \in U$ istnieją zbiory otwarte $V \subset \mathbb{R}^N$, $W \subset \mathbb{R}^M$ i takie dyfeomorfizmy $v \colon V \to \mathbb{R}^N$, $w \colon W \to \mathbb{R}^M$ klasy C^p, a $x_0 \in v(V)$, $v(V) \subset U$, $f(v(V)) \subset W$

$$w \circ f \circ v(x) = (x_1, \dots, x_r, \underbrace{0, \dots, 0}_{M-r}) \text{ dla } x \in V$$

Dowód.
Pomijamy □

Rozdział 2

Teoria powierzchni

2.1 Powierzchnia gładka

Ustalmy liczby naturalne n, N oraz $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ i załóżmy, że $n \leqslant N$.

Definicja 2.1.1. *Niepusty zbiór $H \subset \mathbb{R}^N$ nazywamy n-wymiarową* ***powierzchnią gładką*** *(regularną) [klasy C^r] wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego punktu $y_0 \in H$ istnieją zbiory otwarte $U \subset \mathbb{R}^n$, $W \subset H$ i taki dyfeomorfizm $\Phi \colon U \to \mathbb{R}^N$, że $y_0 \in W = \Phi(U)$.*

Uwaga 2.1.1. *Wymiar powierzchnii gładkiej jest wyznaczony jednoznacznie.*

Dowód.
Pomijamy $\square$

Uwaga 2.1.2. *Niepusty zbiór $H \subset \mathbb{R}^N$ jest N-wymiarową powierzchnią gładką wtedy i tylko wtedy, gdy H jest podzbiorem otwartym przestrzeni $\mathbb{R}^N$.*

Dowód.
($\Longrightarrow$)

1. (Założenie) $H \subset \mathbb{R}^N$ jest N-wymiarową powierzchnią gładką.
2. Niech $y \in H$, a $U_y \subset \mathbb{R}^N$ oraz $W_y \subset H$ będą takimi zbiorami otwartymi, że istnieje dyfeomorfizm $\Phi_y \colon U_y \to \mathbb{R}^N$, że $y \in W_y = \Phi_y(U_y)$.
3. Zbiór $\Phi_y(U_y)$ jest podzbiorem otwartym przestrzeni $\mathbb{R}^N$.
4. $H = \bigcup\limits_{y \in H} W_y = \bigcup\limits_{y \in H} \underbrace{\Phi_y(U_y)}_{\text{otwarty}}$ - otwarty w $\mathbb{R}^N$.

($\Longleftarrow$)

1. (Załozenie) $H \subset \mathbb{R}^N$ jest niepustym zbiorem otwartym.
2. $id\Big|_H$ jest dyfeomorfizmem oraz $id_H(H) = H$.

$\square$

Uwaga 2.1.3. *Jeżeli $H \subset \mathbb{R}^N$ jest n-wymiarową powierzchnią gładką [klasy C^r], a $H_0 \subset H$ jest jej niepustym podzbiorem otwartym to H_0 jest n-wymiarową powierzchnią gładką [klasy C^r].*

Dowód.

1. $y_0 \in H_0$
2. $y_0 \in H$
3. $\left.\begin{array}{l} U \subset \mathbb{R}^n,\ W \subset H - \text{ zbiory otwarte} \\ \Phi\colon U \to \mathbb{R}^N - \text{ dyfeomorfizm [klasy } C^r] \end{array}\right\} y_0 \in W = \Phi(U)$
4. $W_0 := W \cap H_0$ jest podzbiorem otwartym H_0 oraz $y_0 \in W_0$.
5. W_0 jest podzbiorem otwartym przestrzeni W.
6. $U_0 := \Phi^{-1}(W_0)$ jest podzbiorem otwartym przestrzeni U, a zatem także przestrzeni $\mathbb{R}^n$.
7. $\Phi\big|_{U_0}$ jest dyfeomorfizmem [klasy C^r], $\Phi\big|_{U_0}(U_0) = W_0 \ni y_0$.

$\square$

Twierdzenie 2.1.1. *Załóżmy, że $H \subset \mathbb{R}^N$ jest n-wymiarową powierzchnią gładką, $U \subset \mathbb{R}^N$ jest zbiorem otwartym, a $f\colon U \to \mathbb{R}^N$ jest odwzorowaniem regularnym. Jeżeli $f(U) \subset H$, to $f(U)$ jest podzbiorem otwartym przestrzeni H.*

Dowód.

1. $y \in f(U)$
2. $y \in H$
3. Istnieją zbiory otwarte $U_0 \subset \mathbb{R}^n$, $W_0 \subset H$ oraz taki dyfeomorfizm $\Phi\colon U_0 \to \mathbb{R}^N$, że $y \in W_0 = \Phi(U_0)$
4. $U_1 := f^{-1}(W_0)$ jest podzbiorem otwartym zbioru U_0, a zatem także i $\mathbb{R}^n$.
5. Stosując twierdzenie 1.14.5 do dyfeomorfizmu Φ i odwzorowania regularnego $f\big|_{U_1}$ mamy, że $\Phi^{-1} \circ f\big|_{U_1}$ jest odwzorowaniem regularnym, w szczególności $\left(\Phi^{-1} \circ f\big|_{U_1}\right)(U_1)$ jest podzbiorem otwartym przestrzeni $\mathbb{R}^n$.
6. $\Phi\colon U_0 \xrightarrow[1-1]{\text{na}} W_0$ jest homeomorfizmem.
7. $\Phi\left(\Phi^{-1} \circ f\big|_{U_1}\right)(U_1)$ jest podzbiorem otwartym przestrzeni W_0, a zatem i powierzchnii H. Stąd $f(U_1)$ jest podzbiorem otwartym powierzchnii H
8. $y \in f(U_1)$

$\square$

Wniosek 2.1.1. *Załóżmy, że $H \subset \mathbb{R}^N$ oraz $H_0 \subset \mathbb{R}^N$ są n-wymiarowymi powierzchniami gładkimi. Jeżeli $H_0 \subset H$ to H_0 jest podzbiorem otwartym przestrzeni H.*

Dowód.

1. Dla każdego $y \in H_0$ niech $U_y \subset \mathbb{R}^n$, $W_y \subset H_0$ będą takimi zbiorami otwartymi, że dla pewnego dyfeomorfizmu $\Phi_y\colon U_y \to \mathbb{R}^N$ mamy $y \in W_y = \Phi_y(U_y)$

2. $\Phi_y(U_y) = W_y \subset H_0 \subset H$ dla $y \in H_0$
3. $\Phi_y(U_y)$ jest podzbiorem otwartym przestrzeni H dla $y \in H_0$
4. $H_0 = \bigcup_{y \in H_0} W_y = \bigcup_{y \in H_0} \Phi_y(U_y)$ - zbiór otwarty przestrzeni H.

□

Definicja 2.1.2. *Niech $H \subset \mathbb{R}^N$ jest n-wymiarową powierzchnią gładką.*

$$\mathcal{M}_H = \{\Phi \colon \Phi \colon U \to \mathbb{R}^N \text{ jest dyfeomorfizmem określonym na podzbiorze otwartym } U \text{ oraz } \Phi(U) \subset H\}$$

*Jeżeli $\Phi \in \mathcal{M}_H$, to dziedzinę funkcji Φ oznaczać będziemy symbolem U_Φ, a zbiór wszystkich jej wartości oznaczać będziemy symbolem W_Φ; każdy dyfeomorfizm $\Phi \in \mathcal{M}_H$ nazywamy regularnym opisem parametrycznym (**mapą regularną**) zbioru W_Φ, a zbiór $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_H$ nazywamy **regularnym atlasem** wtedy i tylko wtedy, gdy $H = \bigcup_{\Phi \in \mathcal{A}} W_\Phi$*

Definicja 2.1.3. *Jeżeli $n < N$ to niepusty zbiór $H \subset \mathbb{R}^N$ nazywamy n-wymiarowym **wykresem** klasy C^r wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ściśle rosnący ciąg $(j_1, \ldots, j_n)$ liczb ze zbioru $\{1, \ldots, N\}$, zbiór otwarty $U \subset \mathbb{R}^n$ i takie funkcje $\Psi_1, \ldots, \Psi_{N-n} \colon U \to \mathbb{R}$ klasy C^r, że*

$$H = \{(y_1, \ldots, y_N) \in \mathbb{R}^N \colon (y_{j_1}, \ldots, y_{j_n}) \in U \wedge \underset{\nu \in \{1, \ldots, N-n\}}{\forall} y_{j'_\nu} = \Psi_\nu(y_{j_1}, \ldots, y_{j_n})\}$$

gdzie $(j'_1, \ldots, j'_{N-n})$ jest ściśle rosnącym ciągiem liczb $\{1, \ldots, M\} \setminus \{j_1, \ldots, j_n\}$.

Twierdzenie 2.1.2. *Jeżeli $n < N$ i $H \subset \mathbb{R}^N$ jest n-wymiarowym wykresem klasy C^r, to istnieje zbiór otwarty $U \subset \mathbb{R}^n$ i taki dyfeomorfizm $\Phi \colon U \to \mathbb{R}$ klasy C^r, że $\Phi(U) = H$, w szczególności H jest n-wymiarową powierzchnią gładką.*

Dowód.

1. Przyjmijmy oznaczenia z definicji 2.1.3 i określmy funkcję $\Phi \colon U \to \mathbb{R}^N$ przyjmując $\Phi_{j_k}(x_1, \ldots, x_n) = x_k$ dla $k \in \{1, \ldots, n\}$, $\Phi_{j'_1}(x_1, \ldots, x_n) = \Psi_\nu(x_1, \ldots, x_n)$ dla $\nu \in \{1, \ldots, N-n\}$, $\Phi(x) = (\Phi_1(x), \ldots, \Phi_N(x))$
2. Φ jest funkcją klasy C^r, $|\Phi'(x)| \geqslant Det[\Phi_{j_k|l}(x)]_{n\times n} = Det I_{n\times n} = 1$ dla $x \in U$.
3. Φ jest odwzorowaniem regularnym.
4. Φ jest różnowartościowe.
   Jeżeli $x, z \in$ i $\Phi(x) = \Phi(z)$, to $\Phi_1(x) = \Phi_1(z), \ldots, \Phi_N(x) = \Phi_N(z)$ w szczególności $\Phi_{j_k}(x) = \Phi_{j_k}(z)$ dla $k \in \{1, \ldots, n\}$ czyli $x_k = z_k$ dla $k \in \{1, \ldots, n\}$ zatem $x = z$.
5. Φ^{-1} jest funkcją ciągłą.
6. $\Phi(U) \subset H$
   1. $x \in U$
   2. $x = (x_1, \ldots, x_n)$
   3. $\Phi(x) = (\Phi_1(x), \ldots, \Phi_N(x))$

4. $\underbrace{\Phi_{j_1}(x)}_{x_1},\ldots,\underbrace{\Phi_{j_n}(x)}_{x_n} = (x_1,\ldots,x_n) = x \in U$
5. Jeżeli $\nu \in \{1,\ldots,N-n\}$, to $\Phi_{j'_\nu}(x) = \Psi_\nu(x_1,\ldots,x_n) = \Psi_\nu(\Phi_{j_1}(x),\ldots,\Phi_{j_n}(x))$.
6. $\Phi(x) \in H$

7. $H \subset \Phi(U)$
   1. $(y_1,\ldots,y_N) \in H$
   2. $(y_{j_1},\ldots,y_{j_n}) \in U,\ \forall_{j\in\{1,\ldots,N-n\}}\ (y_{j'_\nu} = \Psi_\nu(y_{j_1},\ldots,y_{j_n}))$
   3. $\Phi(y_{j_1},\ldots,y_{j_n}) = (\Phi_1(y_{j_1},\ldots,y_{j_n}),\ldots,\Phi_N(y_{j_1},\ldots,y_{j_n}))$
   4. $\Phi_{j_k}(y_{j_1},\ldots,y_{j_n}) = y_{j_k} \quad k \in \{1,\ldots,n\}$
   5. $\Phi'_\nu(y_{j_1},\ldots,y_{j_n}) = \Psi_\nu(y_{j_1},\ldots,y_{j_n}) = y_{j'_\nu}$ dla $\nu \in \{1,\ldots,N-n\}$
   6. $(y_1,\ldots,y_N) = (\Phi_1(y_{j_1},\ldots,y_{j_n}),\ldots,\Phi_N(y_{j_1},\ldots,y_{j_n})) = \Phi(y_{j_1},\ldots,y_{j_n}) \in \Phi(U)$

8. Φ^{-1} jest funkcją ciągłą.
   1. $(y_1,\ldots,y_N) \in H$
   2. $\Phi^{-1}(y_1,\ldots,y_N) = (y_{j_1},\ldots,y_{j_n})$, bo Φ jest różnowartościowe.

□

Wniosek 2.1.2. *Jeżeli $H \subset \mathbb{R}^N$, $n < N$ i dla każdego $y_0 \in H$ istnieje taki zbiór otwarty $W \subset H$, że $y_0 \in W$ i W jest n-wymiarowym wykresem klasy C^r, to H jest n-wymiarową powierzchnią gładką klasy C^r.*

Twierdzenie 2.1.3. *Jeżeli $H \subset \mathbb{R}^N$ jest n-wymiarową powierzchnią gładką klasy C^r i $n < N$, to dla każdego $y_0 \in H$ istnieje taki zbiór otwarty $W \subset H$, że $y_0 \in W$ i W jest n-wymiarowym wykresem klasy C^r.*

Dowód.

1. $y_0 \in H$

2. $\Phi \in \mathcal{M}_H,\ y_0 \in W_\Phi,\ \Phi$ klasy C^r

3. $x_0 := \Phi^{-1}(y_0) \in U_\Phi \subset \mathbb{R}^n$

4. $|\Phi'(x_0)| > 0$

5. $1 \leqslant j_1 < \cdots < j_N \leqslant N,\ Det[\Phi_{j_k|l}(x_0)] \neq 0$ gdzie $\Phi_1,\ldots,\Phi_N\colon U_\Phi \to \mathbb{R}^N$ są takimi funkcjami, że $\Phi(x) = (\Phi_1(x),\ldots,\Phi_N(x))$ dla $x \in U_\Phi$

6. $U_0 = \{x \in U_\Phi\colon Det[\Phi_{j_k|l}(x)] \neq 0\}$ jest podzbiorem otwartym przestrzeni $\mathbb{R}^n$.

7. $(\Phi_{j_1},\ldots,\Phi_{j_n})\big|_{U_0}\colon U_0 \to \mathbb{R}^n$ jest regularne.

8. $U \subset U_0$ - zbiór otwarty, $x_0 \in U,\ (\Phi_{j_1},\ldots,\Phi_{j_n})\big|_U$ jest dyfeomorfizmem.

9. $\Psi := (\Phi_{j_1}\ldots,\Phi_{j_n})\big|_U$

10. $\Psi(U)$ jest podzbiorem otwartym przestrzeni $\mathbb{R}^n$.

11. $\Phi(U) = \{(y_1, \ldots, y_N) \in \mathbb{R}^N \colon (y_{j_1}, \ldots, y_{j_n}) \in \Psi(U) \ \forall_{j \in \{1,\ldots,N-n\}} \ (y_{j'_\nu} = \Phi^{-1}(\Psi(y_{j_1}, \ldots, y_{j_n}))$, gdzie $(j'_1, \ldots, j'_{N-n})$ jest ściśle rosnącym ciągiem liczb ze zbioru $\{1, \ldots, N\} \setminus \{j_1, \ldots, j_n\}\}$

    " $\subseteq$ "

    1. $y \in \Phi(U)$
    2. $y = \Phi(x)$, gdzie $x \in U$
    3. $(y_{j_1}, \ldots, y_{j_n}) = (\Phi_{j_1}(x), \ldots, \Phi_{j_n}(x)) = \Psi(x) \in \Psi(U)$
    4. Jeżeli $\nu \in \{1, \ldots, N-n\}$, to $y_{j'_\nu} = \Phi_{j'_\nu}(x) = \Phi_{j'\nu}(\Psi^{-1}(y_{j_1}, \ldots, y_{j_n}))$

    " $\supseteq$ "

    1. $(y_1, \ldots, y_N) \in \mathbb{R}^N,\ (y_{j_1}, \ldots, y_{j_n}) \in \Psi(U), \forall_{j \in \{1,\ldots,N-n\}}\ y_{j'_\nu} = \Phi_{j'_\nu} = \Psi^{-1}(y_{j_1}, \ldots, y_{j_n})$
    2. $(y_{j_1}, \ldots, y_{j_n}) = \Psi(x)$ dla pewnego $x \in U$.
    3. $\Phi(x) = \Phi(\Psi^{-1}(\Psi(x))) = \Phi(\Psi^{-1}(y_{j_1}, \ldots, y_{j_n}))$. Jeżeli $k \in \{1, \ldots, n\}$, to $\Phi_{j_k}(\Psi^{-1}(y_{j_1}, \ldots, y_{j_n})) = y_{j_k}$, gdzie $(\Phi_{j_1}(\Psi^{-1}(y_{j_1}, \ldots, y_{j_n})), \ldots, \Phi_{j_n}(\Psi^{-1}(y_{j_1}, \ldots, y_{j_n})) = \Psi(\Psi^{-1}(y_{j_1}, \ldots, y_{j_n})) = (y_{j_1}, \ldots, y_{j_n})$. Jeżeli $\nu \in \{1, \ldots, N-n\}$, to $\Phi_{j'_\nu}(\Psi^{-1}(y_{j_1}, \ldots, y_{j_n})) = y_{j'\nu}$

12. $\Phi_{j'\nu} \circ \Psi^{-1}$ jest klasy C^r dla każdego $\{1, \ldots, N-n\}$

13. $\Phi(U)$ jest n-wymiarowym wykresem klasy C^r, zbiorem otwartym w przestrzeni H oraz $y_0 = \Phi(x_0) \in \Phi(U)$.

□

Twierdzenie 2.1.4. *Jeżeli $H \subset \mathbb{R}^N$ jest niepustym zbiorem, a $n < N$, to H jest n-wymiarową powierzchnią gładką klasy C^r wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $y_0 \in H$ istnieje taki dyfeomorfizm $\Phi \colon \bigtimes_{k=1}^{N}(a_k, b_k) \to \mathbb{R}^N$, że $a_k < b_k$ dla $k \in \{1, \ldots, N\}$, $a_{n+\nu} < 0 < b_{n+\nu}$ dla $\nu \in \{1, \ldots, N-n\}$,*

$$y_0 \in \Phi\left(\bigtimes_{k=1}^{N}(a_k, b_k)\right),\ \Phi\left(\bigtimes_{k=1}^{N}(a_k, b_k)\right) \cap H = \Phi\left(\{x \in \bigtimes_{k=1}^{N}(a_k, b_k) \colon \forall_{\nu \in \{1,\ldots,N-n\}} (x_{n+\nu} = 0)\}\right)$$

Dowód.
Pomijamy □

2.2 Powierzchnia styczna

Ustalmy liczby naturalne n, N i załóżmy, że $n \leqslant N$.

Definicja 2.2.1. *Jeżeli $H \subset \mathbb{R}^N$ jest n-wymiarową powierzchnią i $y_0 \in H$, to*

$$H_{y_0} = \{y \in \mathbb{R}^N \colon y \text{ jest wektorem stycznym do zbioru } H \text{ w punkcie } y_0\}.$$

Wektor $y \in \mathbb{R}^N$ nazywamy ***wektorem normalnym*** *(ortogonalnym, prostopadłym) do powierzchni H w punkcie y_0 wtedy i tylko wtedy, gdy $y \perp H_{y_0}$. Zbiór H_{y_0} nazywamy* ***przestrzenią styczną*** *do powierzchnii H w punkcie y_0.*

Twierdzenie 2.2.1. *Jeżeli $H \subset \mathbb{R}^N$ jest n-wymiarową powierzchnią gładką, $\Phi \in \mathcal{M}_H$, a $x_0 \in U_\Phi$, to $H_{\Phi(x_0)} = \Phi'(x_0)(\mathbb{R}^n)$, a wektory $\Phi_{|1}(x_0), \ldots, \Phi_{|n}(x_0)$ stanowią bazę przestrzeni stycznej $H_{\Phi(x_0)}$, w szczególności dla każdego $y_0 \in H$ przestrzeń styczna H_{y_0} jest n-wymiarową podprzestrzenią liniową przestrzeni $\mathbb{R}^N$.*

Dowód.

