Analiza Funkcjonalna "po chłopsku"

Zadania do kolokwium

Opracował: Ricko

Spis treści

Rozdział 1

Analiza funkcjonalna - Do kolokwium

1.1 Wstęp

Skrypt (jeśli można to tak nazwać) powstał w celu omówienia podstawowych typów zadań mających się pojawić na kolokwium z analizy funkcjonalnej. Nie jestem żadnym ekspertem w tej dziedzinie, jednak poproszony przez wspaniałe koleżanki, którym się nie odmawia :) postaram się jak najjaśniej przybliżyć metody rozwiązywania "schematycznych" typów zadań.

1.2 Typowe przestrzenie i ich normy

Na samym początku omówie typowe przestrzenie i występujące w nich normy. Dr Kapica zakomunikował, że **nie** poda ich na kolokwium, zatem ich znajomość jest **obowiązkowa**.

Oznaczenie	Opis słowny	Norma
$C([a,b])$	**Przestrzeń funkcji ciągłych na przedziale** $[a,b]$	$\|\|f\|\| = \sup_{x\in[a,b]} \|f(x)\|$
$L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$	**Przestrzeń funkcji całkowalnych z** p**-tą potęgą**	$\|\|f\|\| = \left(\int_\Omega \|f\|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$
$L_\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$	**Przestrzeń funkcji istotnie ograniczonych**	$\|\|f\|\| = ess\ sup_{x\in\Omega}\|f(x)\|$
l_p	**Przestrzeń ciągów sumowalnych z** p**-tą potęgą**	$\|\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$
l_∞	**Przestrzeń ciągów ograniczonych**	$\|\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|\| = \sup\{\|x_n\| \colon n \in \mathbb{N}\}$
c	**Przestrzeń ciągów zbieżnych**	$\|\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|\| = \sup\{\|x_n\| \colon n \in \mathbb{N}\}$
c_0	**Przestrzeń ciągów zbieżnych do** 0	$\|\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|\| = \max\{\|x_n\| \colon n \in \mathbb{N}\}$

Uwagi:

- Supremum istotne *(essential supremum)* dane jest wzorem

$$ess\ sup_{x\in\Omega}|f(x)| = \inf\{\sup\{|f(x)| \colon x \in \Omega \setminus A\} \colon A \in \mathcal{A},\ \mu(A) = 0\} < \infty$$

  Czyli jest to infimum z supremów po wartościach funkcji poza wszystkimi zbiorami miary zero.

- Przestrzeń $L_1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ to po prostu przestrzeń funkcji całkowalnych: $\underset{f\in L_1}{\forall} \int_\Omega |f| \, d\mu < \infty$

- Przestrzeń l_1 to po prostu przestrzeń ciągów bezwzględnie sumowalnych (ciąg sum częściowych ma granice skończoną, to **inne** pojęcie niż zbieżność): $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty$
- Przestrzenie $l_\infty, C([0,1]), c_0, c, L_p, l_p$ dla $p \geqslant 1$ są przestrzeniami Banacha czyli norma w tych przestrzeniach jest **zupełna**.

1.3 Podstawowe nierówności

1.3.1 Höldera

Jeżeli $f \in L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ oraz $g \in L_q(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ gdzie $p, g > 1$ i $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ to zachodzi nierówność

$$\int_\Omega |fg| d\mu \leqslant \left(\int_\Omega |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |f|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}$$

zwana Nierównością Höldera.

1.3.2 Minkowskiego

Jeżeli $f, g \in L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ i $p \geqslant 1$ to zachodzi nierówność

$$\left(\int_\Omega |f+g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_\Omega |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

zwana Nierównością Minkowskiego.

1.3.3 Höldera dla ciągów

Jeżeli $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l_p$ oraz $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l_q$ gdzie $p, g > 1$ i $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ to zachodzi nierówność

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

1.4 Typy zadań

W ramkach będą podawane wymagane do nauczenia podstawy teoretyczne. Zadania postaram się rozwiązywać krok po kroku.

1.4.1 Sprawdzenie czy funkcja jest normą lub iloczynem skalarnym

Bardziej można by się tego spodziewać dla iloczynu skalarnego niż dla normy. Przypomnijmy definicję normy i iloczynu skalarnego.

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K, gdzie $K \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$. **Iloczynem skalarnym** nazywamy określone w $V \times V$ odwzorowanie $f\colon V \times V \to K$ takie, że $f(u,v) = \langle u, v\rangle$ spełniające warunki:

- $\langle u+v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$
- $\langle cu, v\rangle = c\langle u, v\rangle$
- $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$
- $\langle u, u\rangle > 0$ dla $u \neq 0$

gdzie $u, v, w \in V$ i $c \in K$ oraz $\overline{\langle u, v\rangle}$ jest liczbą sprzężoną do $\langle u, v\rangle$.

Zad.1 Wykaż, że poniższa funkcja jest iloczynem skalarnym na przestrzeni $L_2(\mu)$

$$\langle f, g\rangle = \int_X f\overline{g}\ d\mu$$

Sprawdzimy po kolei warunki z definicji.
Niech $f, g, h \in L^2(\mu)$ oraz $c \in \mathbb{C}$.

1. $$\langle f+g, h\rangle = \int_X (f+g)\overline{h}\ d\mu = \int_X f\overline{h} + g\overline{h}\ d\mu = \int_X f\overline{h} d\mu + \int_X g\overline{h}\ d\mu = \langle f, h\rangle + \langle g, h\rangle$$

2. $$\langle cf, g\rangle = \int_X cf\overline{g}\ d\mu = c\int_X f\overline{g}\ d\mu = c\langle f, g\rangle$$

3. Niech $f = u + iv$ oraz $g = z + it$

$$\begin{aligned}\overline{\langle g, f\rangle} &= \overline{\int_X g\overline{f}\ d\mu} = \overline{\int_X (z+it)(\overline{u+iv})\ d\mu} = \overline{\int_X (z+it)(u-iv)\ d\mu} = \overline{\int_X zu - ivz + itu + tv\ d\mu} = \\ &= \overline{\int_X (zu+tv) + i(tu - vz)\ d\mu} = \int_X (zu+tv) - i(tu-vz)\ d\mu = \int_X zu + ivz - itu + tv\ d\mu = \\ &= \int_X (u+iv)(z-it)\ d\mu = \int_X (u+iv)\overline{(z+it)}\ d\mu = \int_X f\overline{g}\ d\mu = \langle f, g\rangle\end{aligned}$$

4. Niech $f = u + iv$ oraz $f \neq 0$

$$\langle f, f\rangle = \int_X f\overline{f}\ d\mu = \int_X (u+iv)(u-iv)\ d\mu = \int_X u^2 + v^2 > 0$$

Zatem nasza funkcja jest iloczynem skalarnym.

