Analiza Funkcjonalna 2015/2016

Odpowiedzi Prawda-Fałsz + uzasadnienie

- **W każdej przestrzeni unormowanej zbiór zwarty jest domknięty i ograniczony.**
  FAŁSZ - Zgodnie z twierdzeniem nr 7 z wykładu *"W przestrzeni skończenie wymiarowej zbiór jest zwarty witw, gdy jest on domknięty i ograniczony"*, zatem musimy mieć skończenie wymiarową przestrzeń, a nie dowolną.

- **W przestrzeni $C([0,1])$ istnieje kula, która jest zbiorem zwartym.**
  FAŁSZ - Zgodnie z twierdzeniem nr 8 z wykładu *W (każdej) nieskończenie wymiarowej przestrzeni unormowanej (żadna) kula domknięta nie jest zbiorem zwartym"*, oczywiście przestrzeń funkcji ciągłych na przedziale $[0,1]$ jest nieskończenie wymiarowa (jest nawet problem ze wskazaniem jej bazy), zatem nie znajdziemy w niej zwartej kuli. Dokładny opis faktu, że $C([0,1])$ jest nieskończenie wymiarowa znajduje sie tutaj.

- **Przestrzeń sprzężona X^* do przestrzeni X, która nie jest zupełna jest przestrzenią Banacha**
  PRAWDA - Zgodnie z wnioskiem nr 3, który mówi *"Przestrzeń X^* z normą $||x^*|| = \sup\{|x^*x| \colon x \in X,\ ||x|| = 1\}$ jest przestrzenią Banacha"*, nie ma tutaj nic o tym, że X musi być zupełna, ponadto w artykule na wikipedii znalazłem kolejne uzasadnienie *"Jeżeli X jest przestrzenią unormowaną nad ciałem K liczb rzeczywistych bądź zespolonych, to z twierdzenia Banacha-Steinhausa wynika, że przestrzeń $B(X,K)$, wszystkich funkcjonałów liniowych i ciągłych na X jest przestrzenią Banacha"*

- **Norma w przestrzeni $L_2([0,1])$ pochodzi od iloczynu skalarnego**
  PRAWDA - Zarówno dla dużego L_p jak i małego l_p tylko w przypadku $p = 2$ normy pochodzą od iloczynu skalarnego, wykazać to można ponadto licząc identyczność równoległoboku $||f+g||^2 + ||f-g||^2 = 2(||f||^2 + ||g||^2)$ i stosując twierdzenie nr 15 (Jordana von Neumanna).

$$
\begin{aligned}
||f+g||^2 + ||f-g||^2 &= \left(\left(\int_0^1 |f+g|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(\left(\int_0^1 |f-g|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \\
&= \int_0^1 f^2 + 2fg + g^2 + \int_0^1 f^2 - 2fg + g^2 = \\
&= \int_0^1 2f^2 + 2g^2 = \\
&= 2\int_0^1 f^2 + 2\int_0^1 g^2 = \\
&= 2\left(\left(\int_0^1 f^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 + 2\left(\left(\int_0^1 g^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \\
&= 2(||f||^2 + ||g||^2)
\end{aligned}
$$

- **Istnieje skończenie wymiarowa podprzestrzeń nieskończenie wymiarowej przestrzeni unormowanej, która nie jest jej domkniętą podprzestrzenią.**
  FAŁSZ - Zgodnie z wnioskiem nr 2 *"Każda skończenie wymiarowa podprzestrzeń liniowa przestrzeni unormowanej jest domknięta"*, nie ma tu mowy o tym, że przestrzeń ma być skończenie lub nieskończenie wymiarowa, tak jest dla każdej.

- **Istnieje przestrzeń unormowana i taki ciąg jej elementów spełniający warunek Cauchy'ego, że nie jest on zbieżny, a szereg elementów tej przestrzeni zbieżny bezwzględnie jest zbieżny.**

  FAŁSZ - Zgodnie z twierdzeniem nr 4 *"Przestrzeń unormowana jest przestrzenią zupełną witw, gdy w przestrzeni tej każdy szereg bezwzględnie zbieżny jest zbieżny"* wnioskujemy, że jeśli nasza przestrzeń posiada własność, że każdy szereg bezwzględnie zbieżny jest zbieżny to jest to też przestrzeń zupełna (czyli Banacha), a zatem każdy ciąg spełniający w niej warunek Cauchy'ego musi być w niej zbieżny.

- **Istnieje przestrzeń unitarna $(X, (\cdot|\cdot))$ i taki funkcjonał $x^* \in X^*$, że dla każdego $a \in X$ istnieje $x \in X$, że $x^*x \neq (x|a)$**

  PRAWDA (?) - Dokładna odpowiedź wprost nie jest zawarta w wykładzie, jednak jak przyjrzymy się twierdzeniu nr 24 *"Jeżeli* $\underset{x^* \in X^*}{\forall} \underset{a \in X}{\exists!} \underset{x \in X}{\forall} x^*x = (x|a)$ *to przestrzeń unitarna* X *jest zupełna (Hilberta)"* to możemy zauważyć, że gdy ten warunek jest zaprzeczony (tak jak w treści zdania) to mamy po prostu przestrzeń unitarną (a nie Hilberta), która oczywiście może istnieć.