1. Jeżeli $y \in \mathbb{R}^N$, to

$$\begin{aligned} y \in H_{\Phi(x_0)} &\Leftrightarrow y \text{ jest wektorem stycznym do zbioru } H \text{ w punkcie } \Phi(x_0) \\ &\Leftrightarrow y \text{ jest wektorem stycznym do zbioru } \underbrace{W_\Phi}_{\Phi(U_\Phi)} \text{ w punkcie } \Phi(x_0) \\ &\Leftrightarrow y = \Phi'(x_0)x \text{ dla pewnego wektora } x \in \mathbb{R}^n \text{ stycznego do zbioru } U_\Phi \text{ w punkcie } x_0 \end{aligned}$$

2. Ponieważ U_Φ jest podzbiorem otwartym przestrzeni $\mathbb{R}^n$, więc każdy punkt przestrzeni $\mathbb{R}^N$ jest do niego w punkcie x_0 styczny.

3. $y \in H_{\Phi(x_0)} \Leftrightarrow y = \Phi'(x_0)x$ dla pewnego $x \in \mathbb{R}^n$

4. $\Phi_k(x_0) = \Phi'(x_0)e_k \in \Phi'(x_0)(\mathbb{R}^n) = H_{\Phi(x_0)}$ dla $k \in \{1, \ldots, n\}$.

5. Według twierdzenia 1.14.1 wektory $\Phi_{|1}(x_0), \ldots, \Phi_{|n}(x_0)$ są liniowo niezależne.

6. Jeżeli $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, to $\Phi'(x_0)(x_1, \ldots, x_n) = \Phi'(x_0)\left(\sum_{k=1}^n x_k e_k\right) = \sum_{k=1}^n x_k \Phi'(x_0)e_k = \sum_{k=1}^n x_k \Phi_{|k}(x_0)$

□

Definicja 2.2.2. *Jeżeli $y^1, \ldots, y^{N-1} \in \mathbb{R}^N$, to wektor $y^1 \wedge ... \wedge y^{N-1}$ przestrzeni $\mathbb{R}^N$ defininiujemy następująco*

$$y^1 \wedge ... \wedge y^{N-1} = \left(\begin{vmatrix} y_2^1 & \ldots & y_N^1 \\ \vdots & & \vdots \\ y_2^{N-1} & \ldots & y_N^{N-1} \end{vmatrix}, \ldots, (-1)^{j+1} \begin{vmatrix} y_1^1 & \ldots & y_{j-1}^1 & y_{j+1}^1 & \ldots & y_N^1 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ y_1^{N-1} & \ldots & y_{j-1}^{N-1} & y_{j+1}^{N-1} & \ldots & y_N^{N-1} \end{vmatrix}, \ldots, (-1)^{N-1} \begin{vmatrix} y_1^1 & \ldots & y_{N-1}^1 \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{N-1} & \ldots & y_{N-1}^{N-1} \end{vmatrix} \right)$$

Uwaga 2.2.1. *Jeżeli $y^1, \ldots, y^{N-1} \in \mathbb{R}^N$, to*

$$y \cdot (y^1 \wedge ... \wedge y^{N-1}) = Det[y, y^1, \ldots, y^{N-1}] \ \text{dla}\ y \in \mathbb{R}^N$$

$$y^k \cdot (y^1 \wedge ... \wedge y^{N-1}) = 0 \ \text{dla}\ k \in \{1, \ldots, N-1\}$$

oraz

$$y^1 \wedge ... \wedge y^{N-1} = 0 \Leftrightarrow \ \text{wektory}\ y^1, \ldots, y^{N-1} \ \text{są liniowo zależne}$$

Dowód.
Jeżeli $y \in \mathbb{R}^N$, $y = (y_1, \ldots y_N)$, to

$$y \cdot (y^1 \wedge ... \wedge y^{N-1}) = \sum_{k=1}^N y_j (-1)^{j+1} \begin{vmatrix} y_1^1 & \ldots & y_{j-1}^1 & y_{j+1}^1 & \ldots & y_N^1 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ y_1^{N-1} & \ldots & y_{j-1}^{N-1} & y_{j+1}^{N-1} & \ldots & y_N^{N-1} \end{vmatrix} \overset{\text{Laplace}}{=} \begin{vmatrix} y_1 & \ldots & y_N \\ y_1^1 & \ldots & y_N^1 \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{N-1} & \ldots & y_N^{N-1} \end{vmatrix} = Det[y, y^1, \ldots, y^{N-1}]$$

□

Twierdzenie 2.2.2. *Jeżeli $H \subset \mathbb{R}^N$ jest $(N-1)$-wymiarową powierzchnią głądką, $\Phi \in \mathcal{M}_H$, a $x_0 \in U_\Phi$, to*

$$H_{\Phi(x_0)} = \{y \in \mathbb{R}^N \colon Det[y, \Phi_1(x_0), \dots, \Phi_{N-1}(x_0)] = 0\}$$

a wektor $y \in \mathbb{R}^N$ jest wektorem normalnym do powierzchni H w punkcie $\Phi(x_0)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$y = \alpha(\Phi_1(x_0) \wedge ... \wedge \Phi_{N-1}(x_0))$$

dla pewnego $\alpha \in \mathbb{R}$

Dowód.

1. Według twierdzenia (2.2.1) wektory

   $$(*) \quad \Phi_{|1}(x_0), \dots, \Phi_{|N-1}(x_0)$$

   tworzą bazę przestrzeni $H_{\Phi(x_0)}$

2. Wektor $y \in \mathbb{R}^N$ należy do przestrzeni $H_{\Phi(x_0)}$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest kombinacją liniową wektorów $(*)$, a to oznacza, że

   $$Det[y, \Phi_{|1}(x_0), \dots, \Phi_{|N-1}(x_0)] = 0$$

3. Podprzestrzeń liniowa przestrzeni $\mathbb{R}^N$ złożona z wektorów normalnych do powierzchnii H w punkcie $\Phi(x_0)$ jest jednowymiarowa, a wektor

   $$(\Phi_{|1}(x_0), \dots, \Phi_{|N-1}(x_0))$$

   do niej należy i jest wektorem niezerowym (a ponadto tworzy bazę).

□

Twierdzenie 2.2.3. *Załóżmy, że $W \subset \mathbb{R}^N$ jest zbiorem otwartym, $G \colon W \to \mathbb{R}^n$ jest odwzorowaniem C^r (dla pewnego $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$) i $n \in \mathbb{N}$. Jeżeli $*$) $rz[G_{k|l}(y)]_{n \times N} = n$ dla każdego $y \in W$ i $G^{-1}(\{0\}) \neq \emptyset$, to $G^{-1}(\{0\})$ jest $(N-n)$-wymiarową powierzchnią gładką klasy C^r*

$$G^{-1}(\{0\})y_0 = G'(y_0)^{-1}(\{0\}) \text{ dla każdego } y_0 \in W$$

a wektor $(y_1, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^N$ jest wektorem normalnym do powierzchnii $G^{-1}(\{0\})$ w punkcie $y_0 \in G^{-1}(\{0\})$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, że

$$y_j = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k G_{k|j}(y_0) \text{ dla } j \in \{1, \dots, N\}$$

$*$) $G_1, \dots, G_n \colon W \to \mathbb{R}$ sa takimi funkcjami, że $G(y) = (G_1(y), \dots, G_n(y))$ dla $y \in W$

Dowód.
Pomijamy □

2.3 Miara na powierzchni gładkiej

Ustalmy powierzchnię gładką $H \subset \mathbb{R}^N$ i niech

$$(1) \quad \mathfrak{M}_H = \{A \subset H \colon \underset{\Phi \in \mathcal{M}_H}{\forall} (\Phi^{-1}(A) \in \mathcal{L}_n)\}$$

Twierdzenie 2.3.1. *Rodzina $\mathfrak{M}_H$ określona wzorem (1) jest σ-ciałem podzbiorów zbioru H, a ponadto*

i) $\mathcal{B}(H) \subset \mathfrak{M}_H$

ii) Jeżeli $\Phi \in \mathcal{M}_H$, $A \subset W_\Phi$, to $A \in \mathfrak{M}_H \Leftrightarrow \Phi^{-1}(A) \in \mathcal{L}_n$, a jeżeli $f \colon A \to \overline{\mathbb{R}}$, to f jest funkcją $\mathfrak{M}_H$-mierzalną wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja $f \circ \Phi\big|_{\Phi^{-1}(A)}$ jest mierzalna w sensie Lebesgue'a.

Dowód.

i) 1. $\mathfrak{M}_H$ jest σ-ciałem podzbiorów zbioru H

2. Jeżeli $V \subset H$ jest podzbiorem otwartym (wystarczy sprawdzić dla otwartych) przestrzeni H, a $\Phi \in \mathcal{M}_H$, to $\Phi^{-1}(V)$ jest podzbiorem otwartym, a zatem zbiorem mierzalnym w sensie Lebesgue'a, oznacza to, że $V \in \mathfrak{M}_H$.

3. $\mathcal{B}(H) \subset \mathfrak{M}_H$

ii) (z lewej na prawą oczywiste)

1. Niech $\Phi \in \mathcal{M}_H$ i $A \subset W_\Phi$, założmy, że $\Phi^{-1}(A) \in \mathcal{L}_n$
2. Aby wykazać, że $A \in \mathfrak{M}_H$ pokażemy, że $\Psi \in \mathcal{M}_H$
3. (?) $\Psi^{-1}(A) \in \mathcal{L}_n$
4. $\chi \colon \Psi^{-1} \circ \Phi\big|_{\Phi^{-1}(W_\Psi)}$ $(\colon\ \Phi^{-1}(W_\Psi) \to \mathbb{R}^n)$
5. Według twierdzenia 1.14.5 χ jest dyfeomorfizmem.
6. $\Psi^{-1}(A) = \chi(\Phi\big|^{-1}_{\Phi^{-1}(W_\Psi)}(A)) = \underbrace{\chi(\underbrace{\underbrace{\Phi^{-1}(A)}_{\in\mathcal{L}_n} \cap \underbrace{\Phi^{-1}(W_\Psi)}_{\text{otwarty w } \mathbb{R}^N}}_{\in\mathcal{L}_n})}_{\in\mathcal{L}_n \text{ na mocy twierdzenia o całkowaniu przez podstawienie}}$
7. Jeżeli zbiór $B \subset \overline{\mathbb{R}}$ jest borelowski, to
$$f^{-1}(B) \in \mathfrak{M}_H \Leftrightarrow \Phi^{-1}(f^{-1}(B)) \in \mathcal{L}_n \Leftrightarrow \left(f \circ \Phi\big|_{\Phi^{-1}(A)}\right)^{-1}(B) \in \mathcal{L}_n$$
8. f jest funkcją $\mathfrak{M}_H$-mierzalną wtedy i tylko wtedy, gdy mierzalną w sensie Lebesgue'a jest funkcja $f \circ \Phi\big|_{\Phi^{-1}(A)}$.

□

Twierdzenie 2.3.2. *Istnieje dokładnie jedna taka miara $\mu \colon \mathfrak{M}_H \to [0, \infty]$, że dla każdego $\Phi \in \mathcal{M}_H$ i dla każdego takiego zbioru $A \in \mathfrak{M}_H$, że $A \subset W_\Phi$ spełniony jest warunek*

$$(2)\ \mu(A) = \int_{\Phi^{-1}(A)} |\Phi'(x)|\ dx$$

Dowód.

I) 1. $H = \bigcup_{\Phi \in \mathcal{M}_H} W_\Phi$

2. Według twierdzenia Lindelöfa (Dla każdej rodziny $\mathfrak{N}$ podzbiorów otwartych ośrodkowej przestrzeni metrycznej istnieje taka przeliczalna rodzina $\mathfrak{N}_0 \subset \mathfrak{N}$, że $\bigcup \mathfrak{N}_0 = \bigcup \mathfrak{N}$) istnieje taki ciąg $(\Phi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ map regularnych, że $H = \bigcup_{\nu \in \mathbb{N}} W_{\Phi_\nu}$.

3. $B_1 = W_{\Phi_1} \quad B_{\nu+1} = W_{\Phi_{\nu+1}} \setminus \bigcup_{k=1}^{\nu} W_{\Phi_k}$ dla $\nu \in \mathbb{N}$

4. $(B_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem parami rozłącznych podzbiorów borelowskich zbioru H oraz $H = \bigcup_{\nu \in \mathbb{N}} B_\nu$

II) 1. Załóżmy, że $\mu \colon \mathfrak{M}_H \to [0, \infty]$ jest miarą spełniającą (2) dla każdego $\Phi \in \mathcal{M}_H$ i dla każdego takiego zbioru $A \in \mathfrak{M}_H$, że $A \subset W_\Phi$

2. Jeżeli $A \in \mathfrak{M}_H$, to

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{\nu=1}^{\infty} A \cap B_\nu\right) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu(\underbrace{A \cap B_\nu}_{\subset B_\nu \subset W_\Phi}) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{\Phi\big|_\nu^{-1}(A \cap B_\nu)} |\Phi'_\nu(x)|\, dx$$

3. Dowodzi to, że istnieje co najwyżej jedna ”taka’ miara.

III) 1. Określmy funkcję $\mu \colon \mathfrak{M}_H \to [0, \infty]$ wzorem

$$\mu(A) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{\Phi^{-1}(A \cap B_\nu)} |\Phi'_\nu(x)|\, dx$$

2. μ jest miarą.

3. Niech $\Phi \in \mathcal{M}_H,\ A \in \mathfrak{M}_H,\ A \subset W_\Phi$

4. Zachodzi (2)

5. $\underset{\nu \in \mathbb{N}}{\forall} \left(\int_{\Phi_\nu^{-1}(A \cap B_\nu)} |\Phi'_\nu(x)|\, dx = \int_{\Phi^{-1}(A \cap B\nu)} |\Phi'(x)|\, dx\right)$

   1. $\nu \in \mathbb{N}$
   2. $\chi := \Phi_\nu^{-1} \circ \Phi\big|_{\Phi^{-1}(W_\Phi)}$ $(\colon\ \Phi^{-1}(W_{\Phi_\nu}) \to \mathbb{R}^n)$
   3. Według twierdzenia 1.14.5 funkcja χ jest dyfeomorfizmem.
   4. $\int_{B'_\nu(A \cap B_\nu)} |\Phi'_\nu(x)|\, dx = \int_{\chi^{-1}(\Phi_\nu^{-1}(A \cap B_\nu)} |\Phi'_\nu(\chi(x))| \cdot |\chi'(x)|\, dx$
   5. $\chi^{-1}(\Phi_\nu^{-1}(A \cap B_\nu)) = \Phi\big|_{\Phi^{-1}(W_{\Phi_\nu})}^{-1}(A \cap B_\nu) = \Phi^{-1}(A \cap B_\nu) \cap \Phi^{-1}(W_{\Phi_\nu}) = \Phi^{-1}(A \cap B_\nu)$
   6. $|\Phi'_\nu(\chi(x))| \cdot |\chi'(x)| \overset{(\text{tw.}1.14.5)}{=} |(\Phi_\nu \circ \chi)'(x)| \overset{(x \in \Phi^{-1}(W_\Phi))}{=} |\Phi'(x)|$
   7. $\int_{\Phi_\nu^{-1}(A \cap B_\nu)} |\Phi'_\nu(x)|\, dx = \int_{\Phi^{-1}(A \cap B_\nu)} |\Phi'(x)|\, dx$
   8. $\mu(A) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{\Phi_\nu^{-1}(A \cap B_\nu)} |\Phi'_\nu(x)|\, dx = \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{\Phi^{-1}(A \cap B_\nu)} |\Phi'(x)|\, dx = \int_{\bigcup_{\nu=1}^{\infty} \Phi^{-1}(A \cap B_\nu)} |\Phi'(x)|\, dx = \int_{\Phi^{-1}(\bigcup_{\nu=1}^{\infty} A \cap B_\nu)} |\Phi'(x)|\, dx = \int_{\Phi^{-1}(A)} |\Phi'(x)|\, dx$

□

Definicja 2.3.1. *Jedyną miarę* $\mu\colon \mathfrak{M}_H \to [0,\infty]$ *spełniającą dla każdego* $\Phi \in \mathcal{M}_H$ *i dla każdego zbioru* $A \in \mathfrak{M}_H$ *warunek (2) oznaczać będziemy* μ_H

Uwaga 2.3.1. $\mathfrak{M}_{\mathbb{R}^N} = \mathcal{L}_n$ *i* $\mu_{\mathbb{R}^N} = l_N$

Dowód.
Wystarczy zauważyć, że $id_{\mathbb{R}^N} \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}^N}$ □

Twierdzenie 2.3.3. *Jeżeli* $H_0 \subset H$ *jest n-wymiarową powierzchnią gładką, to* $\mathfrak{M}_{H_0} = \mathfrak{M}_H\Big|H_0$ *oraz* $\mu_{H_0} = \mu_H\Big|_{\mathfrak{M}_{H_0}}$

Dowód.

I) 1. $A \in \mathfrak{M}_{H_0},\ \Phi \in \mathcal{M}_H$
   2. Ponieważ na mocy wniosku 2.1.1 H_0 jest podzbiorem otwartym przestrzeni H, więc $\Phi^{-1}(H_0)$ jest podzbiorem otwartym przestrzeni $\mathbb{R}^n$.
   3. $\Phi\Big|_{\Phi^{-1}(H_0)} \in \mathcal{M}_{H_0}$
   4. $\Phi\Big|^{-1}_{\Phi^{-1}(A)} \in \mathcal{L}_n$ gdzie $\Phi^{-1}(A) \cap \Phi^{-1}(H_0) = \Phi^{-1}(A)$
   5. $A \in \mathfrak{M}_H$
   6. $\mathfrak{M}_{H_0} \subset \mathfrak{M}_H\Big|_{H_0}$

II) 1. $\mathcal{M}_{H_0} \subset \mathcal{M}_H$
   2. $\mathfrak{M}_H\Big|H_0 \subset \mathfrak{M}_{H_0}$
   3. $\mu_H\Big|_{\mathfrak{M}_{H_0}} = \mu_{H_0}$

□

Twierdzenie 2.3.4. μ_H *jest miarą zupełną.*

Dowód.

1. $A \in \mathfrak{M}_H,\ \mu_H(A) = 0,\ B \subset A$
2. (?) $B \in \mathfrak{M}_H$
3. $\Phi \in \mathcal{M}_H$
4. $\Phi^{-1}(A \cap W_\Phi) \in \mathcal{L}_n$ oraz $0 = \mu_H(A) \leqslant \mu(A \cap W_\Phi) = \int_{\Phi^{-1}(A\cap W_\Phi)} |\Phi'(x)|\, dx$
5. $\underset{x\in U_\Phi}{\forall} (|\Phi'(x)| > 0)$
6. $l_n(\underbrace{\Phi^{-1}(A \cap W_\Phi)}_{\Phi^{-1}(A)}) = 0$
7. $\Phi^{-1}(B) \subset \Phi^{-1}(A)$

8. $\Phi^{-1}(B) \in \mathcal{L}_n$
9. $B \in \mathfrak{M}_H$

$\square$

Twierdzenie 2.3.5. *Jeżeli $H_0 \subset H$ jest n_0-wymiarową powierzchnią gładką i $n_0 < n$, to $H_0 \in \mathfrak{M}_H$ i $\mu_H(H_0) = 0$*

Dowód.