1.4.2 Wykazanie równoważności norm

W celu wykazania równoważności norm posłużymy się następującym kryterium.

$$\boxed{\text{Normy } ||\cdot||_1 \text{ i } ||\cdot||_2 \text{ są równoważne} \iff \text{istnieją takie stałe } \alpha, \beta \in (0, \infty), \text{ że } \alpha||x||_1 \leqslant ||x||_2 \leqslant \beta||x||_1}$$

Oznacza to, że musimy oszacować drugą normę przez pierwszą ($||x||_2 \leqslant \beta||x||_1$) oraz pierwszą przez drugą ($||x||_1 \leqslant \frac{1}{\alpha}||x||_2$).
Z kolei najlepszym sposobem wykazania, że normy nie są równoważne jest pokazanie, że mają one w normach różne granice.

Zad.1 Wykazać, że normy $||f||_1$ i $||f||_2$ są równoważne w przestrzeni $C^1([a,b])$

$$||f||_1 = \max\{|f(x)| \colon x \in [a,b]\} + \max\{|f'(x)| \colon x \in [a,b]\}$$

$$||f||_2 = |f(a)| + \max\{|f'(x)| \colon x \in [a,b]\}$$

Najpierw pokażemy oszacowanie normy drugiej przez pierwszą.

$$||f||_2 = |f(a)| + \max\{|f'(x)| \colon x \in [a,b]\} \leqslant \max\{|f(x)| \colon x \in [a,b]\} + \max\{|f'(x)| \colon x \in [a,b]\} = ||f||_1$$

W tym przypadku stała $\beta = 1$
Teraz z kolei musimy pokazać oszacowanie pierwszej normy przez drugą. W tym celu skorzystamy z twierdzenia Lagrange'a

Twierdzenie. *[Lagrange'a o wartości średniej]*
Jeśli funkcja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła w przedziale $[a,b]$ i różniczkowalna w (a,b) to istnieje taki punkt $c \in (a,b)$, że

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Musimy jakoś oszacować wartość funkcji w dowolnym punkcie $x \in [a,b]$, wtedy zachodzić ono będzie także dla maksimum. Zatem korzystając z twierdzenia Lagrange'a dla dowolnego punktu $x \in [a,b]$ istnieje c, takie że

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c)$$

Przekształcamy ten wzór uzyskując

$$f(x) = f(a) + f'(c)(x-a)$$

Obkładamy modułami lewą i prawą stronę i szacujemy.

$$|f(x)| = |f(a) + f'(c)(x-a)| \leqslant |f(a)| + |f'(c)(x-a)| = |f(a)| + |f'(c)||(x-a)| \leqslant |f(a)| + |f'(c)|(b-a) \leqslant$$
$$\leqslant |f(a)| + \max\{|f'(x)| \colon x \in [a,b]\}(b-a)$$

Zachodzi to dla dowolnego x, zatem dla maksimum też

$$\max\{|f(x)| \colon x \in [a,b]\} \leqslant |f(a)| + \max\{|f'(x)| \colon x \in [a,b]\}(b-a)$$

Aby uzyskać postać pierwszej normy dodajemy stronami $\max\{|f'(x)| \colon x \in [a,b]\}$ i uzyskujemy

$$||f||_1 \leqslant |f(a)| + \max\{|f'(x)| \colon x \in [a,b]\}(b-a) + \max\{|f'(x)| \colon x \in [a,b]\}$$

Kontynuujemy szacowanie

$$||f||_1 \leqslant |f(a)|+(b-a+1)\max\{|f'(x)| \colon x \in [a,b]\} \leqslant (b-a+1)(|f(a)|+\max\{|f'(x)| \colon x \in [a,b]\}) = (b-a+1)||f||_2$$

Co oznacza, że $\alpha = \frac{1}{b-a+1}$

Zad.2 Wykazać, że normy $||f||_1$ i $||f||_2$ są równoważne w przestrzeni $C^2([a,b])$

$$||f||_1 = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| + \sup_{x\in[a,b]} |f'(x)| + \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)|$$

$$||f||_2 = |f(a)| + |f(b)| + \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)|$$

Uwaga: w tym zadaniu supremum = maksimum, gdyż funkcja ciągła na zbiorze zwartym przyjmuje kresy. Zacznijmy od oszacowania drugiej normy przez pierwszą.

$$||f||_2 = |f(a)| + |f(b)| + \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)| \leqslant 2\sup_{x\in[a,b]} |f(x)| + \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)| \leqslant$$
$$\leqslant 2\sup_{x\in[a,b]} |f(x)| + 2\sup_{x\in[a,b]} |f'(x)| + 2\sup_{x\in[a,b]} |f''(x)| = 2||f||_1$$

Zatem $\beta = 2$
Teraz pora na oszacowania pierwszej normy przez drugą. W tym celu oznaczmy $||f||_2 = M$ i zauważmy, że $|f(a)| \leqslant M, |f(b)| \leqslant M, \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)| \leqslant M$ oraz

$$|f(b) - f(b)| \leqslant |f(a)| + |f(b)| \leqslant 2M$$

Skorzystamy z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej. Wiemy z niego, że istnieje takie $t \in (a,b)$, że