- **Istnieje domknięty operator liniowy, który nie jest ciągły w zerze.**

  PRAWDA (?) - Zgodnie z twierdzeniem nr 35 (Banacha o domkniętym wykresie) *"Załóżmy, że* X, Y *są przestrzeniami Banacha, jeżeli operator* $T \colon X \to Y$ *ma domknięty wykres (jest domknięty) to jest odwzorowaniem ciągłym"* widzimy, że dla operatorów między przestrzeniami zupełnymi nie znajdziemy takiego operatora, bo domkniętość pociąga ciągłość, a ciągłość pociąga ciągłość w dowolnym punkcie (zgodnie z twierdzeniem nr 9), ale będąc poza przestrzeni zupełnymi uda nam sie taki znaleźć. Ponadto w wikipedii w tym artykule jest cytat "Wiele powszechnie występujących nieciągłych operatorów liniowych jest domkniętych, jest to klasa operatorów, które dzielą pewne wspólne cechy z operatorami ciągłymi. Ma sens analogiczne pytanie, czy wszystkie operatory liniowe określone na danej przestrzeni są domknięte. Twierdzenie o wykresie domkniętym zapewnia, że wszystkie wszędzie określone na przestrzeni zupełnej operatory domknięte są ciągłe, a więc w kontekście nieciągłych operatorów domkniętych trzeba zgodzić się na operatory, które nie są określone w każdym punkcie."

- **W nieskończenie wymiarowej przestrzeni Banacha $(X, ||\cdot||)$ istnieje norma, która nie jest równoważna normie $||\cdot||$**

  PRAWDA - Zgodnie z uwagą nr 6 *"W nieskończenie wymiarowej przestrzeni liniowej istnieją normy, które nie są równoważne*, zatem taka norma może istnieć, fakt, że mamy przestrzeń Banacha jest nieistotny. W tym miejscu mamy jako przykład przestrzeń $C([0, 1])$.

- **Każdy otwarty operator liniowy określony na przestrzeni Banacha o wartościach w przestrzeni Banacha jest ciągły.**

  FAŁSZ (?) - Zgodnie z wnioskiem nr 11 podpunkt ii) *"Jeżeli* $T \in L(X, Y)$, $T(X) = Y$ *i* T *jest odwzorowanie różnowartościowym to* $T^{-1} \in L(X, Y)$*"* mamy istotne założenie różnowartościowości, którego w naszym zdaniu nie ma, zatem możemy znaleźć operator otwarty, nie będący operatorem ciągłym.

Analiza Funkcjonalna 2016/2017

Odpowiedzi Prawda-Fałsz + uzasadnienie

- **Przestrzeń skończenie wymiarowa nie musi być domknięta.**
  FAŁSZ - W każdej przestrzeni topologicznej cała przestrzeń jest zbiorem otwarto-domkniętym.

- **W przestrzeni $C([0,1])$ z normą supremum istnieje kula domknięta, która nie jest zbiorem zwartym.**
  PRAWDA - Przestrzeń $C([0,1])$ jest przestrzenią nieskończenie wymiarową, a w niej nie każda kula domknięta i ograniczona musi być zwarta (Wn. 5.3).

- **W każdej przestrzeni unormowanej istnieją normy, które nie są równoważne.**
  FAŁSZ - W skończenie wymiarowej przestrzeni unormowanej każde dwie normy są równoważne (Tw. 5.1).

- **Standardowa norma w przestrzeni $L^1([0,1])$ nie pochodzi od iloczynu skalarnego**
  PRAWDA - Ze wszystkich przestrzeni L^p tylko w przestrzeni L^2 norma pochodzi od iloczynu skalarnego (Str.8,9 Skrypt - Analiza Funkcjonalna)

- **Istnieje przestrzeń Banacha o tej własności, że przestrzeń do niej sprzężona nie jest zupełna.**
  FAŁSZ - Na mocy twierdzenia 13.1 widzimy, że przestrzeń dualna do dowolnej przestrzeni unormowanej jest przestrzenią Banacha czyli zupełna.

- **W każdej przestrzeni Hilberta $(X, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ każda funkcja $x^* \in X^*$ jest postaci $x^*(y) = \langle x|y \rangle$ z pewnym $x \in X$**
  PRAWDA (?) - Na mocy twierdzenia Riesza (Tw.13.4).

- **Istnieje przestrzeń Banacha i szereg jej elementów, który jest bezwględnie zbieżny, lecz nie jest zbieżny.**
  FAŁSZ - Na mocy twierdzenia 3.1.

- **Istnieje przestrzeń unormowana i ciąg jej elementów spełniających warunek Cauchy'ego, które nie jest zbieżny.**
  PRAWDA - Gdyby było inaczej to każda przestrzeń unormowana byłaby przestrzenią Banacha, a tak nie jest.

- **Istnieje odwracalny funkcjonał liniowy i ograniczony, który nie jest ciągły.**
  FAŁSZ - Na mocy twierdzenia 12.1 mamy, że gdy operator jest liniowy i ograniczony to musi być ciągły (punkty iii) i v)).

- **Każdy ortogonalny układ wektorów przestrzeni unitarnej jest liniowo zależny.**
  PRAWDA - Na mocy twierdzenia 10.2.

- **Istnieje przestrzeń Banacha, której nie można uzupełnić do przestrzeni Banacha.**
  FAŁSZ - Na mocy twierdzenia 4.1 każdą przestrzeń (nawet nie Banacha) można uzupełnić do przestrzeni Banacha.

- **Nie każda skończenie wymiarowa przestrzeń unormowana X ma tę własność, że X^* jest izomorficzna z X.**
  FAŁSZ - Na mocy twierdzenia 13.2.

- **Układ trygonometryczny jest zupełny**
  PRAWDA - Na mocy wniosku 22.1.