1. Dla każdego y_0 istnieje takie jego otoczenie $V_0 \subset H_0$, że $V_0 \in \mathfrak{M}_H$ i $\mu_H(V_0) = 0$
   1. $y_0 \in H_0$
   2. Na mocy (K49) mamy $\Phi \colon \bigtimes_{k=1}^{n} (a_k, b_k) \to \mathbb{R}^n$ - dyfeomorfizm,
      $a_k < b_k$ dla $k \in \{1, \dots, n\}$,
      $a_{n_0+\nu} < 0 < b_{n_0+\nu}$ dla $\nu \in \{1, \dots, n - n_0\}$, $y_0 \in \Phi\left(\bigtimes_{k=1}^{n} (a_k, b_k)\right) \subset H$,
      $\Phi\left(\bigtimes_{k=1}^{n} (a_k, b_k)\right) \cap H_0 = \Phi\left(\left\{x \in \bigtimes_{k=1}^{n} (a_k, b_k) \colon \underset{\nu \in \{1,\dots,n-n_0\}}{\forall} (x_{n_0+\nu} = 0)\right\}\right)$
   3. $V_0 := \Phi\left(\bigtimes_{k=1}^{n} (a_k, b_k)\right) \cap H_0$ jest otoczeniem punktu y_0 w przestrzeni H_0
   4. $\Phi \in \mathcal{M}_H$
   5. $\Phi^{-1}(V_0) = \left\{x \in \bigtimes_{k=1}^{n} (a_k, b_k) \colon \underset{\nu \in \{1,\dots,n-n_0\}}{\forall} (x_{n_0+\nu} = 0)\right\} \in \mathcal{L}_n$ oraz $l_n(\Phi^{-1}(V_0)) = 0$
   6. $V_0 \in \mathfrak{M}_H$ i $\mu_H(V_0) = 0$
2. Dla każdego $y \in H_0$ niech $V_y \subset H_0$ będzie takim jego otoczeniem, że $V_y \in \mathfrak{M}_H$ i $\mu_H(V_y) = 0$
3. $H_0 = \bigcup_{y \in H} V_y$
4. Na mocy twierdzenia Lindelöfa istnieje taki ciąg $(y_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ punktów przestrzeni H_0, że $H_0 = \underbrace{\bigcup_{\nu \in \mathbb{N}} U_{y_\nu}}_{\in \mathfrak{M}_H}$
5. $H_0 \in \mathfrak{M}_H$ i $\mu_H(H_0) = 0$

$\square$

Wniosek 2.3.1. *Jeżeli $n < N$, to $H \in \mathcal{L}_N$ i $l_N(H) = 0$*

Dowód. Patrz uwaga 2.3.1 $\square$

Twierdzenie 2.3.6. *Jeżeli $K \subset H$ jest zbiorem zwartym, to $\mu_H(K) < \infty$*

Dowód.

1. Dla każdego $y_0 \in K$ istnieje takie jego otoczenie $V_0 \subset H$, że $\mu_H(V_0) < \infty$
   1. $y_0 \in K$

2. $\Phi \in \mathcal{M}_H, \ y_0 \in W_\Phi$
3. $U_0 \subset U_\Phi$ - otwarty i ograniczony, $clU_0 \subset U_\Phi, \ \Phi^{-1}(y_0) \in U_0$
4. $V_0 = \Phi(U_0)$ jest otoczeniem punktu y_0
5. $\mu_H(V_0) = \int_{\Phi^{-1}(V_0)} |\Phi'(x)| \ dx = \int_{U_0} |\Phi'(x)| \ dx \leqslant \int_{clU_0} |\Phi'(x)| \ dx < \infty$ (bo clU_0 - domknięty i ograniczony czyli zwarty, a $\Phi'(x)$ funkcja ciągła).

2. Dla każdego $y \in K$ niech $V_y \subset H$ będzie takim jego otoczeniem, że $\mu_H(V_y) < \infty$.

3. $K \subset \bigcup\limits_{y \in K} V_y$

4. $y_1, \dots, y_k \in K \colon K \subset \bigcup\limits_{\kappa=1}^{k} V_{y_\kappa}$

5. $\mu_H(K) = \mu_H \left(\bigcup\limits_{\kappa=1}^{k} V_{y_\kappa} \right) \leqslant \sum\limits_{\kappa=1}^{k} \mu_H(V_{y_\kappa}) < \infty$

□

Twierdzenie 2.3.7. *Jeżeli $\Phi \in \mathcal{M}_H, \ A \in \mathfrak{M}_H, \ A \subset W_\Phi$, a $f \colon A \to \overline{\mathbb{R}}$ jest funkcją $\mathfrak{M}_H$-mierzalną, to* $*)$

$$\int_A f \ d\mu_H = \int_{\Phi^{-1}(A)} f(\Phi(x))|\Phi'(x)| \ dx$$

$*)$ *Poniższą równość należy tak rozumieć: Jeżeli istnieje jedna z całek tam występujących, to istnieje też i druga z nich i zachodzi ta równość*

Dowód.
Wystarczy zastosować (ogólne) twierdzenie o całkowaniu przez podstawienie. □

Przykład 2.3.1. *Jeżeli $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$, a $\Phi \colon (a,b) \to \mathbb{R}^N$ jest dyfeomorfizmem, to $\Phi((a,b))$ jest jednowymiarową powierzchnią gładką oraz*

$$\mu_{\Phi((a,b))}(A) = \int_{\Phi^{-1}(A)} \sqrt{\sum_{j=1}^{N} \Phi_j'(x)^2} \ dx \ \ dla \ A \in \mathfrak{M}_{\Phi((a,b))}$$

gdzie $\Phi_1, \dots, \Phi_N \colon (a,b) \to \mathbb{R}$ są takimi funkcjami, że $\Phi(x) = (\Phi_1(x), \dots \Phi_N(x))$ dla $x \in (a,b)$ w szczególności jeżeli $a < \alpha < \beta < b$, to

$$\mu_{\Phi((a,b))}([\alpha, \beta]) = \int_\alpha^\beta \sqrt{\sum_{j=1}^{N} \Phi_j'(x)^2} \ dx$$

*Zbiór $\Phi([\alpha,\beta])$ nazywamy **łukiem gładkim**, a liczbę*

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{\sum_{j=1}^{N} {\Phi'}_J(x)^2} \ dx$$

nazywamy długością łuku gładkiego.

Przykład 2.3.2. *Jeżeli $U \subset \mathbb{R}^2$ jest niepustym zbiorem otwartym, a $\Phi\colon U \to \mathbb{R}^3$ jest dyfeomorfizmem, to $\Phi(U)$ jest dwuwymiarową powierzchnią gładką oraz*

$$\mu_{\Phi(U)}(A) = \int_{\Phi^{-1}(A)} \sqrt{\begin{vmatrix} \varphi_{2|1}(x) & \varphi_{2|2}(x) \\ \varphi_{3|1}(x) & \varphi_{3|2}(x) \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \varphi_{1|1}(x) & \varphi_{1|2}(x) \\ \varphi_{3|1}(x) & \varphi_{3|2}(x) \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \varphi_{1|1}(x) & \varphi_{1|2}(x) \\ \varphi_{2|1}(x) & \varphi_{2|2}(x) \end{vmatrix}^2}\, dx =$$

$$= \int_{\Phi^{-1}(A)} |\Phi_{|1}(x) \wedge \Phi_{|2}(x)|\, dx$$

w szczególności

$$\mu_{\Phi(U)}(\Phi(U)) = \int_U |\Phi_{|1}(x) \wedge \Phi_{|2}(x)|\, dx,$$

gdzie $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3\colon U \to \mathbb{R}$ są takimi funkcjami, że $\Phi(x) = (\Phi_1(x), \Phi_2(x), \Phi_3(x))$ dla $x \in U$
*Liczbę $\int_U |\Phi_{|1}(x) \wedge \Phi_{|2}(x)|\, dx$ nazywamy **polem powierzchni** $\Phi(U)$*
Ogólniej jeżeli $U \subset \mathbb{R}^{N-1}$ jest niepustym zbiorem otwartym, a $\Phi\colon U \to \mathbb{R}^N$ jest dyfeomorfizmem, to $\Phi(U)$ jest $(N-1)$-wymiarowa powierzchnią gładką oraz

$$\mu_{\Phi(U)}(A) = \int_{\Phi^{-1}(A)} |\Phi_{|1}(x) \wedge \ldots \wedge \Phi_{|N-1}(x)|\, dx \ \ dla\ A \in \mathfrak{M}_{\Phi(U)}$$

w szczególności

$$\mu_{\Phi(U)}(\Phi(U)) = \int_U |\Phi_{|1}(x) \wedge \ldots \wedge \Phi_{|N-1}(x)|\, dx$$

2.4 Orientacje i orientowalność powierzchnii gładkiej

Ustalmy n-wymiarową powierzchnię gładką $H \subset \mathbb{R}^N$

Definicja 2.4.1. *Jeżeli X jest n-wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{R}$, to symbolem B_X oznaczać będziemy zbiór wszystkich n-elementowych ciągów wektorów liniowo niezależnych przestrzeni X. W zbiorze B_X określamy relację R_X wzorem*

$$(b_1, \ldots, b_n) R_X (a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow Det[\alpha_{kl}]_{n\times n} > 0$$

gdzie $b_k = \sum_{l=1}^{n} \alpha_{kl} a_l$ dla $k \in \{1, \ldots, n\}$ (1)

Uwaga 2.4.1. *Jeżeli X jest n-wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{R}$, to R_X jest relacją równoważności oraz $card B_X/_{R_X} = 2$*

Dowód.
Dowód relacji równoważności jest prosty (zwrotność - macierz jednostkowa, symetria - macierz odwrotna, przechodność - iloczyn macierzy), zajmiemy się teraz dowodem faktu $card B_X/_{R_X} = 2$

1. $(a_1, \ldots, a_n) \in B_X$
2. $(b_1, \ldots, b_n) \in B_X$
3. Niech $[\alpha_{kl}]_{n\times n}$ będzie macierzą spełniającą warunek (1), wtedy oczywiście $Det[\alpha_{kl}] \neq 0$
4. Jeżeli $Det[\alpha_{kl}]_{n\times n} > 0$, to $(b_1, \ldots, b_n) R_X (a_1, \ldots, a_n)$

5. Jeżeli $Det[\alpha_{kl}]_{n\times n} < 0$

$$Det\begin{bmatrix} -\alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ -\alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} = -Det[\alpha_{kl}]_{n\times n} > 0$$

   a ponadto $b_k = (-\alpha_{kl})(-a_1) + \sum_{l=2}^{n} \alpha_{kl}a_l$ stąd $(b_1, b_2, \dots, b_n)R_X(-a_1, \dots, a_n)$

6. $cardB_X/_{R_X} \leqslant 2$

7. $\sim((-a_1, a_2, \dots, a_n)R_X(a_1, \dots, a_n))$ a zatem $cardB_X/_{R_X} \geqslant 2$

8. $cardB_X/_{R_X} = 2$

□

Definicja 2.4.2.

$$[\mathbb{R}^n]_+ = [(e_1, \dots, e_n)],\ [\mathbb{R}^n]_- = [(-e_1, \dots, e_n)]$$

gdzie $e_k = (\underbrace{0, \dots, 0}_{k-1}, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-k}$ *dla* $k \in \{1, \dots, n\}$

Uwaga 2.4.2. *Jeżeli* $(a_1, \dots, a_n) \in B_{\mathbb{R}^n}$*, to*

$$(a_1, \dots, a_n) \in [\mathbb{R}^n]_+ \Leftrightarrow Det[a_1, \dots, a_n] > 0$$

Dowód.

1. $a_k = (a_{k_1}, \dots, a_{k_n})$ dla $k \in \{1, \dots, n\}$

2. $a_k = \sum_{l=1}^{n} a_{kl}e_l$

□

Definicja 2.4.3. *Jeżeli* $\Phi \in \mathcal{M}_H$ *i* $x_0 \in U_\Phi$*, to klasę* $[H_{\Phi(x_0)}]_+^\Phi$ *określoną wzorem*

$$[H_{\Phi(x_0)}]_+^\Phi = [(\Phi_{|1}(x_0), \dots, \Phi_{|n}(x_0))]$$

nazywamy ***orientacją przestrzeni stycznej*** $H_{\Phi(x_0)}$ *wyznaczoną przez mapę* Φ

Twierdzenie 2.4.1. *Jeżeli* $\Phi \in \mathcal{M}_H$ *i* $x_0 \in U_\Phi$*, to*

$$[H_{\Phi(x_0)}]_+^\Phi = \{(\Phi'(x_0)a_1, \dots, \Phi'(x_0)a_n) \colon (a_1, \dots, a_n) \in [\mathbb{R}^n]_+\}$$

Dowód.

I) 1. $(b_1, \dots, b_n) \in [H_{\Phi(x_0)}]_+^\Phi$

   2. $(b_1, \dots, b_n) \in H_{\Phi(x_0)}$

3. Na mocy twierdzenia 2.2.1 istnieją takie wektory $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$: $b_k = \Phi'(x_0)a_k$ dla $k \in \{1, \dots, n\}$
4. Wektory $a_1, \dots, a_n$ są liniowo niezależne
   $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$: $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k a_k = 0$
   $$0 = \Phi'(x_0)0 = \Phi'(x_0)\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k a_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \underbrace{\Phi'(x_0)a_k}_{b_k} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k b_k$$
   $a_k = 0$ dla $k \in \{1, \dots, n\}$ (bo $b_1, \dots, b_n$ sa liniowo niezależne)
5. Jeżeli $a_k = (a_{k1}, \dots, a_{kn})$ dla $k \in \{1, \dots, n\}$, to
   $$b_k = \Phi'(x_0)\left(\sum_{l=1}^{n} a_{kl} e_l\right) = \sum_{l=1}^{n} a_{kl} \underbrace{\Phi'(x_0)e_l}_{\Phi_{|l}(x_0)} = \sum_{l=1}^{n} a_{kl} \Phi_{|l}(x_0)$$
   dla $k \in \{1, \dots, n\}$, a zatem $Det[a_{kl}]_{n \times n} > 0$
   Stąd (wedle uwagi 2.4.2) $(a_1, \dots, a_n) \in [\mathbb{R}^N]_+$

II) 1. Niech $(a_1, \dots, a_n) \in [\mathbb{R}^n]_+, \ b_k = \Phi'(x_0)a_k$ dla $k \in \{1, \dots, n\}$
2. $b_1, \dots, b_n \in H_{\Phi(x_0)}$
3. Wektory $b_1, \dots, b_n$ są liniowo niezależne
   $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$: $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k b_k = 0$
   $$0 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k b_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \Phi'(x_0) a_k = \Phi'(x_0)\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k a_k\right)$$
   Z twierdzenia 1.14.1 mamy $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k b_k = 0$ (bo $\Phi'(x_0)$ jest 1-1) stąd $\alpha_k = 0$ dla $k \in \{1, \dots, n\}$
4. Zakładając, że $a_k = (a_{k1}, \dots, a_{kn})$ dla $k \in \{1, \dots, n\}$ mamy
   $$b_k = \Phi'(x_0)a_k = \Phi'(x_0)\left(\sum_{l=1}^{n} a_{kl} e_l\right) = \sum_{l=1}^{n} a_{kl} \underbrace{\Phi'(x_0)e_l}_{\Phi_{|l}(x_0)} = \sum_{l=1}^{n} a_{kl} \Phi_{|l}(x_0)$$
   i na mocy uwagi 2.4.2 mamy $Det[a_{kl}]_{n \times n} > 0$, wnosimy stąd, że
   $$(b_1, \dots, b_n) \in [\Phi_{|1}(x_0), \Phi_{|n}(x_0)] = [H_{\Phi(x_0)}]_+^{\Phi}$$

□

Twierdzenie 2.4.2. *Jeżeli $\Phi, \Psi \in \mathcal{M}_H$, a $y_0 \in W_\Phi \cap W_\Psi$, to* ∗)
$$[H_{y_0}]_+^{\Phi} = [H_{y_0}]_+^{\Psi} \Leftrightarrow J_{\Psi^{-1} \circ \Phi\big|_{\Phi^{-1}(W_\Psi)}}(\Phi^{-1}(y_0)) > 0$$

∗) *Jeżeli $U \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem otwartym, a $f \colon U \to \mathbb{R}^n$ i f ma w punkcie $x_0 \in U$ wszystkie pochodne cząstkowe pierwsze rzędu to macierz $[f_{|1}(x_0), \dots, f_{|n}(x_0)]$ nazywamy **macierzą Jacobiego** funkcji f, a jej wyznacznik nazywamy **jakobianem** funkcji f i oznaczamy symbolem $J_f(x_0)$*
$$J_f(x_0) = Det[f_{|1}(x_0), \dots, f_{|n}(x_0)]$$

Dowód.

1. $\chi := \Psi^{-1} \circ \Phi\Big|_{\Phi^{-1}(W_\Psi)}$
2. Według twierdzenia 1.14.5 χ jest dyfeomorfizmem.
3. $\Psi \circ \chi = \Phi\Big|_{\Phi^{-1}(W_\Psi)}$
4. $\Psi'(\chi(\Phi^{-1}(y_0))) \circ \chi'(\Phi^{-1}(y_0)) = \Phi'(\Phi^{-1}(y_0))$
5. $a_k = \chi'(\Phi^{-1}(y_0))e_k$ dla $k \in \{1, \ldots, n\}$
6. $\Psi'(\Psi^{-1}(y_0))a_k = \Phi'(\Phi^{-1}(y_0))e_k = \Phi_{|k}(\Phi^{-1}(y_0))$ dla $k \in \{1, \ldots, n\}$
7. $(a_1, \ldots, a_n) \in [\mathbb{R}^n]_+ \Leftrightarrow J_\chi(\Phi^{-1}(y_0)) > 0$
8. $$\begin{aligned} J_\chi(\Phi^{-1}(y_0)) > 0 &\Leftrightarrow (a_1, \ldots, a_n) \in [\mathbb{R}^n]_+ \\ &\Leftrightarrow (\Psi'(\Psi^{-1}(y_0)a_1, \ldots, \Psi'(\Psi^{-1}(y_0)a_n) \in [H_{y_0}]_+^\Psi \\ &\Leftrightarrow (\Phi_{|1}(\Phi^{-1}(y_0)), \ldots, \Phi_{|n}(\Phi^{-1}(y_0)) \in [H_{y_0}]_+^\Psi \\ &\Leftrightarrow [H_{y_0}]_+^\Phi = [H_{y_0}]_+^\Psi \end{aligned}$$

□

Wniosek 2.4.1. *Jeżeli $\Phi, \Psi \in \mathcal{M}_H$ i $W_\Phi \cap W_\Psi$ jest zbiorem spójnym, to*

$$\underset{y \in W_\Phi \cap W_\Psi}{\exists} ([H_y]_+^\Phi = [H_y]_+^\Psi) \Leftrightarrow \underset{y \in W_\Phi \cap W_\Psi}{\forall} ([H_y]_+^\Phi = [H_y]_+^\Psi)$$

Dowód.

1. Niech $[H_{y_0}]_+^\Phi = [H_{y_0}]_+^\Psi$ dla pewnego $y_0 \in H$ i ustalmy $y \in H$.
2. $\chi := \Psi^{-1} \circ \Phi\Big|_{\Phi^{-1}(W_\Psi)}$ jest dyfeomorfizmem.
3. $J_\chi(\Phi^{-1}(y_0)) > 0$
4. Funkcja $y \longmapsto J_\chi(\Phi^{-1}(y_0)),\ y \in W_\Phi \cap W_\Psi$ jest ciągła i określona na zbiorze spójnym, a zatem zbiór jej wszystkich wartości jest odcinkiem na prostej. Z faktu, że χ jest dyfeomorfizmem do zbioru wartości odwzorowania J_χ nie należy zero.
5. Ponieważ $J_\chi(\Phi^{-1}(y_0)) > 0$, więc tym samym

   $$\underset{y \in W_\Phi \cap W_\Psi}{\forall} (J_\chi(\Phi^{-1}(y)) > 0)$$

   i na mocy twierdzenia 2.4.2

   $$\underset{y \in W_\Phi \cap W_\Psi}{\forall} ([H_y]_+^\Phi = [H_y]_+^\Psi)$$

□

Definicja 2.4.4. *Funkcję σ (określoną na powierzchnii H i przyjmującą wartości w zbiorze $\bigcup_{y\in H} B_{H_y}/R_{H_y}$) nazywamy **orientacją powierzchnii** H wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki atlas regularny powierzchnii H, że*

$$\underset{\Phi\in\mathcal{A}}{\forall}\ \underset{y\in W_\Phi}{\forall} (\sigma(y) = [H_y]_+^\Phi)$$

*Powierzchnię H nazywamy **orientowalną** wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje choć jedna orientacja powierzchnii H.*

Uwaga 2.4.3. *Jeżeli $U \subset \mathbb{R}^n$ jest niepustym zbiorem otwartym, a $\Phi\colon U \to \mathbb{R}^N$ jest dyfeomorfizmem, to $\Phi(U)$ jest powierzchnią orientowalną, dokładniej funkcja*

$$y \longmapsto [H_y]_+^\Phi \text{ dla } y \in \Phi(U)$$

jest orientacją powierzchnii $\Phi(U)$.