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(t)$$

Po obłożeniu modułem szacujemy

$$|f'(t)| = \frac{|f(b) - f(a)|}{b-a} \leqslant \frac{2M}{b-a}$$

To oszacowanie jest jednak dla jednego konkretnego t! My potrzebujemy go dla każdego, aby móc oszacować supremum. Dlatego drugi raz stosujemy twierdzenie Lagrange'a. Tym razem nie dla funkcji f, lecz dla jej pochodnej. Zatem dla $x \in [a,b]$ istnieje taki punkt $y \in (x,t)$, że

$$\frac{f'(x) - f'(t)}{x-t} = f''(y)$$

Przekształcamy i szacujemy

$$f'(x) = \underbrace{f'(t)}_{\leqslant \frac{2M}{b-a}} + \underbrace{f''(y)}_{\leqslant M}\underbrace{(x-t)}_{\leqslant (b-a)} \leqslant \frac{2M}{b-a} + M(b-a)$$

To oszacowanie jest dla każdego $x \in [a,b]$ i dzięki niemu możemy szacować supremum wartości pochodnych. Do oszacowania pozostało nam jeszcze supremum wartości funkcji, czyli oszacowanie $|f(x)|$ dla każdego $x \in [a,b]$ i po raz trzeci skorzystamy z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej. Dla każdego $z \in [a,b]$ istnieje $k \in [a,z]$ takie, że

$$\frac{f(z)-f(a)}{z-a} = f'(k)$$

Przekształcamy i szacujemy

$$f(z) = \underbrace{f(a)}_{\leqslant M} + \underbrace{f'(k)}_{\leqslant \frac{2M}{b-a}+M(b-a)} \underbrace{(z-a)}_{\leqslant (b-a)} \leqslant M + \left[\frac{2M}{b-a} + M(b-a)\right](b-a) = 3M + M(b-a)^2$$

I to oszacowanie jest dla każdego $z \in [a,b]$ przez co tak samo będziemy szacowali supremum wartości funkcji. Możemy już przejść do końcowego rachunku

$$\begin{aligned} ||f||_1 &= \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| + \sup_{x\in[a,b]} |f'(x)| + \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)| \leqslant 3M + M(b-a)^2 + \frac{2M}{b-a} + M(b-a) + M = \\ &= M\left(4 + (b-a)^2 + \frac{2}{b-a} + (b-a)\right) = ||f||_2 \left(4 + (b-a)^2 + \frac{2}{b-a} + (b-a)\right) \end{aligned}$$

Zatem $\alpha = \dfrac{1}{\left(4 + (b-a)^2 + \frac{2}{b-a} + (b-a)\right)}$

1.4.3 Sprawdzenie czy dana norma pochodzi od iloczynu skalarnego

Aby wykazać, że norma pochodzi od iloczynu skalarnego należy sprawdzić **warunek równoległoboku**

$$\boxed{||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)\,\forall_{x,y\in X}}$$

Zad.1 Wykaż, że standardowa norma w przestrzeni $C([a,b])$ nie pochodzi od ilozynu skalarnego.

Przypominamy, że normą w $C([a,b])$ jest norma supremum

$$||f|| = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

Musimy wskazać kontrprzykład, który nie spełnia warunku równoległoboku. Weźmy zatem przedział $[a,b]$ oraz funkcje

$$f = \begin{cases} 0 & x\in[0,1] \\ x-1 & x\in(1,2] \end{cases} \qquad g = \begin{cases} 1-x & x\in[0,1] \\ 0 & x\in(1,2] \end{cases}$$

Są to funkcje ciągłe, policzmy ich sumę i różnicę

$$f+g = \begin{cases} 1-x & x\in[0,1] \\ x-1 & x\in(1,2] \end{cases} \qquad f-g = x-1 \text{ dla } x\in[0,2]$$

Przechodzimy do warunku równoległoboku

$$\underbrace{||f+g||^2}_{1} + \underbrace{||f-g||^2}_{1} = 2 \neq 4 = 2(\underbrace{||f||^2}_{1} + \underbrace{||g||^2}_{1})$$

Co pokazuje, że norma supremum w tej przestrzeni nie pochodzi od iloczynu skalarnego.

Zad.2 Wykaż, że standardowe normy w przestrzeniach c i c_0 nie pochodzą od iloczynu skalarnego.

Przypominamy, że normą w c jest $||(x_n)_{n\in\mathbb{N}}|| = \sup\{|x_n|\colon n\in\mathbb{N}\}$, a w c_0 norma $||(x_n)_{n\in\mathbb{N}}|| = \max\{|x_n|\colon n\in\mathbb{N}\}$. W kontrprzykładzie, który wskażemy wartości obydwu norm będą się pokrywały. Weźmy dwa elementy należące do c_0 i c

$$x = (1,0,0,\dots)$$

$$y = (0,1,0,\dots)$$

Policzmy dla nich warunek równoległoboku

$$\underbrace{||(1,1,0,\dots)||^2}_{1} + \underbrace{||(1,-1,0,\dots)||^2}_{1} = 2 \neq 4 = 2(\underbrace{||(1,0,0\dots)||^2}_{1} + \underbrace{||(0,1,0,\dots)||^2}_{1})$$

Co pokazuje, że normy w c i c_0 nie pochodzą od iloczynu skalarnego.

Zad.3 Wykaż, że standardowa norma w przestrzeni l_p dla $p\neq 2$ nie pochodzi od ilozynu skalarnego.

Przypominamy, że normą w l_p jest norma dana wzorem

$$||(x_n)_{n\in\mathbb{N}}|| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Weźmy takie same jak w poprzednim zadaniu x i y

$$x = (1, 0, 0, \dots)$$

$$y = (0, 1, 0, \dots)$$

Policzmy dla nich warunek równoległoboku

$$||(1, 1, 0, \dots)||^2 + ||(1, -1, 0, \dots)||^2 = 2(||(1, 0, 0 \dots)||^2 + ||(0, 1, 0, \dots)||^2)$$

Czyli

$$2\left(\sqrt[p]{2}\right)^2 = 4$$

Dzieje się tak tylko, gdy $p = 2$
Wtedy iloczyn skalarny dany jest wzorem

$$(x_n|y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n\overline{y_n}$$

1.4.4 Sprawdzenie czy dany zbiór jest ograniczony

Do sprawdzania ograniczoności zbioru potrzebne jest bardzo proste kryterium

$$\boxed{\text{Zbiór } A \text{ jest ograniczony} \iff sup\{||x||\colon x \in A\} < \infty \iff diam\ A < \infty}$$

Dla przypomnienia $diamA = \sup\{||a-b||\colon a, b \in A\}$ czyli największa odległość na normę między elementami ze zbioru A.