Twierdzenie 2.4.3. *Powierzchnia H jest orientowalna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki atlas regularny powierzchnii H, że*

$$\underset{\Phi,\Psi\in\mathcal{A}}{\forall}\ \underset{y\in W_\Phi\cap W_\Psi}{\forall} ([H_y]_+^\Phi = [H_y]_+^\Psi)$$

Twierdzenie 2.4.4. *Jeżeli σ_1, σ_2 są takimi funkcjami, że*

$$\underset{y\in H}{\forall} (B_{H_y}/R_{H_y} = \{\sigma_1(y), \sigma_2(y)\})$$

to σ_1 jest orientacją powierzchnii H wtedy i tylko wtedy, gdy σ_2 jest orientacją powierzchnii H.

Dowód.

1. (Założenie) σ_1 jest orientacją powierzchni H.

2. $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{M}_H\colon$ atlas regularny $\underset{\Phi\in\mathcal{A}_1}{\forall}\ \underset{y\in W_\Phi}{\forall} (\sigma_1(y) = [H_y]_+^\Phi)$

3. $\Pi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dane wzorem $\Pi(x_1, \ldots, x_n) = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$

4. $\mathcal{A}_2 := \{\Phi \circ \Pi\big|_{\Pi^{-1}(W_\Phi)} : \Phi \in \mathcal{A}_1\} \subset \mathcal{M}_H$

5. $\bigcup_{\Phi\in\mathcal{A}_1} (\Phi \circ \Pi)(\Phi^{-1}(U_\Phi)) = \bigcup_{\Phi\in\mathcal{A}_1} \Phi(U_\Phi) = \bigcup_{\Phi\in\mathcal{A}_1} W_\Phi = H$

6. $\mathcal{A}_2$ jest atlasem regularnym.

7. Jeżeli $\Phi \in \mathcal{A}_1$, to dla każdego $x \in \Pi^{-1}(U_\Phi)$

$$\sigma_{\Phi^{-1}\circ(\Phi\ \circ\Pi\big|_{\Pi^{-1}(U_\Phi)})}(x) = \sigma_{\Phi\big|_{\Pi^{-1}(U_\Phi)}}(x) = \sigma_\Pi(x) = -1$$

8. $\underset{\Phi\in\mathcal{A}_1}{\forall}\ \underset{x\in\Pi^{-1}(U_\Phi)}{\forall} ([H_{\Phi(x)}]_+^\Phi \neq [H_{\Phi(x)}]_+^{\Phi\circ\Pi\big|_{\Pi^{-1}(U_\Phi)}})$ - na mocy twierdzenia 2.4.2

9. $\underset{\Psi\in\mathcal{A}_2}{\forall}\ \underset{y\in W_\Psi}{\forall} (\sigma_2(y) = [H_y]_+^\Psi)$

10. σ_2 jest orientacją przestrzeni H.

□

Twierdzenie 2.4.5. *Jeżeli σ_1 i σ_2 są orientacjami powierzchni spójnej H, to*

$$\sigma_1 = \sigma_2 \Leftrightarrow \underset{y \in H}{\exists} (\sigma_1(y) = \sigma_2(y))$$

Dowód.

1. $\mathcal{A}_1,\ \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{M}_H$ - atlasy regularne

$$\underset{\Phi \in \mathcal{A}_1}{\forall}\ \underset{y \in W_\Phi}{\forall} (\sigma_1(y) = [H_y]_+^\Phi)$$

$$\underset{\Psi \in \mathcal{A}_2}{\forall}\ \underset{y \in W_\Psi}{\forall} (\sigma_2(y) = [H_y]_+^\Psi)$$

2. Niech $\sigma_1(z_0) = \sigma_2(z_0)$ dla pewnego $z_0 \in W$
3. $W := \{y \in H \colon \sigma_1(y) = \sigma_2(y)\}$
4. Pokażemy (i to zakończy dowód), że zbiory W oraz $H \setminus W$ są otwarte w przestrzeni H.
5. Ustalmy $y_0 \in H$
6. $\Phi \in \mathcal{A}_1,\ \Psi \in \mathcal{A}_2 \colon y_0 \in W_\Phi \cap W_\Psi$
7. $\Phi^{-1}(W_\Psi)$ jest podzbiorem otwartym przestrzeni $\mathbb{R}^n$ i $\Phi^{-1}(y_0) \in U \subset \Phi^{-1}(W_\Psi)$
8. $U \subset \mathbb{R}^n$ - zbiór wypukły (np. kula), $\Phi^{-1}(y_0) \in U \subset \Phi^{-1}(W_\Phi)$
9. $\Phi_0 := \Phi\Big|_U,\ \Psi_0 := \Psi\Big|_{\Psi^{-1}(\Phi(U))}$
10. $\Phi_0,\ \Psi_0 \in \mathcal{M}_H$
11. $W_\Phi \cap W_\Psi = \Phi(U)$, gdzie $\Phi(U)$ jest zbiorem spójnym (jako ciągły obraz zbioru spójnego)
12. $\underset{y \in \Phi(U)}{\exists} ([H_y]_+^{\Phi_0} = [H_y]_+^\Psi) \Leftrightarrow \underset{y \in \Phi(U)}{\forall} ([H_y]_+^{\Phi_0} = [H_y]_+^{\Psi_0})$
13. Jeżeli $y_0 \in W$, to $[H_{y_0}]_+^{\Phi_0} = [H_{y_0}]_+^\Phi = \sigma_1(y_0) = \sigma_2(y_0) = [H_{y_0}]_+^\Psi = [H_{y_0}]^{\Psi_0}$, a zatem

$$\underset{y \in \Phi(U)}{\forall}\ \underbrace{[H_y]_+^{\Phi_0}}_{\underbrace{[H_y]_+^\Phi}_{\sigma_1(y)}} \neq \underbrace{[H_y]_+^{\Psi_0}}_{\underbrace{[H_y]_+^\Psi}_{\sigma_2(y)}}$$

a stąd $\Phi(U) \subset H \setminus W$, tak więc $\Phi(U)$ jest zbiorem otwartym (w powierzchnii H) zawartym w zbiorze $H \setminus W$ i $y_0 \in \Phi(U)$. Dowodzi to, że $H \setminus W$ jest zbiorem otwartym.

□

Wniosek 2.4.2. *Spójna powierzchnia orientowalna ma dokładnie dwie orientacje.*

Dowód.

1. Niech σ_1 będzie orientacją powierzchnii spójnej H, a σ_2 niech będzie taką funkcją, że
$$B_{H_y}/R_{H_y} = \{\sigma_1(y), \sigma_2(y)\} \text{ dla } y \in H$$
2. Według twierdzenia 2.4.4 funkcja σ_2 jest orientacją.
3. $y_0 \in H$ oraz niech σ będzie orientacją
4. $\sigma(y_0) = \sigma_1(y_0)$ lub $\sigma(y_0) = \sigma_2(y_0)$
5. Jeżeli $\sigma(y_0) = \sigma_1(y_0)$, to na mocy twierdzenia 2.4.5 $\sigma = \sigma_1$, jeżeli jednak $\sigma(y_0) = \sigma_2(y_0)$, to $\sigma = \sigma_2$ na mocy twierdzenia 2.4.5, zatem mamy tylko dwie możliwe orientacje.

$\square$

Twierdzenie 2.4.6. *Załóżmy, że powierzchnia H jest jednowymiarowa. Jeżeli $\sigma\colon H \to \bigcup_{y\in H} B_{H_y}/R_{H_y}$ i $s\colon H \to \mathbb{R}^N$ są takimi funkcjami, że*
$$\underset{y\in H}{\forall} \left(\sigma(y) \in B_{H_y}/R_{H_y} \wedge s(y) \in \sigma(Y) \wedge |s(y)| = 1\right)$$
to σ jest orientacją powierzchnii H wtedy i tylko wtedy, gdy s jest funkcją ciągłą.

Dowód.

I) 1. (Założenie) σ jest orientacją powierzchnii H.
   2. $\mathcal{A}$ - atlas regularny : $\underset{\Phi\in\mathcal{M}_H}{\forall} \ \underset{y\in W_\Phi}{\forall} \left(\sigma(y) = [H_y]^\Phi_+\right)$
   3. Jeżeli $\Phi \in \mathcal{A}$ i $y \in W_\Phi$, to
$$s(y) \in \sigma(y) = [H_y]^\Phi_+ = \{\Phi'(\Phi^{-1}(y)\alpha\colon \underbrace{\alpha}_{>0} \in [\mathbb{R}]_+\} = \{\alpha\Phi'(\Phi^{-1}(y))1\colon \alpha \in (0, \infty)\}$$
   $$s(y) = \frac{\Phi'(\Phi^{-1}(y))1}{|\Phi'(\Phi^{-1}(y))|}$$
   Jeżeli $\phi \in \mathcal{A}$, to $s\big|_{W_\Phi}$ jest funkcją ciągłą (bo mamy atlas), zatem s jest ciągła.

II) 1. (Założenie) s jest funkcją ciągłą
   2. Ustalmy dowolne $y_0 \in H$
   3. Ponieważ każde dwa odcinki postaci $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ są dyfeomorficzne, więc istnieje taki dyfeomorfizm $\Phi\colon U \to \mathbb{R}^N$, że $U = (-\delta, \delta)$, $\Phi(U) \subset H$, $\Phi(0) = y_0$, jest to możliwe, ponieważ każde dwie kule sa dyfeomorficzne:
   Weźmy $K(x_0, r_0)$ i $K(0, r)$
   $f(x) = \frac{r_0}{r}x + x_0$
   Wykażemy, że $f(K(0, r)) = K(x_0, r_0)$
   " $\subseteq$ "
   $||x|| < r$
   $||f(x) - x_0|| = ||\frac{r_0}{r}x|| = \frac{r_0}{r}||x|| < r_0$
   " $\supseteq$ "

$y \in K(x_0, r_0)$
$f\left(\left|\left|\frac{r}{r_0}(y - x_0)\right|\right|\right) = \frac{r}{r_0}||y - x_0|| < \frac{r}{r_0}r_0 = r$
$f\left(\frac{r}{r_0}(y - x_0)\right) = x$

Istnieje $\Phi\colon U_0 \to \mathbb{R}^N$
$y_0 \in \Phi_0(U_0) \subset H$
$\Phi_0^{-1}(y_0) \in U_0$
$r_0 > 0 \quad (\Phi_0^{-1}(y_0) - r_0, \Phi^{-1}(y_0) + r_0) \subset U_0$
$\Phi_1\colon (-\delta, \delta) \to \mathbb{R} \qquad \Phi((-\delta, \delta)) = (\Phi_0^{-1}(y_0) - r_0, \Phi^{-1}(y_0) + r_0)$
$\Phi_1(0) = \Phi^{-1}(y_0)$
$\Phi_0 \circ \Phi_1$

4. $s(y_0) \in \sigma(y_0) \subset H_{y_0} = H_{\Phi(0)} \stackrel{*}{=} \Phi'(0)(\mathbb{R})$
   $*$) Na mocy twierdzenia z powierzchnii stycznych.
5. $s(y_0) = \Phi'(0)\alpha$ dla pewnego $\alpha \in \mathbb{R}$
6. $s(y_0) = \alpha\Phi'(0)1$
7. $s(y_0) = \frac{\Phi(0)1}{|\Phi(0)1|}$ lub $s(y_0) = -\frac{\Phi(0)1}{|\Phi(0)1|}$
8. Zastępując ewentualnie dyfeomorfizm Φ dyfeomorfizmem $x \longmapsto \Phi(-x)$ dla $x \in U$ możemy założyć, że
$$s(y_0) = \frac{\Phi(0)1}{|\Phi(0)1|}$$
9. Jeżeli $x \in U$, to
$$s(\Phi(x)) \in \sigma(\Phi(x)) \subset H_{\Phi(x)} = \Phi'(x)(\mathbb{R})$$
$$s(y_0) = \alpha\Phi'(x)$$
10. Istnieje $\varepsilon\colon U \to \{-1, 1\}$, że
$$s(\sigma(x)) = \varepsilon(x)\frac{\Phi(x)1}{|\Phi(x)1|} \text{ dla} x \in U$$
11. ε jest funkcją ciągłą
    1. $x \in U$
    2. $\Phi_1, \ldots, \Phi_N\colon U \to \mathbb{R}$, że $\Phi(x) = (\Phi_1(x), \ldots, \Phi_N(x))$ dla $x \in U$
    3. $|\Phi'(x)| = \underbrace{\sqrt{\sum_{j=1}^{N}(\Phi_j'(x))^2}}_{>0 \text{ bo to dyfeomorfizm}} \quad$ dla $x \in U$
    4. $j \in \{1, \ldots, N\}\colon \Phi_j(x_0) \neq 0$
    5. $U_0 = \{x \in U\colon \Phi_j'(x) \neq 0\}$ jest zbiorem otwartym i $x_0 \in U_0$
    6. $\underbrace{s_j(\Phi(x))}_{j-\text{ta współrzędna}} = \frac{\varepsilon(x)}{|\Phi'(x)1|}\underbrace{\Phi_j'(x)}_{\text{"stary sens"}}$
    7. $\varepsilon = \frac{\overbrace{s_j(\Phi(x))}^{\text{ciągła}}}{\underbrace{\Phi_j'(x)}_{\text{ciągła, klasy } C^1}}|\Phi'(x)1|$ dla $x \in U_0$

8. $\varepsilon\Big|_{U_0}$ jest funkcją ciągłą.
9. ε jest ciągła w punkcie x_0

12. Ponieważ $\varepsilon(0) = 1$, więc $\varepsilon(x) = 1$ dla $x \in U$ - zbioru spójnego
13. $s(\Phi(x)) = \varepsilon(x)\dfrac{\Phi(x)1}{|\Phi(x)1|}$ dla $x \in U$
14. Jeżeli $x \in U$, to
$$\Phi'(x)1 = |\Phi'(x)1| s(\Phi(x))$$
a zatem
$$[\Phi'(x)1] = [s(\Phi(x))] = \sigma(\Phi(x))$$
15. $[H_{\Phi(x)}]_+^\Phi = \sigma(\Phi(x))$ dla $x \in U$
16. Dowiedliśmy tym samym, że istnieje taki atlas regularny $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_H$, że
$$\underset{\Phi\in\mathcal{A}}{\forall}\ \underset{y\in W_\Phi}{\forall}\ ([H_y]_+^\Phi = \sigma(y))$$
17. σ jest orientacją powierzchnii H

$\square$

Wniosek 2.4.3. *Jednowymiarowa powierzchnia regularna H jest orientowalna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka funkcja $s\colon H \to \mathbb{R}^N$, że*

1) (S) $\quad s(y) \in H_y$ *i* $|s(y)| = 1$ *dla każdego* $y \in H$

2) Jeżeli s jest funkcją ciągłą o własności (S), to funkcja $y \longmapsto [s(y)],\ y \in H$ jest orientacją powierzchni H.

Uwaga 2.4.4. *Jeżeli X jest n-wymiarową podprzestrzenią liniową przestrzeni $\mathbb{R}^{n+1}$, $y_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$, $y_0 \perp X$, $|y_0| = 1$ oraz*
$$[X]_+ := \{(a_1, \ldots, a_n) \in B_X \colon (y_0, a_1, \ldots, a_n) \in [\mathbb{R}^{n+1}]_+\}$$
$$[X]_- := \{(a_1, \ldots, a_n) \in B_X \colon (-y_0, a_1, \ldots, a_n) \in [\mathbb{R}^{n+1}]_-\}$$
to $B_X/_{R_X} = \{[X]_+, [X]_-\}$ oraz
$$\underset{(a_1,\ldots,a_n)\in B_X}{\forall}\left((a_1, \ldots, a_n) \in [X]_+ \Leftrightarrow y_0 = \frac{a_1 \wedge \ldots \wedge a_n}{|a_1 \wedge \ldots \wedge a_n|}\right)$$

Dowód.

I) 1. Niech $(a_1, \ldots, a_n) \in B_X$ będzie takim ciągiem, że *)
$$(y_0, a_1, \ldots, a_n) \in [\mathbb{R}^{n+1}]_+$$
*) Jeżeli $(a_1, \ldots, a_n) \in B_X$ i $(y_0, a_1, \ldots, a_n) \notin [\mathbb{R}^{n+1}]_+$, to $(y_0, -a_1, \ldots, a_n) \in [\mathbb{R}^{n+1}]_+$

2. Jeżeli $(b_1, \ldots, b_n) \in B_X$, to

$$\begin{aligned}(b_1, \ldots, b_n) R_X (a_1, \ldots, a_n) &\Leftrightarrow (y_0, b_1, \ldots, b_n) \overbrace{R}^{\mathbb{R}^{n+1}} (y_0, a_1, \ldots, a_n) \text{ (takie same wyznaczniki)} \\ &\Leftrightarrow (y_0, b_1, \ldots, b_n) \in [\mathbb{R}^{n+1}] \\ &\Leftrightarrow (b_1, \ldots, b_n) \in [X]_+\end{aligned}$$

3. Pokazaliśmy, że $[X]_+ \in B_X/_{R_X}$
4. Zastępując y_0 przez $-y_0$ stwierdzamy, że $[X]_- \in B_X/_{R_X}$
5. $[X]_+ \neq [X]_-$
6. $B_X/_{R_x} = \{[X]_+, [X]_-\}$

II) 1. $\Longrightarrow$
Niech $(a_1, \ldots, a_n) \in B_X, (a_1, \ldots, a_n) \in [X]_+$
2. $y := \dfrac{a_1 \wedge \ldots \wedge a_n}{|a_1 \wedge \ldots \wedge a_n|}$
3. $Det[y, a_1, \ldots, a_n] = y \cdot (a_1 \wedge \ldots \wedge a_n) = \dfrac{|a_1 \wedge \ldots \wedge a_n|^2}{|a_1 \wedge \ldots \wedge a_n|} = |a_1 \wedge \ldots \wedge a_n| > 0$
4. $(y, a_1, \ldots, a_n) \in [\mathbb{R}^{n+1}]$
5. $y \perp a_j$ dla $j \in \{1, \ldots, n\}$
6. $y \perp x$ dla $x \in X$
7. $y \perp X$
8. $|y| = 1$
9. $y = y_0 \vee y = -y_0$ - drugi przypadek odpada, bo porównując z podpunktem 4 mielibyśmy $(-y_0, a_1, \ldots, a_n) \in [\mathbb{R}^{n+1}]_+$ a to przeczy temu, że $(a_1, \ldots, a_n) \in [X]_+$
10. $y = y_0$

1. $\Longleftarrow$
Zakładamy $y_0 = \dfrac{a_1 \wedge \ldots \wedge a_n}{|a_1 \wedge \ldots \wedge a_n|}$
2. $Det[y_0, a_1, \ldots, a_n] = y_0 \cdot (a_1 \wedge\ ldots \wedge a_n) = |a_1 \wedge\ ldots \wedge a_n| > 0$
3. $(y_0, a_1, \ldots, a_n) \in [\mathbb{R}^{n+1}]_+$
4. $(a_1, \ldots, a_n) \in [X]_+$

□

Twierdzenie 2.4.7. *Załóżmy, że $H \subset \mathbb{R}^N$ jest powierzchnią $(N-1)$-wymiarową dla $N > 1$. Jeżeli $\sigma \colon H \to \bigcup_{y \in H} B_{H_y}/_{R_{H_y}}$ i $\mathfrak{m} \colon H \to \mathbb{R}^n$ są takimi funkcjami, że*

- *(N1) $\mathfrak{m}(y)$ jest wektorem normalnym do powierzchnii H w punkcie y,*
- *(N2) $|\mathfrak{M}(y)| = 1$ dla każdego $y \in H$ oraz*
- *(N3) $\sigma(y) = \{(a_1, \ldots, a_n) \in B_{H_y} \colon (\mathfrak{m}(y), a_1, \ldots, a_n) \in [\mathbb{R}^N]\}$ dla każdego $y \in H$*

to σ jest orientacją powierzchnii H wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{m}$ jest funkcją ciągłą.

Dowód.

I) 1. Załóżmy, że σ jest orientacją powierzchnii H

2. $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_H$: atlas regularny
$$\underset{\Phi\in\mathcal{A}}{\forall} \ \underset{y\in W_\Phi}{\forall} \ (\sigma(y) = [H_y]_+^\Phi)$$

3. Jeżeli $\Phi \in \mathcal{A}$ i $y \in W_\Phi$, to
$$(\Phi_{|1}(\Phi^{-1}(y)), \dots, \Phi_{|N-1}(\Phi^{-1}(y))) \in [H_y]_+^\Phi = \sigma(y)$$
a zatem
$$(\mathfrak{m}(y), \Phi_{|1}(\Phi^{-1}(y)), \dots, \Phi_{|N-1}(\Phi^{-1}(y))) \in [\mathbb{R}^N]_+$$

4. Jeżeli $\Phi \in \mathcal{A}$ i $y \in W_\Phi$ to według uwagi 2.4.4
$$\mathfrak{m}(y) = \frac{\Phi_{|1}(\Phi^{-1}(y)) \wedge \cdots \wedge \Phi_{|N-1}(\Phi^{-1}(y))}{|\Phi_{|1}(\Phi^{-1}(y)) \wedge \cdots \wedge \Phi_{|N-1}(\Phi^{-1}(y))|}$$

5. Jeżeli $\Phi \in \mathcal{A}$, to funkcja $\mathfrak{m}\Big|_{W_\Phi}$ jest ciągła.

6. $\mathfrak{m}$ jest funkcją ciągłą.

II) 1. Zakładamy, że $\mathfrak{m}$ jest funkcją ciągłą.

2. $y_0 \in H$

3. $\Phi\colon U \to \mathbb{R}^N$ - dyfeomorfizm, $U = K(0,\delta)$, $\Phi(U) \subset H$, $y_0 \in \Phi(U)$

4.
$$\mathfrak{m}(y_0) = \frac{\Phi_{|1}(\Phi^{-1}(y)) \wedge \cdots \wedge \Phi_{|N-1}(\Phi^{-1}(y))}{|\Phi_{|1}(\Phi^{-1}(y)) \wedge \cdots \wedge \Phi_{|N-1}(\Phi^{-1}(y))|}$$
lub
$$\mathfrak{m}(y_0) = -\frac{\Phi_{|1}(\Phi^{-1}(y)) \wedge \cdots \wedge \Phi_{|N-1}(\Phi^{-1}(y))}{|\Phi_{|1}(\Phi^{-1}(y)) \wedge \cdots \wedge \Phi_{|N-1}(\Phi^{-1}(y))|}$$

5. Zastępując ewentualnie dyfeomorfizm Φ dyfeomorfizmem $(x_1, \dots, x_{N-1}) \longmapsto \Phi(-x_1, x_2, \dots, x_{N-1})$ gdzie $(x_1, \dots, x_{N-1}) \in U$ możemy założyć, że
$$\mathfrak{m}(y_0) = \frac{\Phi_{|1}(\Phi^{-1}(y)) \wedge \cdots \wedge \Phi_{|N-1}(\Phi^{-1}(y))}{|\Phi_{|1}(\Phi^{-1}(y)) \wedge \cdots \wedge \Phi_{|N-1}(\Phi^{-1}(y))|}$$

6. Jeżeli $x \in U$, to
$$\mathfrak{m}(\Phi(x)) = \varepsilon(x)\Phi_{|1}(x) \wedge \cdots \wedge \Phi_{|N-1}(x)$$
gdzie $\varepsilon \in \{-1, 1\}$

7. ε jest funkcją ciągłą.

   1. $x_0 \in U$
   2. $\omega(x) = \Phi_{|1}(x) \wedge \cdots \wedge \Phi_{|N-1}(x)$ dla $x \in U$
   3. $\omega_1, \dots \omega_n \colon U \to \mathbb{R}$
      $\omega(x) = (\omega_1(x), \dots, \omega_N(x))$ dla $x \in U$

4. $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_n \colon H \to \mathbb{R}^N$
   $\mathfrak{m}(y) = (\mathfrak{m}_1(y), \dots, \mathfrak{m}_N(y))$ dla $y \in H$
5. $\mathfrak{m}(\Phi(x)) = \varepsilon(x)\frac{\omega(x)}{|\omega(x)|}$ dla $x \in U$
6. Ponieważ $\omega(x_0) \neq 0$, więc $\omega_j(x_0) \neq 0$ dla pewnego $j \in \{1, \dots, N\}$
7. $U_0 = \{x \in U \colon \omega_j(x) \neq 0\}$ jest zbiorem otwartym i $x_0 \in U_0$
8. $\mathfrak{m}_j = \varepsilon(x)\frac{\omega_j(x)}{|\omega(x)|}$ dla $x \in U$
9. $\varepsilon(x) = \frac{\mathfrak{m}(\Phi(x))}{\omega_j(x)}|\omega(x)|$ dla $x \in U_0$
10. $\varepsilon\Big|_{U_0}$ jest funkcja ciągłą.
11. ε jest funkcją ciągłą w punkcie x_0.
12. ε jest funkcją ciągłą.

8. $\underset{x\in U}{\forall} (\varepsilon(x) = -1)$ lub $\underset{x\in U}{\forall} (\varepsilon(x) = 1)$
9. $\varepsilon(0) = 1$
10. $\underset{x\in U}{\forall} (\varepsilon(x) = 1)$
11. $\mathfrak{m}(\Phi(x)) = \dfrac{\Phi_{|1}(x) \wedge \cdots \wedge \Phi_{|N-1}(x)}{|\Phi_{|1}(x) \wedge \cdots \wedge \Phi_{|N-1}(x)|}$ dla $x \in U$
12. $(\Phi_{|1}(x), \dots, \Phi_{|N-1}(x)) \in [H_{\Phi(x)}]_+^{\Phi}$ dla $x \in U$
13. $(\mathfrak{m}(\Phi(x)), \Phi_{|1}(x), \dots, \Phi_{|N-1}(x)) \in [\mathbb{R}^N]_+$ dla $x \in U$.
14. $(\Phi_{|1}(x), \dots, \Phi_{|N-1}(x)) \in \sigma(\Phi(x))$ dla $x \in U$
15. $[H_{\Phi(x)}]_+^{\Phi} = \sigma(\Phi(x))$ dla $x \in U$
16. Ponieważ punkt $y_0 \in H$ ustaliliśmy dowolnie, więc wykazaliśmy tym samym, że istnieje taki atlas regularny $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_H$, że
$$\underset{\Phi\in A}{\forall}\ \underset{y\in W_\Phi}{\forall} (\sigma(y) = [H_y]_+^{\Phi})$$

□

Wniosek 2.4.4. *Jeżeli $N > 1$, to $(N-1)$-wymiarowa powierzchnia gładka $H \subset \mathbb{R}^N$ jest orientowalna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja ciągła $\mathfrak{m} \colon H \to \mathbb{R}^N$ spełniająca dla każdego $y \in H$ warunki $(N1)$ i $(N2)$; jeżeli $\mathfrak{m} \colon H \to \mathbb{R}^N$ jest funkcją ciągłą spełniającą dla każdego $y \in H$ warunki $(N1)$ i $(N2)$ to funkcja $\sigma \colon H \to \bigcup\limits_{y\in H} B_{H_y}/_{R_{H_y}}$ określona wzorem $(N3)$ jest orientacją powierzchnii H.*

Dowód.

1. Zakładamy, że H jest orientowalna i niech σ będzie orientacją tej powierzchnii.

2. Według uwagi 2.4.4
$$B_{H_y}/_{R_{H_y}} = \{[H_y]_-, [H_y]_+\} \text{ dla } y \in H$$

3. Istnieje taka funkcja $\mathfrak{m} \colon H \to \mathbb{R}^N$, że dla każdego $y \in H$ spełnione sa warunki $(N1) - (N3)$.

4. Według twierdzenia 2.4.7 funkcja $\mathfrak{m}$ jest ciągła.

□

2.5 Wzory Gaussa-Ostrogradzkiego, Greena-Riemanna i klasyczny wzór Stokesa - krótka informacja

Zamieszone w skanach załączonych do wykładu nazwanych `DD1.jpg` i `DD2.jpg`

Podziękowanie

Serdecznie chce podziękować za udostępnianie notatek Paulinie Koniarek oraz Klaudii Koczwarze za rozwiewanie wątpliwości ☺.

Rozdział 3

Konwersatorium

Zad.1

Treść. *Jeżeli funkcja* $f\colon U \to Y$ *jest różniczkowalna w punkcie* $x_0 \in U$, *to ma ona w tym punkcie pochodną kierunkową w kierunku każdego wektora* $a \in X$ *oraz* $\nabla_a f(x_0) = f'(x_0)a$

Rozwiązanie. *Rozpoczniemy od rozważenia postaci ilorazu z definicji pochodnej kierunkowej (Def. 1.4.1). Poprzez kilka prostych przekształceń wykażemy, że pochodna kierunkowa istnieje. Oczywiście skorzystamy z faktu, że funkcja jest różniczkowalna.*

$$\begin{aligned}
\frac{f(x_0+\alpha a)-f(x_0)}{\alpha} &= \frac{f(x_0+\alpha a)-f(x_0)}{\alpha} - \frac{f'(x_0)\alpha a}{\alpha} + \frac{f'(x_0)\alpha a}{\alpha} = \\
&= \frac{f(x_0+\alpha a)-f(x_0)-f'(x_0)\alpha a}{\alpha} + \frac{f'(x_0)\alpha a}{\alpha} = \\
&= \frac{f(x_0+\alpha a)-f(x_0)-f'(x_0)\alpha a}{\alpha} + f'(x_0)a = \\
&= \frac{(f(x_0+\alpha a)-f(x_0)-f'(x_0)\alpha a)\cdot ||\alpha a||}{\alpha\cdot ||\alpha a||} + f'(x_0)a = \\
&= \frac{f(x_0+\alpha a)-f(x_0)-f'(x_0)\alpha a}{||\alpha a||}\cdot\frac{||\alpha a||}{\alpha} + f'(x_0)a = \\
&= \underbrace{\underbrace{\frac{f(x_0+\alpha a)-f(x_0)-f'(x_0)\alpha a}{||\alpha a||}}_{\xrightarrow{\alpha\to 0} 0}\cdot\underbrace{\frac{||\alpha a||}{\alpha}}_{stała}}_{\longrightarrow 0} + \underbrace{f'(x_0)a}_{\xrightarrow{\alpha\to 0} f'(x_0)a} = \\
&= f'(x_0)a
\end{aligned}$$

Zatem pochodna kierunkowa istnieje i wyraża się wzorem $\nabla_a f(x_0) = f'(x_0)a$

Zad.2

Treść. *Funkcje* $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *określone wzorami*

$$f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3},\ \ g(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^6} & \textit{jeżeli } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \textit{jeżeli } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

mają w punkcie $(0,0)$ *pochodną kierunkową w kierunku każdego wektora przestrzeni* $\mathbb{R}^2$, *funkcja* f *nie jest w punkcie* $(0,0)$ *różniczkowalna, a funkcja* g *nie jest w punkcie* $(0,0)$ *ciągła.*

Rozwiązanie.

- *Pochodna kierunkowa funkcji f w punkcie $(0,0)$*
  Ustalmy wektor $[x,y] \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}\nabla_{[x,y]} f(0,0) &= \lim_{\alpha\to 0} \frac{f((0,0)+\alpha(x,y)) - f(0,0)}{\alpha} = \\ &= \lim_{\alpha\to 0} \frac{f(\alpha x, \alpha y) - 0}{\alpha} = \\ &= \lim_{\alpha\to 0} \frac{\sqrt[3]{\alpha^3 x^3 + \alpha^3 y^3}}{\alpha} = \\ &= \lim_{\alpha\to 0} \frac{\sqrt[3]{\alpha^3 (x^3 + y^3)}}{\alpha} = \\ &= \lim_{\alpha\to 0} \frac{\alpha\sqrt[3]{x^3 + y^3}}{\alpha} = \\ &= \sqrt[3]{x^3 + y^3}\end{aligned}$$

- *Pochodna funkcji g w punkcie $(0,0)$*
  Ustalmy wektor $[a,b] \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}\nabla_{[a,b]} g(0,0) &= \lim_{\alpha\to 0} \frac{g((0,0)+\alpha(a,b)) - g(0,0)}{\alpha} = \\ &= \lim_{\alpha\to 0} \frac{g(\alpha a, \alpha b)}{\alpha} = \\ &= \lim_{\alpha\to 0} \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\alpha^4 a b^3}{\alpha^2 a^2 + \alpha^6 b^6} = \\ &= \lim_{\alpha\to 0} \frac{\alpha a b^3}{a^2 + \alpha^4 b^6} = 0\end{aligned}$$

- *Funkcja f nie jest różniczkowalna w punkcie $(0,0)$*
  Załóżmy, że funkcja f jest różniczkowalna w punkcie $(0,0)$.
  Obliczmy wartość pochodnej kierunkowej w kierunku wektorów $[1,0]$ i $[0,1]$ w punkcie $(0,0)$

$$\nabla_{[1,0]} f(0,0) = \sqrt[3]{1^3 + 0^3} = 1 = \sqrt[3]{0^3 + 1^3} = \nabla_{[0,1]} f(0,0)$$

  Skorzystajmy z zadania 1, z niego wiemy, że

$$\underset{a\in\mathbb{R}^2}{\forall} \; \nabla_a f(x_0) = f'(x_0)a$$

$$2 = 1+1 = \nabla_{[1,0]} f(0,0) + \nabla_{[0,1]} f(0,0) = f'(0,0)(1,0) + f'(0,0)(0,1) = f'(0,0)(1,1) = \nabla_{[1,1]} f(0,0) =$$

$$= \sqrt[3]{1^3 + 1^3} = \sqrt[3]{2}$$

  Ale $2 \neq \sqrt[3]{2}$ - sprzeczność, stąd f nie jest różniczkowalna w punkcie $(0,0)$.

- *Funkcja g nie jest ciągła w punkcie $(0,0)$*
  Skorzystamy z definicji ciągłości Heinego, pokażemy, że istnieje taki ciąg, którego argumenty zbiegają do $(0,0)$ ale wartości nie zbiegają do $g(0,0) = 0$.

Weźmy ciąg $(\frac{1}{n^3}, \frac{1}{n})$. *Ciąg ten zmierza do zera, a co z granicą ciągu wartości?*

$$\lim_{n\to\infty} g\left(\frac{1}{n^3}, \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^6}+\frac{1}{n^6}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^6}}{\frac{1}{n^6}+\frac{1}{n^6}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^6}}{\frac{2}{n^6}} = \frac{1}{2}$$

Jak widać mamy zbieganie do wartości $\frac{1}{2}$, *a nie do* 0, *zatem funkcja* g *nie jest ciągła w punkcie* $(0,0)$

Zad.3

Treść. *Jeżeli rzeczywista funkcja* f *określona na podzbiorze otwartym zespolonej przestrzeni unormowanej jest różniczkowalna w punkcie* x_0, *to* $f'(x_0) = 0$.

Rozwiązanie. *Ustalmy* X *- przestrzeń unormowaną, zespoloną oraz* $U \subset X$ *- zbiór otwarty. Niech ponadto* $f\colon U \to \mathbb{C}$ *będzie taką funkcją, że* $f(U) \subset \mathbb{R}$ *(zbiór wartości funkcji jest podzbiorem liczb rzeczywistych, zatem funkcja jest rzeczywista tak naprawdę). Załóżmy, że* f *jest różniczkowalna w punkcie* $x_0 \in U$. *Wtedy poprzez pochodną rozumiemy odwzorowanie* $f'(x_0)\colon X \to \mathbb{C}$. *Jednak wartości pochodnej naprawdę również będą leżeć w* $\mathbb{R}$, *gdyż na mocy zadania 1*

$$f'(x_0)h = \nabla_h f(x_0) = \lim_{\alpha\to 0} \frac{f(x_0+\alpha h) - f(x_0)}{\alpha} \in \mathbb{R}$$

Przyjmijmy teraz, że naszym pierwotnym kandydatem na pochodną jest odwzorowanie $\Lambda\colon X \to \mathbb{C}$ *(liniowe nad* $\mathbb{C}$*). Pamiętajmy jednak, że wyżej pokazaliśmy, że* $\Lambda(U) \subset \mathbb{R}$. *Z liniowości nad* $\mathbb{C}$ *wynika, że*

$$\Lambda(\alpha x) = \alpha\Lambda(x) \quad \underset{x\in U}{\forall} \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

Gdy weźmiemy $\alpha = i$ *mamy jednak*

$$\Lambda(ix) = i\Lambda(x) \in \mathbb{R} \Longrightarrow \Lambda(x) = 0$$

Zatem wartość pochodnej może wynosić tylko 0.

Zad.4

Treść. *Funkcja* $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *określona wzorem* $f(z) = |z|^2$ *jest różniczkowalna tylko w zerze.*

Rozwiązanie. *Najpierw sprawdźmy rózniczkowalność w punkcie* $z = 0$. *Możemy skorzystać z zadania 3, gdyż nasza funkcja mimo, że idzie w* $\mathbb{C}$ *to tak naprawdę jest rzeczywista i przy tym określona na zespolonej przestrzeni unormowanej. Jeśli pochodna będzie istnieć w punkcie* z *to musi być ona równa* 0. *Rozpiszmy iloraz różnicowy.*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0) - 0}{|h|} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|^2}{|h|} = \lim_{h\to 0} |h| = 0$$

Zatem w punkcie x_0 *nasza funkcja jest różniczkowalna.*
Teraz rozważmy sytuację, gdy $z \neq 0$ *i załóżmy, że w takim punkcie nasza funkcja tez jest różniczkowalna.*

Oczywiście jak powyżej pochodna musi wynosić wtedy 0.

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)-0}{|h|} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{|z+h|^2-|z|^2}{|h|} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(z+h)\overline{(z+h)}-z\overline{z}}{|h|} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(z+h)(\overline{z}+\overline{h})-z\overline{z}}{|h|} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{z\overline{z}+z\overline{h}+\overline{z}h+h\overline{h}-z\overline{z}}{|h|} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{z\overline{h}+\overline{z}h}{|h|} + \lim_{h\to 0} \frac{h\overline{h}}{|h|} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{z\overline{h}+\overline{z}h}{|h|} + \lim_{h\to 0} \frac{|h|^2}{|h|} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{z\overline{h}+\overline{z}h}{|h|} + \underbrace{\lim_{h\to 0}}_{\longrightarrow 0} |h| = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{z\overline{h}+\overline{z}h}{|h|}
\end{aligned}$$

Rozpiszmy teraz pewien szczególny przypadek (zmierzanie po osi rzeczywistej, wtedy $h=\overline{h}=|h|$*).*

$$0 = \lim_{h\to 0} \frac{z\overline{h}+\overline{z}h}{|h|} = z+\overline{z}$$

Wartości naszej funkcji są rzeczywiste, zatem $0=z+\overline{z}$ *co daje, że* $\overline{z}=-z$.
Wtedy jednak

$$0 = \lim_{h\to 0} \frac{z\overline{h}+\overline{z}h}{|h|} = \lim_{h\to 0} \frac{z\overline{h}-zh}{|h|} = \lim_{h\to 0} \frac{z(\overline{h}-h)}{|h|}$$

Punkt z *był różny od* 0, *zatem wynika z tego, że poniższa równość ma być prawdziwa*

$$0 = \lim_{h\to 0} \frac{\overline{h}-h}{|h|}$$

Lecz biorąc $h=ih$ *i podchodząc do* 0 *z prawej strony zauważamy, że*

$$0 = \lim_{h\to 0^+} \frac{\overline{ih}-ih}{|ih|} = \lim_{h\to 0^+} \frac{-ih-ih}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{-2ih}{h} = -2i$$

Doszliśmy zatem do sprzeczności, a stąd wnioskujemy, że nasza funkcja jest różniczkowalna tylko w zerze.