Zad.1 Czy poniższy podzbiór jest ograniczony w przestrzeni $L_1([0,1])$.

$$A = \{f \in L_1([0,1])\colon \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| \leqslant 1\}$$

Skorzystamy z naszego kryterium w ramce. Normą w tej przestrzeni jest $||f|| = \int_0^1 |f(x)|\, dx$, korzystając zatem z normy oraz tego, że funkcje ze zbioru A spełniają warunek $\sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \leqslant 1$ wnioskujemy.

$$||f|| = \int_0^1 |f(x)|\, dx \leqslant \int_0^1 dx = 1 \quad \underset{f \in A}{\forall}$$

Zatem mamy spełnione $\sup\{||f||\colon f \in A\} \leqslant 1 < \infty$ zatem A jest ograniczony.

Zad.2 Czy poniższy podzbiór jest ograniczony w przestrzeni $C([0,1])$.

$$B = \{f \in C([0,1])\colon \int_0^1 |f(x)| dx \leqslant 1\}$$

Tutaj niestety musimy posłużyć się kontrprzykładem:

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n - 2n^2 x & \text{dla } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ 0 & \text{dla } x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right] \end{cases} \quad \text{dla } n = 1, 2, \ldots$$

Sprawdzimy czy takie funkcje należą do B

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^{\frac{1}{n}} 2n - 2n^2 x\ dx + \underbrace{\int_{\frac{1}{n}}^1 0\ dx}_{0} = 2nx - n^2x^2\Big|_0^{\frac{1}{n}} = 2 - 1 - 0 + 0 = 1$$

Zatem $f_n(x) \in B$ dla $n = 1, 2, \ldots$. A czemu zatem takie funkcje nie będa ograniczone? W tym celu obliczmy normę (pomijamy liczenie dla argumentów na których funkcja przyjmuje wartość zero), dla tej przestrzeni jest to norma supremum.

$$||f_n(x)||_{C([0,1])} = \sup_{x \in [0, \frac{1}{n}]} |2n - 2n^2 x| = 2n$$

Łatwo to zauważyć, bo tylko dla $x = 0$ nic się nie odejmuje od $2n$. Gdy przejdziemy z $2n$ do nieskończoności uzyskamy ∞ co pokazuje, że nasz zbiór jest nieograniczony.

1.4.5 Sprawdzenie czy dany zbiór jest domknięty

Prostym sposobem wykazania czy dany zbiór jest domknięty jest sprawdzenie czy granica elementów z tego zbioru leży w nim.

$$\boxed{\text{Zbiór } A \text{ jest domknięty, gdy } \lim_{n\to\infty} x_n = x \in A \quad \underset{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}}{\forall}}$$

Zad.1 Sprawdzić czy zbiór A jest domknięty

$$A = \{(x_1, x_2, \dots) \in l_2 \colon x_1 = x_2\}$$

Zatem mamy ciągi z przestrzeni l_2 mające dwie pierwsze współrzędne identyczne. Przejdziemy do sprawdzenia czy granica takich elementów też leży w zbiorze A. W tym celu ustalmy ciąg zbieżny elementów z A.

$$(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset A, \qquad x^{(n)} = (x_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}$$

Jak widac mamy tutaj doczynienia z ciągiem, którego elementami są ciągi. Rozpiszmy kilka pierwszych wyrazów, aby lepiej zobaczyć jego zachowanie.

$$\begin{aligned}
x^{(1)} &= (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, \dots) \\
x^{(2)} &= (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}, \dots) \\
x^{(3)} &= (x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, x_3^{(3)}, \dots) \\
&\vdots \\
x^{(n)} &= (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, x_3^{(n)}, \dots) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Nasz ciąg $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem zbieżnym do granicy (która też jest ciągiem), oznaczmy ją

$$x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$$

Zbieżność następuję po wszystkich współrzędnych tzn.

$$\underset{k\in\mathbb{N}}{\forall}\, x_k^{(n)} \xrightarrow{n\to\infty} x_k$$

Czyli np. bierzemy $k = 3$, mamy wtedy sytuację

$$x_3^{(n)} \xrightarrow{n\to\infty} x_3$$

Można to ładnie odczytać z powyższego zapisu elementów ciągu i granicy. Ponadto z faktu, że ciąg wybraliśmy ze zbioru A mamy

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\, x_1^{(n)} = x_2^{(n)}$$

Oznacza to, że wszystkie elementy ciągu $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ mają takie same dwie pierwsze współrzędne.
Ze zbieżności po współrzędnych zauważamy, że

$$\left.\begin{aligned}
x_1^{(n)} = x_2^{(n)} \xrightarrow{n\to\infty} x_2 \\
x_2^{(n)} = x_1^{(n)} \xrightarrow{n\to\infty} x_1
\end{aligned}\right] \Longrightarrow x_1 = x_2$$

Zatem w granicy także dwa pierwsze elementy sa identyczne, a stąd należy ona do A

$$x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in A$$

Czyli A jest domknięty.

Zad.2 Sprawdzić czy zbiór B jest domknięty.

$$B = \{(x_1, x_2, \dots) \in l_2 \colon x_{2k} = 0 \underset{k\in\mathbb{N}}{\forall}\}$$

Mamy tu podobna sytuację jak powyżej. Ustalmy ciąg zbieżny elementów z B oraz wypiszmy kilka wyrazów tego ciągu ciągów.

$$\begin{gathered}
(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset B, \qquad x^{(n)} = (x_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}} \\
x^{(1)} = (x_1^{(1)}, 0, x_3^{(1)}, 0, \dots) \\
x^{(2)} = (x_1^{(2)}, 0, x_3^{(2)}, 0, \dots) \\
x^{(3)} = (x_1^{(3)}, 0, x_3^{(3)}, 0, \dots) \\
\vdots \\
x^{(n)} = (x_1^{(n)}, 0, x_3^{(n)}, 0, \dots) \\
\vdots
\end{gathered}$$

Biorąc pod uwagę zbieżność po współrzędnych granica będzie miała postać

$$x = (x_1, 0, x_3, 0, \dots)$$

Co dobitnie pokazuje, że $x = (x_1, 0, x_3, 0, \dots) \in B$ czyli B jest domknięty.

Zad.3 Sprawdzić czy zbiór C jest domknięty.

$$C = \{(x_1, x_2, \dots) \in l_2 \colon \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \leqslant 1\}$$

Elementami zbioru C są ciągi, w których suma wyrazów na moduł jest mniejsza lub równa 1 (np. ciągi złożone z 1 na jednej pozycji i 0 na pozostałych). Klasycznie ustalamy ciąg takich elementów zbieżny do pewnej granicy i rozpisujemy jego postać dodając nasze założenie o sumie wyrazów.

$$(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset C, \qquad x^{(n)} = (x_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}$$

$$\begin{aligned}
x^{(1)} &= (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, \dots) & \qquad & \sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(1)}| \leqslant 1 \\
x^{(2)} &= (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}, \dots) & & \sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(2)}| \leqslant 1 \\
x^{(3)} &= (x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, x_3^{(3)}, \dots) & & \sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(3)}| \leqslant 1
\end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, x_3^{(n)}, \dots) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(n)}| \leqslant 1$$

$$\vdots$$

Granicę oznaczymy podobnie jak wcześniej.

$$x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$$

Chcemy sprawdzić czy

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \leqslant 1$$

Wtedy granica będzie elementem zbioru C. Zauważmy jedną ważną rzecz. Nasze sumy w elementach ciągów są nieskończone. Gdybyśmy ustalili pewne $m \in \mathbb{N}$, do którego sumujemy (obcinamy resztę) to taka suma także będzie mniejsza bądź równa 1. Możemy to zapisać następująco

$$(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset C, \qquad x^{(n)} = (x_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}$$

$$x^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, \dots, x_m^{(1)}, | \dots) \qquad \sum_{k=1}^{m} |x_k^{(1)}| \leqslant 1$$

$$x^{(2)} = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}, \dots, x_m^{(2)}, | \dots) \qquad \sum_{k=1}^{m} |x_k^{(2)}| \leqslant 1$$

$$x^{(3)} = (x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, x_3^{(3)}, \dots, x_m^{(3)}, | \dots) \qquad \sum_{k=1}^{m} |x_k^{(3)}| \leqslant 1$$

$$\vdots$$

$$x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, x_3^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}, | \dots) \qquad \sum_{k=1}^{m} |x_k^{(n)}| \leqslant 1$$

$$\vdots$$

W tym przypadku możemy juz zastosować zbieżność po współrzędnych (mamy skończoną ilość wyrazów), zatem

$$\sum_{k=1}^{m} |x_k^{(n)}| \xrightarrow{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m} |x_k| \leqslant 1$$

Zatem dla skończonej ilości wyrazów granica spełnia założenie, że suma jest mniejsza lub równa 1. Widzimy, że m było wybrane dowolnie, możemy przejść z nim do nieskończoności przez co uzyskujemy

$$\sum_{k=1}^{m} |x_k| \xrightarrow{m\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \leqslant 1 \Longrightarrow x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in C$$

Czyli C jest domknięty.

Zad.4 Sprawdzić czy zbiór D jest domknięty

$$D = \{(x_1, x_2, \dots) \in l_2 \colon \underset{n\geqslant 1}{\exists} \ \underset{k\geqslant n}{\forall} \ x_k = 0\}$$

Pora na zbiór, który domknięty nie będzie. Aby to wykazać posłużymy się następującym kontrprzykładem.
Bierzemy ciąg

$$(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} = \left(\underbrace{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2^n}}_{n \text{ razy}}, 0, 0, \ldots \right)$$

Jest to ciąg z D, ponieważ zawsze możemy wskazać takie n, dla którego wszystkie wyrazy o indeksach większych od niego są zerowe. Rozpiszmy wyrazy tego ciągu i zauważmy do czego są one zbieżne.

$$x^{(1)} = \left(\frac{1}{2}, 0, 0, \ldots, \right)$$

$$x^{(2)} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0, 0, \ldots \right)$$

$$x^{(3)} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, 0, 0, \ldots \right)$$

$$\vdots$$

$$x^{(n)} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2^n}, 0, 0, \ldots \right)$$

$$\vdots$$

Jak widać ciąg ten ma w kolejnych wyrazach coraz to więcej niezerowych potęg $\frac{1}{2}$. Nie da się ustalić konkretnego n, dla którego kolejne wyrazy będą zerowe. Granicą tego ciągu będzie (patrząc po współrzędnych)

$$x = \left(\frac{1}{2}, \ldots, \underbrace{\frac{1}{2^n}}_{n-\text{te miejsce}}, \ldots \right)$$

Ciąg ten nie leży w D, zatem D **nie** jest domknięty.

1.4.6 Wyznaczanie norm operatorów liniowych

Przy wyznaczaniu norm operatorów liniowych niezbędnę są dwa wzory.

$$\boxed{||T|| = \inf\{A \in (0,\infty)\colon \underset{x\in X}{\forall} (||Tx|| \leqslant A||x||)\}}$$

Powyższy wzór informuje nas, że norma operatora równa jest infimum stałych ograniczająch wartość operatora względem normy argumentu. Tego wzoru będziemy używali do wyliczania normy operatora. Z kolei poniższego wzoru używac będziemy do sprawdzania dla jakiego argumentu norma ta jest osiągana (jeśli w ogóle jest osiągana).

$$\boxed{||T|| = \sup\{||Tx||\colon x \in X,\ ||x|| \leqslant 1\} = \sup\{||Tx||\colon x\in X,\ ||x|| = 1\}}$$

Jak widać badać będziemy argumenty z kuli lub sfery jednostkowej. Zastosowanie tych wzorów najlepiej widoczne jest na przykładzie