Zad.5

Treść. *Jeżeli norma* $||\cdot||$ *jest różniczkowalna w punkcie* x_0 *to* $x_0 \neq 0, ||\cdot||'(x_0)x_0 = ||x_0||$ *i* $\left|\left|||\cdot||'(x_0)\right|\right| = 1$.

Rozwiązanie.
Na początku przyjmijmy oznaczenie $f(x) = ||x||$.

- $x_0 \neq 0$

  Aby to pokazać znów posłużymy się faktem z zadania 1 dotyczącym pochodnej kierunkowej. Rozpocznijmy od jej policzenia w punkcie $x_0 = 0$.

  $$\nabla_h f(x_0) = \frac{f(x_0+\alpha h) - f(x_0)}{\alpha} = \frac{||0+\alpha h|| - ||0||}{\alpha} = \frac{||\alpha h||}{\alpha} = \frac{|\alpha| \cdot ||h||}{\alpha} = \begin{cases} -||h|| & \alpha \in (-\infty, 0) \\ ||h|| & \alpha \in (0, \infty) \end{cases}$$

  Zatem dla $h \neq 0$ *przy przejściu go granicy uzyskamy dwie granice, zatem w tym punkcie nie istnieje pochodna kierunkowa w kierunku wektora* h, *a zatem w punkcie* $x_0 = 0$ *nie istnieje pochodna i funkcja nie może być w tym punkcie różniczkowalna.*

- $||\cdot||'(x_0) = x_0$

  Załóżmy, że funkcja f *jest różniczkowalna w punkcie* $x_0 \neq 0$ *i rozpiszmy iloraz różnicowy w tym punkcie.*

  $$0 = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{||h||}$$

  Podstawmy $h = \alpha x_0$ *i zmierzajmy z* α *do* 0 *z prawej strony (możemy, bo założyliśmy, że granica istnieje, zatem musi być równa granicy prawostronnej)*

  $$\begin{aligned} 0 &= \lim_{\alpha\to 0^+} \frac{f(x_0+\alpha x_0) - f(x_0) - f'(x_0)(\alpha x_0)}{||\alpha x_0||} = \\ &= \lim_{\alpha\to 0^+} \frac{f(x_0+\alpha x_0) - f(x_0) - \alpha f'(x_0)x_0}{\alpha||x_0||} = \\ &= \lim_{\alpha\to 0^+} \frac{f(x_0+\alpha x_0) - f(x_0)}{\alpha||x_0||} - \frac{f'(x_0)x_0}{||x_0||} \end{aligned}$$

  Przenieśmy $\frac{f'(x_0)x_0}{||x_0||}$ *na drugą stronę otrzymując w ten sposób*

  $$\begin{aligned} \frac{f'(x_0)x_0}{||x_0||} &= \lim_{\alpha\to 0^+} \frac{f(x_0+\alpha x_0) - f(x_0)}{\alpha||x_0||} = \\ &= \lim_{\alpha\to 0^+} \frac{||x_0+\alpha x_0|| - ||x_0||}{\alpha||x_0||} = \\ &= \lim_{\alpha\to 0^+} \frac{||(1+\alpha)x_0|| - ||x_0||}{\alpha||x_0||} = \\ &= \lim_{\alpha\to 0^+} \frac{(1+\alpha)||x_0|| - ||x_0||}{\alpha||x_0||} = \\ &= \lim_{\alpha\to 0^+} \frac{(1+\alpha) - 1}{\alpha} = \\ &= \lim_{\alpha\to 0^+} \frac{\alpha}{\alpha} = 1 \end{aligned}$$

Uzyskaliśmy w ten sposób

$$\frac{f'(x_0)x_0}{||x_0||} = \frac{||x_0||'x_0}{||x_0||} = 1$$

Przemnażając przez $||x_0||$ mamy to co chcieliśmy

$$||x_0||'x_0 = ||x_0||$$

- $\Big|\Big| || \cdot ||'(x_0) \Big|\Big| = 1$

Pokażemy, że $||f'(x_0)|| \leqslant 1$ oraz $||f'(x_0)|| \geqslant 1$ co w sumie da nam równość. Korzystając z podpunktu poprzedniego mamy

$$||x_0|| = ||f'(x_0)x_0|| \leqslant ||f'(x_0)|| \cdot ||x_0||$$

Dzieląc obustronnie przez $||x_0||$ dostajemy

$$1 \leqslant ||f'(x_0)||$$

Drugą nierówność pokażemy stosując (kolejny już raz) pochodną kierunkową.

$$\begin{aligned} f'(x_0)h = \nabla_h f(x_0) = \\ &= \lim_{\alpha \to 0} \frac{f(x_0 + \alpha h) - f(x_0)}{\alpha} = \\ &= \lim_{\alpha \to 0} \frac{||x_0 + \alpha h|| - ||x_0||}{\alpha} \leqslant \\ &\leqslant \lim_{\alpha \to 0^+} \frac{||x_0|| + ||\alpha h|| - ||x_0||}{\alpha} = \\ &= \lim_{\alpha \to 0^+} \frac{||\alpha h||}{\alpha} = \\ &= \lim_{\alpha \to 0^+} \frac{\alpha ||h||}{\alpha} = ||h|| \end{aligned}$$

Uzyskaliśmy zatem

$$f'(x_0)h \leqslant ||h||$$

Zauważmy ponadto, że

$$-f'(x_0)h = ||(-h)|| = ||h||$$

Co daje nam nierówność na moduł (czyli normę w przeciwdziedzinie)

$$|f'(x_0)h| \leqslant ||h||$$

Przechodząc do kresu górnego i korzystając z postaci normy operatora uzyskujemy

$$||f'(x_0)|| \leqslant 1$$

co kończy dowód.

Zad.6

Treść. *Norma w przestrzeni zespolonej nie jest różniczkowalna w żadnym punkcie.*

Rozwiązanie. *Niech X jest przestrzenią unormowaną, a $||\cdot||$ jest normą w tej przestrzeni. Załóżmy, że $||\cdot||$ jest różniczkowalna w punkcie $x_0 \in X$. Wtedy z zadania 3 wiemy, że $||\cdot||'(x_0) = 0$, lecz na mocy zadania 5 wiemy z kolei, że $x_0 \neq 0$ oraz $||\cdot||'(x_0) = ||x_0||$. Zatem łącząc $||x_0|| = 0$ - sprzeczność, bo żeby tak było to $x_0 = 0$.*

Zad.8

Treść. *Norma w przestrzeni l^1 nie jest różniczkowalna w żadnym punkcie*

Rozwiązanie. *Naszą przestrzenią jest $(l_1, ||\cdot||)$. Mamy do rozpatrzenia dwa przypadki, gdy nasze ciągi są określone nad ciałem liczb zespolonych $\mathbb{C}$ i nad ciałem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$. Przypadek dla liczb zespolonych mamy załatwiony od razu na mocy zadania 6, które mówi nam, że norma w przestrzeni zespolonej nie jest różniczkowalna w żadnych punkcie, zatem pozostaje przypadek rzeczywisty.*

$$(x_N)_{N\in\mathbb{N}} = x \in l_1 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \wedge \sum_{N=1}^{\infty} |x_N| < \infty$$

Przypuśćmy, że funkcja jest różniczkowalna, a kandydatem na pochodną jest funkcja $\varphi\colon l_1 \to \mathbb{K}$, gdzie $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (ale tak naprawdę $\mathbb{R}$), gdyż mamy doczynienia z normą. Zatem tak naprawdę poszukujemy funkcjonału liniowego i ciągłego. Jedynym kandydatem na taki funkcjonał (na mocy odpowiedniego twierdzenia np. z książki Musielaka tw.18.2) jest odwzorowanie postaci

$$\varphi(h) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n h_n$$

gdzie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem ograniczonym (wtedy mamy szereg zbieżny), a $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l_1$. Wtedy też powinniśmy mieć

$$0 = \frac{||x+h|| - ||x|| - \varphi(h)}{||h||} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + h_n| - \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| - \sum_{n=1}^{\infty} a_n h_n}{||h||}$$

Na mocy ograniczoności ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ możemy wybrac ściśle rosnący podciąg $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ liczb naturalnych, że ciąg a_{m_n} będzie zbieżny (powiedzmy, że do pewnego g). Następnie ustalmy liczbę $k \in \mathbb{N}$ i zdefiniujmy

$$h_n = \begin{cases} 0 & n \neq m_k \\ \alpha & n = m_k \end{cases}$$

Wtedy wracając do naszego wyrażenia mamy wstawiając postać h_n określoną wzorem powyżej

$$\frac{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + h_n| - \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| - \sum_{n=1}^{\infty} a_n h_n}{||h||} = \frac{\sum_{n\neq m_k}^{\infty} |x_n| + |x_{m_k} + \alpha| - \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| - \alpha a_{m_k}}{|\alpha|} =$$

$$= \frac{|x_{m_k} + \alpha| - |x_{m_k}| - \alpha a_{m_k}}{|\alpha|} \xrightarrow{\alpha \to 0} 0$$

Teraz skorzystamy z faktu, że założyliśmy, że przy $\alpha \to 0$ *wyrażenie zmierza do* 0. *Zastosujemy definicję granicy.*
Ustalmy $\varepsilon > 0$ *i dobierzmy* δ *tak, że* $\underset{h\in l_1}{\forall}$

$$0 \leqslant ||h|| \leqslant \delta \Longrightarrow \left| \frac{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + h_n| - \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| - \sum_{n=1}^{\infty} a_n h_n}{||h||} \right| \leqslant \varepsilon$$

Po zastosowaniu postaci h_n *mamy*

$$0 \leqslant ||\alpha|| \leqslant \delta \Longrightarrow \underset{k\in\mathbb{N}}{\forall} \left| \frac{|x_{m_k} + \alpha| - |x_{m_k}| - \alpha a_{m_k}}{|\alpha|} \right| \leqslant \varepsilon$$

Ustalmy teraz $\alpha \in [-\delta, \delta] \setminus \{0\}$ *(tak aby spełniony był poprzednik implikacji). Wtedy*

$$\underset{k\in\mathbb{N}}{\forall} \left| \frac{|x_{m_k} + \alpha| - |x_{m_k}| - \alpha a_{m_k}}{|\alpha|} \right| \leqslant \varepsilon$$

Przejdźmy z $k \to \infty$ *korzystając przy tym ze zbieżności ciągu* a_{m_k} *do* g.

$$\left| \frac{|\alpha| - \alpha g}{\alpha} \right| \leqslant \varepsilon$$

$$\left| \frac{|\alpha|}{\alpha} - g \right| \leqslant \varepsilon$$

Rozważmy dwa przypadki

- $\alpha \in (0, \delta)$
  $|1 - g| \leqslant \varepsilon \Longrightarrow g = 1$
- $\alpha \in (-\delta, 0)$
  $|-1 - g| \leqslant \varepsilon \Longrightarrow g = -1$

Zachodzi to dla każdego ε, *zatem mamy zbieżność do dwóch granic, sprzeczność. Stąd norma w* l_1 *nie jest różniczkowalna w żadnym punkcie.*

Zad.9

Treść. *Jeżeli* $-\infty < a < b < +\infty$, *a funkcja* $\varphi\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *jest ciągła, to funkcja* $f\colon C([a, b]) \to \mathbb{R}$ *określona wzorem*

$$f(x) = \int_a^b \varphi(t)x(t)^2 \, dt$$

jest różniczkowalna oraz

$$f'(x)h = 2\int_a^b \varphi(t)x(t)h(t) \, dt \quad dla \quad x, h \in C([a, b])$$

Rozwiązanie. *Na początku sprawdzimy czy funkcja, która jest kandydatem na pochodną spełnia jej założenia czyli wykażemy liniowość i ciągłość odwzorowania. W tym celu ustalmy $x \in C([a,b])$ i określmy funkcję*

$$\Lambda\colon C([a,b]) \to \mathbb{R}$$

wzorem

$$\Lambda h = 2\int_a^b \varphi(t)x(t)h(t)\ dt$$

Dla tego odwzorowania sprawdzimy wspomnianą liniowość i ciągłość

- ***Liniowość***
  Ustalmy elementy $h, k \in C([a,b])$ oraz $\alpha \in \mathbb{C}$.
  Addytywność:

$$\begin{aligned}\Lambda(h+k) &= 2\int_a^b \varphi(t)x(t)\left(h(t)+k(t)\right)\ dt = \\ &= 2\int_a^b \varphi(t)x(t)h(t) + \varphi(t)x(t)k(t)\ dt = \\ &= 2\left(\int_a^b \varphi(t)x(t)h(t)\ dt + \int_a^b \varphi(t)x(t)k(t)\ dt\right) = \\ &= 2\int_a^b \varphi(t)x(t)h(t)\ dt + 2\int_a^b \varphi(t)x(t)k(t)\ dt \\ &= \Lambda(h) + \Lambda(k)\end{aligned}$$

  Jednorodność:

$$\Lambda(\alpha h) = 2\int_a^b \varphi(t)x(t)\alpha h(t)\ dt = \alpha \cdot 2\int_a^b \varphi(t)x(t)h(t)\ dt = \alpha\Lambda(h)$$

- ***Ciągłość***
  Skorzystamy z tezy twierdzenia z zadania 19, które mówi, że jeśli norma operatora na argumentach jest szacowana przez iloczyn norm argumentów pomnożony przez stałą c to odwzorowanie jest ciągłe (normą operatora na argumencie h w naszym przypadku jest moduł, bo jesteśmy w $\mathbb{R}$). Ponadto warto wspomnieć, że $||h|| = \sup_{t\in[a,b]} |h(t)|$ dla $h \in C([a,b])$.

$$\begin{aligned}|\Lambda h| &= 2\Big|\int_a^b \varphi(t)x(t)h(t)\Big|\ dt \leqslant \\ &\leqslant 2\int_a^b |\varphi(t)x(t)h(t)|\ dt = \\ &= 2\int_a^b |\varphi(t)|\cdot|x(t)|\cdot|h(t)|\ dt \leqslant \\ &\leqslant ||h||\underbrace{2\int_a^b |\varphi(t)|\cdot|x(t)|\ dt}_{\textit{stałe względem } h}\end{aligned}$$

Zatem obraliśmy dobrego kandydata na pochodną, teraz sprawdzimy czy iloraz różnicowy z tym kandyda-

tem zbiega do 0 *przy* $h \to 0$

$$\frac{|f(x+h)-f(x)-\Lambda h|}{||h||} = \frac{\left|\int_a^b \varphi(t)\cdot(x(t)+h(t))^2\ dt - \int_a^b \varphi(t)x(t)^2\ dt - 2\int_a^b \varphi(t)x(t)h(t)\ dt\right|}{||h||} =$$

$$= \frac{\left|\int_a^b \varphi(t)x(t)^2 + 2\varphi(t)x(t)h(t) + \varphi(t)h(t)^2 - \varphi(t)x(t)^2 - 2\varphi(t)x(t)h(t)\ dt\right|}{||h||} =$$

$$= \frac{\left|\int_a^b \varphi(t)h(t)^2\ dt\right|}{||h||} \leqslant \frac{\int_a^b |\varphi(t)|\cdot|h(t)|^2\ dt}{||h||} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{||h||^2\int_a^b |\varphi(t)|\ dt}{||h||} = ||h||\int_a^b |\varphi(t)|\ dt \xrightarrow{h\to 0} 0$$

Zatem odwzorowanie Λ *jest pochodną.*

Zad.15

Treść. *Funkcja* $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *określona wzorem*

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & \textit{jeżeli } (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & \textit{jeżeli } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

jest różniczkowalna w punkcie $(0,0)$*, ale pochodne cząkowe pierwszego rzędu tej funkcji nie są ciągłe w tym punkcie.*

Rozwiązanie.

- *Różniczkowalność w punkcie* $(0,0)$

  Załóżmy, że kandydatem na pochodną w punkcie $(0,0)$ *jest* 0*, rozpiszmy iloraz różnicowy i sprawdźmy czy rzeczywiście wybraliśmy dobrego kandydata.*

$$\frac{f((0,0)+(h_1,h_2))-f(0,0)-0}{||(h_1,h_2)||} = \frac{(h_1^2+h_2^2)\cdot\sin\frac{1}{h_1^2+h_2^2}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \underbrace{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}_{\xrightarrow{(h_1,h_2)\to(0,0)}0}\cdot\underbrace{\sin\frac{1}{h_1^2+h_2^2}}_{\textit{ograniczone}} \xrightarrow{(h_1,h_2)\to(0,0)} 0$$

- *Pochodne cząstkowe*

  Wystarczy, że policzymy pochodną cząstkową ze względu na zmienną x*, pochodna ze względu na* y *będzie analogiczna ze względu na postać funkcji.*

$$f_{|1}(x,y) = 2x\cdot\sin\frac{1}{x^2+y^2} + (x^2+y^2)\cdot\cos\frac{1}{x^2+y^2}\cdot\frac{-2x}{(x^2+y^2)^2} = 2x\cdot\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x\cdot\cos\frac{1}{x^2+y^2}}{x^2+y^2}$$

  Wykazaliśmy istnienie pochodnej cząstkowej dla punktów $(x,y)\neq(0,0)$*. Dla punktu* $(x,y)=(0,0)$ *musimy wykazać istnienie z definicji.*

$$f_{|1}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot\sin\frac{1}{x^2}}{x} = \lim_{x\to 0}\underbrace{x}_{\to 0}\cdot\underbrace{\sin\frac{1}{x^2}}_{\textit{ograniczone}} = 0$$

- *Ciągłość w punkcie* $(0,0)$

  W celu zaprzeczenia ciąłości w punkcie zastosujemy definicję ciągłości Heinego. Ustalimy ciąg argumentów zbieżny do 0 *i pokażemy, że ciąg wartości nie jest zbieżny do wartości pochodnej cząstkowej w punkcie* $(0,0)$ *równej* 0*. ciąg, który wybierzemy to* $\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi n}}, \frac{1}{2\sqrt{\pi n}}\right)$*. Wstawmy go do postaci pochodnej cząstkowej i zobaczmy do czego dojdziemy przy* $n \to \infty$*.*

$$f_{|1}\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi n}}, \frac{1}{2\sqrt{\pi n}}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi n}} \cdot \sin \frac{1}{(\frac{1}{2\sqrt{\pi n}})^2 + (\frac{1}{2\sqrt{\pi n}})^2} - \frac{2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi n}} \cdot \cos \frac{1}{(\frac{1}{2\sqrt{\pi n}})^2 + (\frac{1}{2\sqrt{\pi n}})^2}}{(\frac{1}{2\sqrt{\pi n}})^2 + (\frac{1}{2\sqrt{\pi n}})^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \cdot \underbrace{\sin 2\pi n}_{0} - \frac{\frac{1}{\sqrt{\pi n}} \cdot \overbrace{\cos 2\pi n}^{1}}{\frac{1}{2\pi n}} =$$

$$= -\frac{\frac{1}{\sqrt{\pi n}}}{\frac{1}{2\pi n}} = -2\sqrt{\pi n} \xrightarrow{n\to\infty} -\infty$$

  Zatem ciąg wartości nie zbiega do wartości pochodnej cząstkowej w punkcie $(0,0)$ *i przeczy w ten sposób ciągłości w tym punkcie.*

Zad.19

Treść. *Odwzorowanie* N*-liniowe* $\Lambda\colon \bigtimes_{j=1}^{N} X_j \to Y$ *jest ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka stała* $c \in [0,\infty)$*, że*

$$||\Lambda(x_1,\ldots,x_N)|| \leqslant c \prod_{j=1}^{N} ||x_j|| \quad dla \quad (x_1,\ldots,x_N) \in \bigtimes_{j=1}^{N} X_j$$

Rozwiązanie. *W celu udowodnienia tezy musimy udowodnić dwie implikacje.*
$(\Longrightarrow)$
Zakładamy, że Λ *jest funkcją ciągłą. Rozpiszmy ciągłość z definicji Cauchy'ego (w zerze).*

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{(x_1,\ldots,x_N)\in \bigtimes_{j=1}^{N} X_j} ||(x_1,\ldots,x_N)|| \leqslant \delta \Rightarrow ||\Lambda(x_1,\ldots,x_N)|| \leqslant \varepsilon$$

Ustalmy $\varepsilon = 1$ *i dobierzmy* $\delta > 0$*, mamy wtedy*

$$\forall_{(x_1,\ldots,x_N)\in \bigtimes_{j=1}^{N} X_j} ||(x_1,\ldots,x_N)|| \leqslant \delta \Rightarrow ||\Lambda(x_1,\ldots,x_N)|| \leqslant 1$$

Musimy znaleźć punkt spełniający poprzednik implikacji. Zatem załóżmy, że $(x_1,\ldots,x_n) \in \bigtimes_{j=1}^{N} X_j$*, gdzie* $x_i \neq 0$ *dla wszystkich* $i \in \{1,\ldots,N\}$ *(gdyby choć jedna współrzędna była zerem to uzyskalibyśmy to chcemy z automatu). Niech naszym kandydatem będzie punkt postaci* $\left(\frac{x_1}{||x_1||},\ldots,\frac{x_N}{||x_N||}\right)\frac{\delta}{\sqrt{N}}$*. Sprawdźmy jego normę.*

$$\left|\left|\left(\frac{x_1}{||x_1||},\ldots,\frac{x_N}{||x_N||}\right)\frac{\delta}{\sqrt{N}}\right|\right| = \frac{\delta}{\sqrt{N}} \cdot \sqrt{\left(\frac{||x_1||}{||x_1||}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{||x_N||}{||x_N||}\right)^2} = \frac{\delta}{\sqrt{N}} \cdot \sqrt{N} = \delta$$

Punkt spełnia poprzednik implikacji, wyliczmy zatem normę odwzorowania Λ na tym punkcie.

$$\left\|\Lambda\left(\frac{\delta}{\sqrt{N}}\left(\frac{x_1}{||x_1||},\dots,\frac{x_N}{||x_N||}\right)\right)\right\| = \left\|\Lambda\left(\frac{\delta x_1}{\sqrt{N}||x_1||},\dots,\frac{\delta x_N}{\sqrt{N}||x_N||}\right)\right\| = \frac{\delta^N\cdot ||\Lambda(x_1,\dots,x_N)||}{\sqrt{N}^n\cdot ||x_1||\cdot\ldots\cdot||x_N||}\leqslant 1$$

Przemnażając obie strony przez $\dfrac{\sqrt{N}^N}{\delta^N}\cdot ||x_1||\cdot\ldots\cdot||x_N||$ *otrzymujemy*

$$||\Lambda(x_1,\dots,x_N)||\leqslant\prod_{j=1}^N ||x_j||\cdot\underbrace{\frac{\sqrt{N}^N}{\delta^N}}_{c}$$

Pora na dowód z prawej strony w lewą.
$(\Longleftarrow)$
Ustalmy $c>0$ *takie, że* $||\Lambda(x_1,\dots,x_N)||\leqslant c\prod_{j=1}^N ||x_j||$.