---

Zad.1 Wyznaczyć normę operatora $T\colon (\mathbb{R}^2, ||\cdot||_1) \to (\mathbb{R}^2, ||\cdot||_2)$ oraz $T\colon (\mathbb{R}^2, ||\cdot||_2) \to (\mathbb{R}^2, ||\cdot||_1)$ dla norm

$$||(x,y)||_1 = \sqrt{x^2+y^2} \quad \text{norma euklidesowa}$$

$$||(x,y)||_2 = |x|+|y| \quad \text{norma taksówkowa}$$

Operator jest dany wzorem

$$T(x,y) = \left(\frac{x+y}{4}, \frac{x-y}{4}\right)$$

Zaczniemy od operatora idącego z normy pierwszej w drugą

$$T\colon (\mathbb{R}^2, ||\cdot||_1) \to (\mathbb{R}^2, ||\cdot||_2)$$

Wybieramy argumenty ze sfery jednostkowej (dla argumentów mamy normę euklidesową, dla wartości operatora normę taksówkową)

$$||(x,y)||_1 = 1$$

Stąd wychodzi nam warunek

$$\sqrt{x^2+y^2} = 1$$

Po podniesieniu stronami do kwadratu uzyskamy przyjemniejszą jego postać

$$x^2+y^2 = 1 \quad (*)$$

Teraz musimy oszacować normę wartości operatora T przez stałą razy normę argumentu. Skorzystamy z nierówności następującej postaci

$$|x|+|y| \leqslant \sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2} \quad (!)$$

Zatem szacujemy

$$||T(x,y)||_2 = \left|\frac{x+y}{4}\right| + \left|\frac{x-y}{4}\right| = \frac{1}{4}(|x+y|+|x-y|) \overset{(!)}{\leqslant} \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{(x+y)^2+(x-y)^2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{2(x^2+y^2)} = \frac{1}{2}||(x,y)||_1$$

Zatem uzyskaliśmy

$$||T(x,y)||_2 \leqslant \underbrace{\frac{1}{2}}_{A} ||(x,y)||_1$$

Musimy teraz sprawdzić czy wartość $\frac{1}{2}$ jest osiągana (pamiętamy, że $||(x,y)||_1 = 1$). Musi być zatem spałniana koniunkcja dwóch warunków:

$$x^2 + y^2 = 1 \ \wedge \ \frac{1}{4}(|x+y| + |x-y|) = \frac{1}{2}$$

Pierwszymi naturalnymi kandydatami (x,y) przychodzącymi nam do głowy są wartości skrajne czyli 1 i 0. Sprawdźmy co się dzieje dla $(1,0)$

$$1^2 + 0^2 = 1 \checkmark$$

$$\frac{1}{4}(|1+0| + |1-0|) = \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{1}{2} \checkmark$$

$$||(1,0)||_1 = 1 \ \wedge \ ||T(1,0)||_2 = \frac{1}{2}$$

Zatem norma operatora jest poprawnie wyliczona.

Teraz zajmijmy się operatorem idącym z normy drugiej w pierwszą

$$T \colon (\mathbb{R}^2, ||\cdot||_2) \to (\mathbb{R}^2, ||\cdot||_1)$$

Ponownie wybieramy argumentu ze sfery jednostkowej

$$||(x,y)||_2 = 1$$

Stąd mamy

$$|x| + |y| = 1$$

Czyli

$$|x| \leqslant 1 \ \wedge |y| \leqslant 1$$

Przechodzimy do szacowania wartości operatora w normie pierwszej przez stała razy argument w normie drugiej

$$||T(x,y)||_1 = \sqrt{\frac{2x^2+2y^2}{16}} = \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{x^2+y^2} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{4}(|x|+|y|) = \frac{\sqrt{2}}{4}||(x,y)||_2$$

Musimy sprawdzić czy wartość ta jest osiągana czyli szukamy takich (x,y), że

$$|x| + |y| = 1 \ \wedge \ \sqrt{\frac{2x^2+2y^2}{16}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

No i znowu bierzemy na tapetę wartości skrajne, weźmy $(0,1)$, wtedy

$$|0| + |1| = 1 \checkmark$$

$$\sqrt{\frac{2\cdot 0^2 + 2\cdot 1^2}{16}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \checkmark$$

$$||(0,1)||_2 = 1 \ \wedge \ ||T(0,1)||_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Czyli wyliczyliśmy normę.

1.4.7 Wyznaczanie norm funkcjonałów liniowych i ciągłych

Przyznam szczerze, że to zagadnienie było chyba najcięższe do opracowania, ponieważ w zielonej książce Prusa i Stachury do wyliczania tego używane są wybrane twierdzenia, z których **nie** będziemy mogli skorzystać na kolosie (chyba, że udowodnimy je...). Z ćwiczeń niewiele dało się zrozumieć, wszystko było "łatwe", ale nie wiedzieliśmy skąd to się bierze. Wykład dał tylko metody rozwiązywania tych zadań dla przestrzeni Hilberta (chyba, że coś przeoczyłem). Ostatnią deską ratunku okazała się książka Rusinka i to z niej wprowadzę poniższe metody rozwiązywania zadań z funkcjonałami liniowymi.
UWAGA: Metoda z Rusinka jest dobra, lecz w większości przypadków niepraktyczna, zajrzałem ponownie do Prusa i Stachury i w końcu obczaiłem jak korzystać z tamtejszych twierdzeń (pal licho, że nie można z nich) i to za ich pomocą robiłem pozostałe zadania dołączone w postaci skanów.

Oznaczmy przez X przestrzeń, a przez X^* przestrzeń do niej sprzężoną. X^* jest przestrzenią wszystkich ciągłych i liniowych funkcjonałów $f\colon X \to K$, gdzie K jest ciałem skalarów. Wtedy zachodzą następujące zależności, przez x oznaczmy roboczo element z X

$$\boxed{||f||_{X^*} = \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{|f(x)|}{||x||_X}}$$

Ponadto spełniona jest inna zależność, z której będziemy korzystali w zadaniach

$$\boxed{||f||_{X^*} = \sup_{||x||=1} |f(x)| = \sup_{||x||\leqslant 1} |f(x)|}$$

Z kolei w przestrzeniach Hilberta np. l_2, L_2 stosować będziemy twierdzenie Riesza o reprezentacji funkcjonału liniowego i ciągłego w przestrzeni Hilberta oraz z wniosku z tego twierdzenia

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{W przestrzeni Hilberta } (X, (\cdot|\cdot)) \text{ zachodzi } \underset{f\in X^*}{\forall}\ \underset{a\in X}{\exists}\ \underset{x\in X}{\forall}\ (f(x) = (x|a)) \\ \text{Jeżeli } a \in X \text{ to dla każdego takiego funkcjonału } ||f|| = ||a||\end{array}}$$

Jak to funkcjonuje w praktyce? Zobaczmy w zadaniach (polecam te dołączone w postaci skanów, oczywiście po zapoznaniu się z twierdzeniami z Prusa i Stachury)

Zad.1 Obliczyć normę funkcjonału f danego ponizszym wzorem dla $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c$

$$f(x_1, x_2, x_3, \dots) = \lim_{n\to\infty} x_n$$

Skorzystamy z wzoru w drugiej ramce

$$||f|| = \sup_{||x_n||=1} |f(x_n)| = \sup_{||x_n||=1} |\lim_{n\to\infty} x_n| = \sup_{||x_n||=1} \lim_{n\to\infty} |x_n| \leqslant \sup_{||x_n||=1} \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| = \sup_{||x_n||=1} ||x_n|| = 1$$

Zatem

$$||f|| \leqslant 1$$

Czy możemy mieć równość? Tak, wystarczy wziąć ciąg $(1, 1, 1, \dots)$, spełnia on warunek $||x|| = 1$, zatem

$$||f|| = |f(x_n)| = |\lim_{n\to\infty}(1, 1, 1, \dots)| = \lim_{n\to\infty} |(1, 1, 1, \dots)| = 1$$

Zad.2 Obliczyć normę funkcjonału f danego ponizszym wzorem dla $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$

$$f(x_1, x_2, x_3, \dots) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n(n+1)}$$

Powtarzamy rozumowanie z poprzedniego zadania (uwaga: tutaj jako normę w c_0 bierzemy supremum, nie maksimum, szczerze nie wiem czemu, być może poniższa nierówność nie funkcjonuje dla maksimum tylko dla supremum)

$$||f|| = \sup_{||x_n||=1} |f(x_n)| = \sup_{||x_n||=1} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n(n+1)} \right| \leqslant \sup_{||x_n||=1} \sup_{n\in N} |x_n| \underbrace{\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \right|}_{1} = \sup_{||x_n||=1} ||x_n|| = 1$$

Zatem

$$||f|| \leqslant 1$$

czy równość jest kiedyś osiągana? W tym przypadku nie, bo z nierówności wynika, że

$$\exists_{n_0} |x_{n_0}| < 1$$

Przypuśćmy niewprost, że $|f(x)| = 1$

$$|f(x)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n(n+1)} \right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|}{n(n+1)} + \frac{|x_{n_0}|}{n(n+1)} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

Dochodzimy do sprzeczności.

Zad.3 Obliczyć normę funkcjonału f danego ponizszym wzorem dla $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l_2$

$$f(x_1, x_2, x_3, \dots) = 2x_1 - x_2 - 2x_3$$

Tutaj mamy doczynienia z ciągami z przestrzeni Hilberta, zatem stosujemy twierdzenie Riesza i wniosek z niego. Czyli wiemy, że istnieje takie a, że

$$f(x_n) = (x_n|a)$$

Jak wiadomo, iloczyn skalarny w przestrzeni l_2 wyraża się wzorem

$$(x_n|y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$$

Przyjmijmy, że ciałem jest tutaj $\mathbb{R}$. Stąd nietrudno wywnioskować, że element a w naszym przypadku będzie miał postać

$$a = (2, -1, -2, 0, 0, \dots)$$

Z wniosku z twierdzenia Riesza wiemy, że jeśli $a \in l_2$ to $||f|| = ||a||$. Oczywiście $a \in l_2$, bo

$$4 + 1 + 4 + 0 + 0 + \dots < \infty$$

Zatem $||f|| = ||a|| = \sqrt{4 + 1 + 4 + 0 + 0 + \dots} = 3$

1.4.8 Badanie zbieżności ciągów

Badanie zbieżności ciągu funkcyjnego sprowadza się do wyznaczenia granicy punktowej ciągu, a następnia sprawdzenia następującego warunku:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} ||x_n|| = ||x||}$$

Warunek ten można zapisać w nieco przyjemniej do obliczania postaci:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} ||x_n - x|| = 0}$$

Analogicznie zapisujemy go dla funkcji.

Zad.1 Sprawdzić czy poniższy ciąg jest zbieżny w przestrzeni $C([0,1])$

$$f_n(x) = x(1-x^n)$$

Zacznijmy od policzenia granicy punktowej.

$$\lim_{n\to\infty} x(1-x^n) = \lim_{n\to\infty} x - x^{n+1} = \lim_{n\to\infty} x - \lim_{n\to\infty} x^{n+1}$$

Oczywiście wiadomo, że granica różnicy to różnica granic. Wyliczmy podane granice w dwóch przypadkach: dla $x \in [0,1)$ i $x = 1$

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty} x}_{x} - \underbrace{\lim_{n\to\infty} x^{n+1}}_{\to 0} = x - 0 = x \quad \text{dla } x \in [0,1)$$

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty} x}_{1} - \underbrace{\lim_{n\to\infty} x^{n+1}}_{1} = 1 - 1 = 0 \quad \text{dla } x = 1$$

Zatem mamy zbieżność do dwóch różnych granic (x i 0) w tym przedziale co nam daje ciąg **rozbieżny**.

Zad.2 Sprawdzić czy poniższy ciąg jest zbieżny w przestrzeni $C([0,1])$

$$f_n(x) = x^n(1-x)$$

Przeprowadzimy podobne rozumowanie jak powyżej w zad.1. Zacznijmy od granicy punktowej:

$$\lim_{n\to\infty} x^n(1-x) = \lim_{n\to\infty} x^n - x^{n+1} = \lim_{n\to\infty} x^n - \lim_{n\to\infty} x^{n+1}$$

Rozważmy krańce przedziału $[0,1]$ i jego wnętrze

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty} x^n}_{0} - \underbrace{\lim_{n\to\infty} x^{n+1}}_{0} = 0 - 0 = 0 \quad \text{dla } x = 0$$

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty} x^n}_{\to 0} - \underbrace{\lim_{n\to\infty} x^{n+1}}_{\to 0} = 0 - 0 = 0 \quad \text{dla } x \in (0,1)$$

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty} x^n}_{1} - \underbrace{\lim_{n\to\infty} x^{n+1}}_{1} = 1 - 1 = 0 \quad \text{dla } x = 1$$

Zatem mamy tutaj granice punktową równą 0.
Teraz zastosujemy nasze kryterium zbieżności w normie. W przestrzeni $C([0,1])$ mamy normę $||f|| = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$.