Ponadto ustalmy $(x_1,\dots,x_N),(y_1,\dots,y_N)\in\bigtimes_{j=1}^N X_j$. *Oszacujemy normę różnicy funkcji* Λ *na tych punktach.*

$$\begin{aligned}&||\Lambda(x_1,\dots,x_N)-\Lambda(y_1,\dots,y_N)||\leqslant ||\Lambda(x_1,\dots,x_N)-\Lambda(y_1,x_2,\dots,x_N)||+\\&+||\Lambda(y_1,x_2,\dots,x_N)-\Lambda(y_1,y_2,x_3,\dots,x_N)||+\dots+||\Lambda(y_1,\dots,y_{N-1},x_N)-\Lambda(y_1,\dots,y_N)||=\\&=||\Lambda(x_1-y_1,x_2,\dots,x_N)||+||\Lambda(y_1,x_2-y_2,x_3,\dots,x_N)||+\dots+||\Lambda(y_1,\dots,y_{N-1},x_N-y_N)||\leqslant\\&=c\cdot||x_1-y_1||\cdot||x_2||\cdot\ldots\cdot||x_N||+\dots+c\cdot||y_1||\cdot\ldots\cdot||y_{N-1}||\cdot||x_N-y_N||\xrightarrow{(y_1,\dots,y_N)\to(x_1,\dots,x_N)}0\end{aligned}$$

Zad.20

Treść. *Jeżeli* $\Lambda\colon\bigtimes_{j=1}^N X_j\to Y$ *jest ciągłym odwzorowaniem* N*-liniowym, to*

- $||\Lambda(x_1,\dots,x_N)||\leqslant||\Lambda||\prod_{j=1}^N||x_j||$ *dla* $(x_1,\dots,x_N)\in\bigtimes_{j=1}^N X_j$
- $||\Lambda||=\sup\{||\Lambda(x_1,\dots,x_N)||\colon (x_1,\dots,x_N)\in\bigtimes_{j=1}^N X_j,\ ||x_j||\leqslant 1$ *dla* $j\in\{1,\dots,N\}$ *oraz (jeżeli* $X_1\neq\{0\},\dots,X_N\neq\{0\}$*)*
- $||\Lambda||=\sup\{||\Lambda(x_1,\dots,x_N)||\colon (x_1,\dots,x_N)\in\bigtimes_{j=1}^N X_j,\ ||x_j||=1$ *dla* $j\in\{1,\dots,N\}$ *oraz (jeżeli* $X_1\neq\{0\},\dots,X_N\neq\{0\}$*)*

Rozwiązanie.

Zad.21

Treść. *Funkcja, która każdemu ciągłemu odwzorowaniu N-liniowemu* $\Lambda\colon \bigtimes_{j=1}^{N} X_j \to Y$ *przyporządkowuje liczbę* $||\Lambda||$ *określoną wzorem*

$$(*) \qquad ||\Lambda|| = \inf\{c \in [0,\infty)\colon \underset{(x_1,\ldots,x_N)\in\bigtimes_{j=1}^{N} X_j}{\forall} (||\Lambda(x_1,\ldots,x_N) \leqslant c\prod_{j=1}^{N}||x_j||)\}$$

jest normą w przestrzeni liniowej $L(X_1,\ldots,X_N;Y)$*. Jeżeli* Y *jest przestrzenią Banacha, to* $L(X_1,\ldots,X_N;Y)$ *z normą określoną wzorem* $(*)$ *też jest przestrzenią Banacha.*

Rozwiązanie.

Zad.22

Treść. *Jeżeli* $X_1,\ldots,X_N$ *są przestrzeniami skończenie wymiarowymi, to każde odwzorowanie N-liniowe* $\Lambda\colon \bigtimes_{j=1}^{N} X_j \to Y$ *jest ciągłe.*

Rozwiązanie.

Zad.25

Treść. *W przestrzeni liniowej* $C([0,1])$ *rozważamy normę całkową*

$$||x|| = \int_0^1 |x(t)|\ dt \quad \textit{dla } x \in C([0,1])$$

Odwzorowanie $\Lambda\colon C([0,1])\times C([0,1]) \to \mathbb{R}$ *dane wzorem*

$$\Lambda(x,y) = \int_0^1 x(t)y(t)\ dt$$

jest dwuliniowe i ciągłe względem każdej ze swoich zmiennych, ale nie jest ciągłe.

Rozwiązanie. *Na początku pokażemy, że* Λ *jest odwzorowaniem dwuliniowym. Musimy pokazać, że*

$$\Lambda(x+\alpha z, y) = \Lambda(x,y) + \alpha\Lambda(z,y)$$

oraz

$$\Lambda(x, y+\alpha z) = \Lambda(x,y) + \alpha\Lambda(x,z)$$

dla $x,y,z \in C([0,1])$ *oraz* $\alpha\in\mathbb{R}$*.*
Łatwo zauważyć patrząc na funkcję Λ*, że wystarczy pokazać jeden z tych warunków, a drugi będzie symetryczny. Zajmijmy się pierwszym. Ustalmy* $x,y,z\in C([0,1])$ *oraz* $\alpha\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\Lambda(x+\alpha z, y) &= \int_0^1 (x+\alpha z)(t)y(t)\ dt = \\ &= \int_0^1 [x(t)+\alpha z(t)]y(t)\ dt = \\ &= \int_0^1 x(t)y(t)+\alpha z(t)y(t)\ dt = \\ &= \int_0^1 x(t)y(t)\ dt + \alpha\int_0^1 z(t)y(t)\ dt = \\ &= \Lambda(x,y)+\alpha\Lambda(z,y)\end{aligned}$$

Wiemy zatem, że Λ *jest odwzorowaniem dwuliniowym. Teraz korzystając z tego pokażemy, że* Λ *nie jest odwzorowaniem ciągłym. Przypuśćmy, że tak jest, wtedy na mocy odpowiedniego twierdzenia (zadanie 19) wiemy, że*

$$\underset{c>0}{\exists} \underset{x,y\in C([0,1])}{\forall} |\Lambda(x,y)| \leqslant c||x|| \cdot ||y||$$

Musimy znaleźć takie ciągi funkcji ciągłych $x_n(t)$ *i* $y_n(t)$*, które doprowadzą nas do sprzeczności. Weźmy* $x_n(t) = t^n = y_n(t)$*, wtedy*

$$|\Lambda(x_n,y_n)| = |\Lambda(x_n,x_n)| = \int_0^1 t^{2n}\ dt = \frac{1}{2n+1}$$

oraz

$$||x_n|| = \int_0^1 t^n\ dt = \frac{1}{n+1}$$

Zatem jeśli Λ *jest ciągłe zachodzi*

$$\frac{1}{2n+1} \leqslant c \cdot \frac{1}{(n+1)^2}$$

i licząc dalej zauważamy, że

$$\frac{(n+1)^2}{2n+1} \leqslant c$$

Przy $n \to \infty$ *widzimy, że lewa strona dąży do nieskończoności, a zatem* c *musi być nieskończone, sprzeczność.*

Na koniec pozostało nam sprawdzenie, że Λ *jest ciągłe ze względu na każdą zmienną. Ustalmy w tym celu* $y \in C([0,1])$*, zauważmy że*

$$\Lambda(\bullet, y)\colon C([0,1]) \to \mathbb{R}$$

jest odwzorowanie liniowym. Podobnie jak przy zaprzeczaniu ciągłości tak i w tym zadaniu skorzystamy z twierdzenia z zadania 19.

$$|\Lambda(x,y)| = \left|\int_0^1 x(t)y(t)\ dt\right| \leqslant \int_0^1 |x(t)|\cdot|y(t)|\ dt \leqslant \int_0^1 |x(t)|\cdot M\ dt = M\int_0^1 |x(t)|\ dt = M||x||$$

gdzie $x \in C([0,1])$ *oraz* $M = \sup\{|y(t)|\colon t\in[0,1]\} < \infty$
Dla drugiej zmiennej wygląda to symetrycznie, stąd Λ *jest ciągłe ze względu na każdą ze swoich zmiennych.*

Zad.28

Treść. *Funkcja* $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *określona wzorem*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2}, & \text{jeżeli } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{jeżeli } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ma w punkcie $(0,0)$ *wszystkie pochodne cząstkowe drugiego rzędu oraz* $f_{|12}(0,0) \neq f_{|21}(0,0)$.

Rozwiązanie. *Pochodne cząstkowe wyliczymy "tradycyjnie" czyli najpierw zróżniczkujemy wyrażenie ze względu na zmienna pierwszą (x) oraz drugą (y) uzyskując w ten sposób pochodne cząstkowe rzędu pierwszego.*

$$\begin{aligned} f_{|1}(x,y) &= \frac{(3x^2y-y^3)(x^2+y^2)-(x^3y-xy^3)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \\ &= \frac{3x^4y+3x^2y^3-x^2y^3-y^5-2x^4y+2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} = \\ &= \frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}$$

Zatem pochodna cząstkowa pierwszego rzędu względem pierwszej zmiennej istnieje dla $(x,y) \neq (0,0)$. Dla punktu $(x,y) = (0,0)$ musimy zastosować definicję pochodnej cząstkowej.

$$f_{|1}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x^3} = 0$$

Analogicznie policzymy pochodną cząstkową ze względu na drugą zmienną.

$$\begin{aligned} f_{|2}(x,y) &= \frac{(x^3-3xy^2)(x^2+y^2)-(x^3y-xy^3)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \\ &= \frac{x^5+x^3y^2-3x^3y^2-3xy^4-2x^3y^2+2xy^4}{(x^2+y^2)^2} = \\ &= \frac{x^5-4x^3y^2-xy^4}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}$$

Zatem pochodną mamy policzoną dla $(x,y) \neq (0,0)$. Pochodną w $(x,y) = (0,0)$ policzymy z definicji.

$$f_{|2}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{0-0}{y^3} = 0$$

Pochodne cząstkowe pierwszego rzędu mamy policzone, w identyczny sposób wyliczyć moglibyśmy pochodne drugiego rzędu czyli $f_{|11}, f_{|12}, f_{|21}, f_{|22}$. Funkcje te możemy policzyć różniczkując uzyskane pochodne pierwszego rzędu względem zmiennej x lub y (jednak w zadaniu nie jest to wymagane, widać jednak, że pochodne te dla punktów $(x,y) \neq (0,0)$ będą istniały). Nas interesują pochodne rzędu drugiego w punkcie $(x,y) = (0,0)$ i nimi się teraz zajmiemy.

$$f_{|11}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f_{|1}(x,0)-f_{|1}(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x^5} = 0$$

$$f_{|22}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f_{|2}(0,y)-f_{|2}(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{0-0}{y^5} = 0$$

$$f_{|12}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f_{|1}(0,y)-f_{|1}(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{-y^5}{y^4}}{y} = -1$$

$$f_{|21}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f_{|2}(x,0)-f_{|2}(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^5}{x^4}}{x} = 1$$

Stąd widzimy, że pochodne drugiego rzędu istnieją oraz $f_{|12}(0,0) \neq f_{|21}(0,0)$

Zad.36

Treść. *Jeżeli kwadrat normy jest funkcją dwukrotnie różniczkowalną w zerze, to norma ta pochodzi od iloczynu skalarnego.*
Szkic: Stosując wzór Taylora stwierdzamy, że dla funkcji f będącej kwadratem normy $||\cdot||$ w przestrzeni X mamy

$$\frac{1}{2}f^{(2)}(0)(x,x) = ||x||^2 \text{ dla } x \in X$$

Rozwiązanie. *Wskazówka mówi nam, że chcemy skorzystać z pewnego narzędzia z działu Wzór Taylora, a dokładnie z wniosku 1.11.1. W naszym zadaniu $n = 2, x_0 = 0$ oraz $f(x) = ||x||^2$, na początek musimy pokazać, że spełniony jest warunek*

$$\underset{j\in\{1,\dots,n-1\}}{\forall} f^{(j)}(x_0) = 0$$

czyli w naszym przypadku do wykazania mamy, że $(||\cdot||^2)^{(1)}(0) = 0$, zatem policzmy iloraz różnicowy przy założeniu, że kandydatem na pochodną jest odwzorowanie zerowe.

$$\lim_{h\to 0}\frac{||0+h||^2 - ||0||^2 - 0}{||h||} = \lim_{h\to 0}\frac{||h||^2}{||h||} = \lim_{h\to 0}||h|| = 0$$

czyli założenie z wniosku jest spełnione - pierwsza pochodna w punkcie 0 jest równa 0. Stąd wiemy, że

$$\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(h,\dots,h) = \lim_{\alpha\to 0+}\frac{f(x_0+\alpha h) - f(x_0)}{\alpha^n}$$

co przy naszych danych oznacza, że

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2!}(||\cdot||^2)^{(2)}(0)(x,x) &= \lim_{\alpha\to 0^+}\frac{||0+\alpha x||^2 - ||0||^2}{\alpha^2} = \\
&= \lim_{\alpha\to 0^+}\frac{||\alpha x||^2}{\alpha^2} = \\
&= \lim_{\alpha\to 0^+}\frac{\alpha^2||x||^2}{\alpha^2} = \\
&= ||x||^2
\end{aligned}$$

Oznaczmy $\Lambda := \frac{1}{2}(||\cdot||^2)^{(2)}(0)$ (czyli $\Lambda(x,x) = \frac{1}{2}(||\cdot||^2)^{(2)}(0)(x,x) = ||x||^2$) Wykażemy teraz, że spełniona jest identyczność równoległoboku co świadczyć będzie, że norma pochodzi od iloczynu skalarnego.

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)$$

Ustalmy $x, y \in X$

$$\begin{aligned}
||x+y||^2 + ||x-y||^2 &= \Lambda(x+y,x+y) + \Lambda(x-y,x-y) = \\
&= \Lambda(x,x) + \Lambda(x,y) + \Lambda(y,x) + \Lambda(y,y) + \Lambda(x,x) - \Lambda(x,y) - \Lambda(y,x) + \Lambda(y,y) = \\
&= 2\Lambda(x,x) + 2\Lambda(y,y) = \\
&= 2||x||^2 + 2||y||^2 = \\
&= 2(||x||^2 + ||y||^2)
\end{aligned}$$

co kończy nasze zadanie i pokazuje, że rzeczywiście norma $||\cdot||$ pochodzi od iloczynu skalarnego.

Zad.38

Treść. *Funkcja* $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *określona wzorem*

$$f(x,y) = 2x^3 - 3x^2 + 2y^3 + 3y^2$$

ma ekstremum lokalne tylko w punktach $(0,-1),(1,0)$, *przy czym w punkcie* $(0,-1)$ *ma ona właściwe maksimum lokalne, a w punkcie* $(1,0)$ *właściwe minimum lokalne, ponadto* $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}$.

Rozwiązanie. *Zadanie rozwiążemy wykorzystując wniosek 1.12.3. Na początku musimy znaleźć takie punkty* x_i, *w których* $f_{|1}(x_i) = 0$ *oraz* $f_{|2}(x_i) = 0$. *W tym celu na początku policzmy pochodne cząstkowe funkcji* f.

$$f_{|1}(x,y) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$$

$$f_{|2}(x,y) = 6y^2 + 6y = 6y(y+1)$$

Przyrównajmy teraz obie pochodne cząstkowe do zera.

$$6x(x-1) = 0$$

$$6y(y+1) = 0$$

Stąd widzimy, że $x = 0 \vee x = 1$ *oraz* $y = 0 \vee y = -1$. *Mamy zatem cztery możliwości, oznaczmy je* $x_1 = (0,0)$, $x_2 = (0,-1)$, $x_3 = (1,0)$, $x_4 = (1,-1)$. *Kolejnym krokiem jest obliczenie wyznacznika macierzy złożonej z pochodnych cząstkowych drugiego rzędu. Łatwo zauważyć, że* $f_{|11}(x,y) = 12x - 6, f_{|22}(x,y) = 12y + 6$ *oraz* $f_{|12}(x,y) = f_{|21}(x,y) = 0$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 12x-6 & 0 \\ 0 & 12y+6 \end{vmatrix} = 144xy + 72x - 72y - 36$$

Zobaczmy teraz, w których punktach x_i *dla* $i \in \{1,2,3,4\}$ *wyznacznik ten jest ostro większy od* 0.

$$x_1 = (0,0)\ \Delta = -36 < 0$$

$$x_2 = (0,-1)\ \Delta = 72 - 36 = 36 > 0$$

$$x_3 = (1,0)\ \Delta = 72 - 36 = 36 > 0$$

$$x_4 = (1,-1)\ \Delta = -144 + 72 + 72 - 36 = -36 < 0$$

Widzimy, że ekstrema występują w punktach $x_2 = (0,-1)$ *oraz* $x_3 = (1,0)$. *Sprawdźmy teraz czy występują tak maksima czy minima właściwe. W tym celu zobaczmy jaki znak ma* $f_{|11}(x_i)$ *dla* $i \in \{2,3\}$

$$f_{|11}(0,-1) = -6 < 0$$

zatem w punkcie $x_2 = (0,-1)$ *występuje maksimum lokalne właściwe.*

$$f_{|11}(1,0) = 12 - 6 = 6 > 0$$

zatem w punkcie $x_3 = (1,0)$ *występuje minimum lokalne właściwe.*

Zad.43

Treść. *Funkcja* $f\colon (0,\infty)\times(-\pi,\pi)\to\mathbb{R}^2$ *określona wzorem*

$$f(r,\alpha)=(r\cos\alpha, r\sin\alpha)$$

jest dyfeomorfizmem klasy C^∞, $f((0,\infty)\times(-\pi,\pi))=\mathbb{R}^2\setminus((-\infty,0]\times\{0\})$ *oraz*

$$|f'(r,\alpha)|=r \text{ dla } (r,\alpha)\in(0,\infty)\times(-\pi,\pi).$$

Rozwiązanie. *Zacznijmy od wyliczenia modułu pochodnej korzystając z definicji 1.14.1. Odwzorowanie* f *idzie z podzbioru płaszczyzny w płaszczyznę, zatem istnieje jeden możliwy ciąg* $(j_1,j_2)=(1,2)$ *ze wspomnianej definicji. Zatem*

$$|f'(r,\alpha)|=\sqrt{\begin{vmatrix}\cos\alpha & -r\sin\alpha\\ \sin\alpha & r\cos\alpha\end{vmatrix}^2}=\sqrt{(r\cos^2\alpha+r\sin^2\alpha)^2}=\sqrt{r^2}=r$$

gdyż $r\in(0,\infty)$
Korzystając z definicji 1.14.2 widzimy, że nasze odwzorowanie jest regularne, gdyż moduł pochodnej jest większy od zera oraz jest to odwzorowanie klasy C^∞ *(składowe są klasy* C^∞*). Z twierdzenia 1.7.2 wiemy, że różnowartościowe odwzorowanie regularne między przestrzeniami o tym samym wymiarze jest dyfeomorfizmem, zatem do tego aby* f *było dyfeomorfizmem klasy* C^∞ *brakuje nam tylko sprawdzenia różnowartościowości.*
Ustalmy zatem $(r_1,\alpha_1),(r_2,\alpha_2)\in(0,\infty)\times(-\pi,\pi)$ *i załóżmy, że* $f(r_1,\alpha_1)=f(r_2,\alpha_2)$ *czyli*

$$(r_1\cos\alpha_1, r_1\sin\alpha_1)=(r_2\cos\alpha_2, r_2\sin\alpha_2)$$

Składowe powinny być sobie równe, zatem

$$\begin{cases} r_1\cos\alpha_1=r_2\cos\alpha_2\\ r_1\sin\alpha_1=r_2\sin\alpha_2\end{cases}$$

Podnosząc obie równości do kwadratu i dodając do siebie oba równania otrzymujemy

$$r_1^2\cos^2\alpha_1+r_1^2\sin^2\alpha_1=r_2^2\cos^2\alpha_2+r_2^2\sin^2\alpha_2$$

czyli

$$r_1^2=r_2^2$$

a zatem

$$r_1=r_2$$

ponieważ $r_1,r_2\in(0,\infty)$*, jednak wtedy kąty* α_1 *i* α_2 *sa sobie równe, gdyż bierzemy je z przedziału* $(-\pi,\pi)$*.*
A zatem f *jest dyfeomorfizmem klasy* C^∞*.*

Na koniec pokażemy, że $f((0,\infty)\times(-\pi,\pi))=\mathbb{R}^2\setminus((-\infty,0]\times\{0\})$*. Rozpatrzymy zawieranie się w obie strony.*
" $\subseteq$ "
Przypuśćmy, że istnieje $(r,\alpha)\in(0,\infty)\times(-\pi,\pi)$ *takie, że*

$$f(r,\alpha)\in(-\infty,0]\times\{0\}$$

czyli

$$(r\cos\alpha, r\sin\alpha) \in (-\infty, 0] \times \{0\}$$

stąd

$$r\cos\alpha \leqslant 0 \wedge r\sin\alpha = 0$$

wiedząc, że $r > 0$ *zauważamy, że*

$$\cos\alpha \leqslant 0 \wedge \sin\alpha = 0$$

$\sin\alpha = 0$, *zatem* $\alpha = 0$, *mamy więc sytuację*

$$\cos 0 \leqslant 0$$

co jest sprzecznością, bo $\cos 0 = 1$.
" $\supseteq$ "
Ustalmy $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus ((-\infty, 0] \times \{0\})$, *pytamy czy istnieje* $(r, \alpha) \in (0, \infty) \times (-\pi, \pi)$ *takie, że*

$$f(r, \alpha) = (x, y)$$

czyli

$$(r\cos\alpha, r\sin\alpha) = (x, y)$$

z faktu, że mamy równość po współrzędnych

$$\begin{cases} r\cos\alpha = x \\ r\sin\alpha = y \end{cases}$$

Podnosimy obustronnie do kwadratu

$$\begin{cases} r^2\cos^2\alpha = x^2 \\ r^2\sin^2\alpha = y^2 \end{cases}$$

i dodając do siebie równości uzyskujemy

$$r^2 = x^2 + y^2$$

zatem

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$$

Przekształcając wyjściowy układ równań (dzieląc przez r*) otrzymujemy*

$$\begin{cases} \cos\alpha = \frac{x}{r} \\ \sin\alpha = \frac{y}{r} \end{cases} \qquad (*)$$

Zauważmy, że z jedynki trygonometrycznej

$$\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1$$

stąd

$$\frac{x^2 + y^2}{r^2} = 1$$

i wstawiając wyżej wyliczone r *mamy*

$$\frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = 1$$

zatem

$$\underset{\alpha\in(-\pi,\pi]}{\exists}$$

takie, że spełniony jest układ $(*)$.
Z przedziału $(-\pi,\pi]$ *wykluczyć musimy* π, *zauważmy, że punkt postaci* (r,π) *nie należy do* $\mathbb{R}^2\setminus((-\infty,0]\times\{0\})$ *(czyli należy do* $((-\infty,0]\times\{0\})$*). Wiemy, to gdyż*

$$\cos(\pi)=-1\wedge\sin(\pi)=0$$

zatem

$$r\cos(\pi)=-r\wedge r\sin(\pi)=0$$

stąd

$$f(r,\pi)=(-r,0)\in(-\infty,0]\times\{0\}$$

Zad.46

Treść. *Funkcja* $f\colon(-1,2\pi)\to\mathbb{R}^2$ *określona wzorem*

$$f(t)=\begin{cases}(1,t), & \text{jeżeli } t\in(-1,0)\\ (\cos t,\sin t, & \text{jeżeli } t\in[0,2\pi)\end{cases}$$

jest różnowartościowym odwzorowaniem regularnym, ale nie jest dyfeomorfizmem.

Rozwiązanie. *Na początku pokażemy różnowartościowość. Musimy uwzględnić 3 przypadku, 2 gdy argumenty są z jednego przedziału i trzeci gdy są z mieszanych przedziałów*

- *Ustalmy* $s,t\in(-1,0)$ *i załóżmy, że* $f(s)=f(t)$. *Rozpisując wzór od razu zauważamy równość argumentów*

  $$(1,s)=(1,t)$$

  czyli $t=s$

- *Ustalmy* $s,t\in[0,2\pi)$ *i załóżmy, że* $f(s)=f(t)$. *Rozpisując wzór mamy*

  $$(\cos(s),\sin(s))=(\cos(t),\sin(t))$$

  Na przedziale $[0,2\pi)$ *funkcja sinus ma te same wartości dla dwóch róznych argumentów w przedziałach* $[0,\pi)$ *i* $(\pi,2\pi)$, *jednak w tych przedziałach funkcja cosinus jest róznowartościowa, zatem* $t=s$

- *Ustalmy* $s\in(-1,0)$ *i* $t\in[0,2\pi)$ *i załóżmy, że* $f(s)=f(t)$, *rozpisując wzór mamy*

  $$(1,s)=(\cos(t),\sin(t))$$

  czyli $1=\cos(t)$, *stąd* $t=0$, *ale wtedy* $s=\sin 0=0$, *lecz* $0\notin(-1,0)$ *zatem ten przypadek odrzucamy.*

Funkcja f jest różnowartościowa. Teraz zgodnie z definicją 1.14.2 musi być ona klasy C^1, a zatem róźniczkowalna i pochodna ma być ciągła oraz moduł pochodnej musi być większy od 0. Wpierw sprawdzimy rózniczkowalność. Jedynym punktem, w którym funkcja mogłaby nie być rózniczkowalna jest punkt $t = 0$. Wyliczmy zatem iloraz róznicowy podchodząc z lewej i z prawej strony do 0.

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{(1,h) - (1,0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{(0,h)}{h} = (0,1)$$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{(\cos(h), \sin(h)) - (1,0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{(\cos(h) - 1, \sin(h))}{h} = (0,1)$$

Widzimy, że są one takie same, zatem $f'(0) = (0,1)$ i funkcja f jest różniczkowalna, pozostaje sprawdzić czy pochodna jest ciągła, aby mieć klasę C^1. W tym celu będziemy zmierzać do 0 analogicznie jak powyżej z lewej i z prawej strony.

$$\lim_{h\to 0^-} f'(h) = \lim_{h\to 0^-} (0,1) = (0,1) = f'(0)$$

$$\lim_{h\to 0^+} f'(h) = \lim_{h\to 0^+} (-\sin(h), \cos(h)) = (0,1) = f'(0)$$

Zatem f' jest ciągła i funkcja f jest klasy C^1

Pora na wyliczenie modułu pochodnej, funkcja f idzie z podzbioru prostej w płaszczyznę, mamy zatem dwa możliwe ciągi $(1), (2)$ przez co suma będzie miała 2 składniki. Oczywiście musimy rozważać trzy przypadki

$$|f'(t)| = \sqrt{f_1'(t)^2 + f_2'(t)^2} = \left\{ \begin{array}{rl} \sqrt{0^2 + 1^2}, & t \in (-1,0) \\ \sqrt{0^2 + 1^2}, & t = 0 \\ \sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2}, & t \in (0, 2\pi) \end{array} \right\} = 1 > 0$$

Moduł pochodnej jest zawsze większy od 0, a funkcja jest klasy C^1, zatem f jest odwzorowaniem regularnym.

Ostatnią kwestią jest pokazanie, że f nie jest dyfeomorfizmem czyli odwrotna funkcja f^{-1} nie jest ciągła. W tym celu weźmy taki ciąg $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$, że

$$(x_n, y_n) \to (1,0)$$

Ponadto weźmy ciąg $t_n \to 2\pi$ oraz niech $x_n = \cos(t_n)$ i $y_n = \sin(t_n)$ (ciągi te zmierzają odpowiednio do 1 i do 0, więc są dobrze wybrane). Ponadto zauważmy, że $f^{-1}((1,0)) = 0$ Przypuśćmy, że funkcja f^{-1} jest ciągła, zachodzi wtedy

$$f^{-1}((x_n, y_n)) \to f^{-1}(1,0)$$

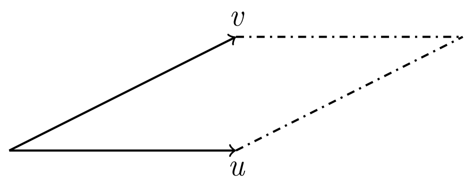
Ale zauważmy, że

$$f^{-1}((x_n, y_n)) = f^{-1}((\cos(t_n), \sin(t_n))) = t_n \to 2\pi \neq 0 = f^{-1}((1,0))$$

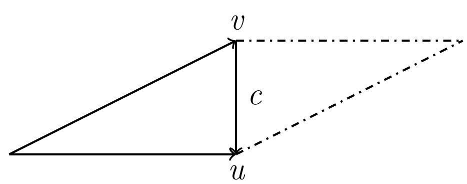
Zatem doszliśmy do sprzeczności, f nie jest dyfeomorfizmem.

Zad.52

Treść. *Jeżeli* $u, v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, *to*
$$\frac{u \circ v}{|u| \cdot |v|}$$
jest cosinusem kąta między tymi wektorami,
$$\frac{|u \wedge v|}{|u| \cdot |v|}$$
jest sinusem kąta między tymi wektorami, natomiast
$$|u \wedge v|$$
jest polem równoległoboku zbudowanego na tych wektorach.



Rozwiązanie. *Na początku dorysujmy wektor będący różnica wektora* u *i* v



Przypomnijmy, że normą wektora (jego długością) na płaszczyźnie jest pierwiastek z iloczynu skalarnego wektora z sobą samym
$$|v| = \sqrt{v \circ v}$$
Na mocy poznanego w szkole średnie twierdzenia cosinusów wiemy, że
$$|c|^2 = |u|^2 + |v|^2 - 2 \cdot |u| \cdot |v| \cdot \cos \alpha$$
gdzie przez α *oznaczymy kąt pomiędzy wektorami* u *i* v.
Z drugiej jednak strony wiemy, że
$$|c|^2 = c \circ c = (u - v) \circ (u - v) = u \circ u - u \circ v - u \circ v + v \circ v = |u|^2 + |v|^2 - 2 \cdot u \circ v$$
Zatem przyrównując obie wartości mamy
$$|u|^2 + |v|^2 - 2 \cdot |u| \cdot |v| \cdot \cos \alpha = |u|^2 + |v|^2 - 2 \cdot u \circ v$$
a zatem
$$|u| \cdot |v| \cdot \cos \alpha = u \circ v$$
czyli
$$\frac{u \circ v}{|u| \cdot |v|} = \cos \alpha$$

Jeśli chodzi o sinusa, to przydatny okaże się pewien związek pomiędzy iloczynem wektorowym, a iloczynem skalarnym (pochodzący z tzw. Tożsamości Lagrange'a)

$$|u \wedge v|^2 = |u|^2 \cdot |v|^2 - (u \circ v)^2 \quad (*)$$

Wiemy, że

$$u \circ v = \cos\alpha \cdot |u| \cdot |v|$$

Wstawiając to do $(*)$ *mamy*

$$|u \wedge v|^2 = |u|^2 \cdot |v|^2 - |u|^2 \cdot |v|^2 \cdot \cos^2\alpha$$

i przekształcając

$$|u \wedge v|^2 = |u|^2 \cdot |v|^2(1 - \cos^2\alpha)$$

czyli

$$|u \wedge v|^2 = |u|^2 \cdot |v|^2 \cdot \sin^2\alpha$$

a zatem

$$\frac{|u \wedge v|^2}{|u|^2 \cdot |v|^2} = \sin^2\alpha$$

i po spierwiastkowaniu

$$\frac{|u \wedge v|}{|u| \cdot |v|} = \sin\alpha$$

Ostatnią rzecza jest policzenie widocznego na rysunku równoległoboku, zauważmy, że trójkąt o bokach u, v, c *ma pole równe*

$$P_{\Delta} = \frac{1}{2}|u| \cdot |v| \cdot \sin\alpha$$

A zatem równeloglobok będzie miał dwa razy większe pole

$$P = |u| \cdot |v| \cdot \sin\alpha$$

Wstawiając wyliczone przed chwilą $\sin\alpha$ *uzyskujemy*

$$P = |u| \cdot |v| \cdot \frac{|u \wedge v|}{|u| \cdot |v|}$$

czyli

$$P = |u \wedge v|$$

Zad.56

Treść. *Funkcja* $\Phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *dana wzorem*

$$\Phi(t) = (\cos t, \sin t, t)$$

jest dyfeomorfizmem klasy C^∞ *(a zatem* $\Phi(\mathbb{R})$ *jest jednowymiarową powierzchnią gładką klasy* C^∞ *- nazywamy ją linią śrubową),*

$$|\Phi'(t)| = \sqrt{2} \text{ dla } t \in \mathbb{R},$$

a długość łuku $\Phi([\alpha, \beta])$ *jest równa* $\sqrt{2}(\beta - \alpha)$*, gdzie* $-\infty < \alpha < \beta < \infty$.

Rozwiązanie. *Zacznijmy od policzenia modułu pochodnej korzystając z definicji 1.14.1. Odwzorowanie Φ idzie z $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}^3$, zatem istnieją 3 możliwe ciągi jednoelementowe ściśle rosnące $((1),(2),(3))$, stąd w sumie będziemy mieli 3 składniki (pochodne składowych podniesione do kwadratu)*

$$|\Phi'(t)| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

Wedle definicji 1.14.2 odwzorowanie Φ jest regularne ($\sqrt{2} > 0$), aby było ono dyfeomorfizmem musimy wykazać, że jest ono różnowartościowe oraz odwzorowanie odwrotne jest ciągłe. Na początek wykażemy różnowartościowość Φ.
Ustalmy $t, s \in \mathbb{R}$ i załóżmy, że $\Phi(t) = \Phi(s)$, wtedy

$$(\cos t, \sin t, t) = (\cos s, \sin s, s)$$

Składowe muszą być równe, zatem

$$\begin{cases} \cos t = \cos s \\ \sin t = \sin s \\ t = s \end{cases}$$

Z równości trzecich składowych od razu otrzymujemy róznowartościowość Φ. Pozostaje sprawdzić nam czy odwzorowanie odwrotne Φ^{-1} jest ciągłe. W tym celu ustalmy ciąg $((x_n, y_n, z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ oraz punkt $(x,y,z) \in \Phi(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^3$ taki, że $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n, y_n, z_n) = (x,y,z)$. Φ^{-1} będzie ciągłe gdy

$$\Phi^{-1}((x_n, y_n, z_n)) \xrightarrow{n\to\infty} \Phi^{-1}((x,y,z))$$

Oznaczmy

$$t_n := \Phi^{-1}((x_n, y_n, z_n))_{n\in\mathbb{N}}$$

Obkładając obie strony funkcją Φ otrzymujemy

$$(x_n, y_n, z_n) = \Phi(t_n) = (\cos(t_n), \sin(t_n), t_n)$$

Z równości trzecich składowych wynika, że

$$t_n = z_n \xrightarrow{n\to\infty} z$$

Teraz analogicznie oznaczmy

$$t := \Phi^{-1}((x,y,z))$$

Obkładając jak powyżej funkcją Φ obie strony uzyskujemy

$$(x,y,z) = \Phi(t) = (\cos t, \sin t, t)$$

Z nierówności trzecich składowych

$$t = z$$

Zatem

$$t_n \xrightarrow{n\to\infty} t$$

co należało pokazać. Widzimy stąd, że Φ jest dyfeomorfizmem (Φ^{-1} jest ciągłe) klasy C^∞ (składowe są tej klasy). Korzystając ze wzoru z twierdzenia 2.3.2 wyliczymy teraz $\mu_{\Phi(\mathbb{R})}(\Phi([\alpha,\beta]))$

$$\mu_{\Phi(\mathbb{R})}(\Phi([\alpha,\beta])) = \int_{\Phi^{-1}(\Phi([\alpha,\beta]))} |\Phi'(t)|\; dt = \int_{[\alpha,\beta]} \sqrt{2}\; dt = \sqrt{2}(\beta - \alpha)$$

Zad.59

Treść. *Pole powierzchni torusa z zadania 50 jest równe* $4\pi^2 rR$

Rozwiązanie. *W zadaniu* 50 *mamy funkcję* $\Phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *daną wzorem*

$$\Phi(\alpha,\beta) = ((R + r\cos\alpha)\cos\beta, (R + r\cos\alpha)\sin\beta, r\sin\alpha)$$

Moduł pochodnej funkcji Φ *wynosi* $r(R+r\cos\alpha)$. *Łatwo zauważyć, że mimo iż* α *i* β *są z* $\mathbb{R}$, *to ograniczyć możemy się do przedziału* $[0,2\pi)$ *(do stworzenia torusa wystarczy nam ten przedział), zatem korzystając ze wzoru z twierdzenia 2.3.2 mamy*

$$\begin{aligned}
\mu_{([0,2\pi)^2)}((0,2\pi)^2) &= \int_{\Phi^{-1}(\Phi((0,2\pi)^2))} |\Phi'(\alpha,\beta)|\ dl_2(\alpha,\beta) = \\
&= \int_{\Phi^{-1}(\Phi((0,2\pi)^2))} |\Phi'(\alpha,\beta)|\ d(\alpha,\beta) = \\
&= \int_{((0,2\pi)^2)} r(R + r\cos\alpha)\ d(\alpha,\beta) = \\
&= \int_{(0,2\pi)} \left(\int_{(0,2\pi)} r(R + r\cos\alpha)\ d\alpha \right)\ d\beta = \\
&= 2\pi \int_{(0,2\pi)} r(R + r\cos\alpha)\ d\alpha = \\
&= 2\pi \left(rR \int_{(0,2\pi)} \ d\alpha + r^2 \underbrace{\int_{(0,2\pi)} \cos\alpha\ d\alpha}_{0} \right) = \\
&= 2\pi \cdot 2\pi rR = 4\pi^2 rR
\end{aligned}$$