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n - f|| = \lim_{n\to\infty} ||x^n(1-x) - 0|| = \lim_{n\to\infty} ||x^n(1-x)|| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |x^n(1-x)|$$

Zauważmy, że na końcach przedziału $[0,1]$ osiągamy wartość 0. Pozostaje pytanie, co się dzieje w środku przedziału? W tym celu musimy obliczyć pochodną i sprawdzić jak wygląda sytuacja z ekstremum tego przedziału. Pochodna:

$$(x^n - x^{n+1})' = nx^{x-1} - (n+1)x^n$$

Przyrównujemy do 0

$$nx^{n-1} - (n+1)x^n = 0 \ / : n$$

$$x^{n-1} - \frac{n+1}{n}x^n = 0 \ / : x^{n-1}$$

$$1 - \frac{n+1}{n}x = 0 \ / \cdot \frac{n}{n+1}$$

$$\frac{n}{n+1} - x = 0 \ / + x$$

$$\frac{n}{n+1} = x$$

Wstawiamy do naszego ciągu funkcyjnego.

$$x^n(1-x)\Big|_{x=\frac{n}{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)$$

Liczymy granicę

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n}_{<1} \underbrace{\left(1 - \frac{n}{n+1}\right)}_{\to 0} = 0$$

Mamy tutaj iloczyn czegoś ograniczonego i czegoś co zmierza do 0. Zatem całość zmierza do 0. Widzimy teraz, że zarówno na końcach jak i w ekstremum uzyskujemy 0 zatem z naszego warunku w ramce mamy wykazaną zbieżność.

Zad.3 Sprawdzić czy poniższy ciąg jest zbieżny w przestrzeni $C([0,1])$

$$f_n(x) = x^n(1-x^n)$$

Zbieżność punktowa będzie analogiczna jak w poprzednim zadaniu, uzyskamy granicę równą 0. Dla pewność przeliczmy.

$$\lim_{n\to\infty} x^n(1-x^n) = \lim_{n\to\infty} x^n - x^{2n} = \lim_{n\to\infty} x^n - \lim_{n\to\infty} x^{2n}$$

Rozważmy krańce przedziału $[0,1]$ i jego wnętrze

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty} x^n}_{0} - \underbrace{\lim_{n\to\infty} x^{2n}}_{0} = 0 - 0 = 0 \quad \text{dla } x = 0$$

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty} x^n}_{\to 0} - \underbrace{\lim_{n\to\infty} x^{2n}}_{\to 0} = 0 - 0 = 0 \quad \text{dla } x \in (0,1)$$

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty} x^n}_{1} - \underbrace{\lim_{n\to\infty} x^{2n}}_{1} = 1 - 1 = 0 \quad \text{dla } x = 1$$

Zatem mamy tutaj granice punktową równą 0 tak jak przewidywaliśmy. A co z naszym warunkiem z ramki?

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n - f|| = \lim_{n\to\infty} ||x^n(1-x^n) - 0|| = \lim_{n\to\infty} ||x^n(1-x^n)|| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |x^n(1-x^n)|$$

Krańcu znów się zerują, ale co w środku? Pozostaje nam jak poprzednio wyliczenie ekstremum.

$$(x^n(1-x^n))' = (x^n - x^{2n})' = nx^{n-1} - 2nx^{(2n-1)}$$

Przyrównujemy do zera i wyliczamy x:

$$nx^{n-1} - 2nx^{(2n-1)} = 0 \ / : n$$

$$x^{n-1} - 2x^{(2n-1)} = 0 \ / : x^{n-1}$$

$$1 - 2x^n = 0 \ / : 2$$

$$\frac{1}{2} - x^n = 0 \ / + x^n$$

$$\frac{1}{2} = x^n = \ / \sqrt[n]{}$$

$$\frac{1}{\sqrt[n]{2}} = x$$

Wstawiamy do wzoru na f_n

$$x^n(1-x^n)\Big|_{x=\frac{1}{\sqrt[n]{2}}} = \left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)^n \left(1 - \left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)^n\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Zatem niezależnie jakie n wybierzemy otrzymamy maksimum równe $\frac{1}{4}$, stąd

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |x^n(1-x^n)| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \neq 0$$

Z tego stwierdzamy, że mimo, że nasz ciąg miał granicę punktową to w normie **nie** jest on zbieżny.
Uwaga: w książce jest zapisane, że $||f_n|| \geqslant \frac{1}{4}$, nie wiem kiedy możemy mieć tutaj nierówność, jak mamy wartość $\frac{1}{4}$ niezależnie od wyboru n i granicy w nim.

Zad.4 Sprawdzić czy ciąg $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny w przestrzeni c

$$x^{(n)} = (x_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}} = (n^{\frac{1}{k}})_{k\in\mathbb{N}}$$

Rozpiszmy sobie postać tego ciągu

$$x^{(1)} = (1, 1, 1, \dots)$$

$$x^{(2)} = (2^1, 2^{\frac{1}{2}}, 2^{\frac{1}{3}}, \dots)$$

$$x^{(3)} = (3^1, 2^{\frac{1}{2}}, 3^{\frac{1}{3}}, \dots)$$

$$\vdots$$

$$x^{(n)} = (n^1, n^{\frac{1}{2}}, n^{\frac{1}{3}}, \dots)$$

$$\vdots$$

Intuicyjnie możemy zauważyć, że granicą punktowa powinna być niewłaściwa i wynosić ∞. A co ze zbieżnością w normie?
Ustalmy $k \in \mathbb{N}$ (możemy sobie pomysleć, że blokujemy pewną kolumnę w powyższym zapisie).

$$\lim_{n\to\infty} ||x^{(n)} - x|| = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k^{(n)} - x_k| \geqslant \lim_{n\to\infty} |x_k^{(n)} - x_k| = \infty$$

Czemu tak? Bo juz dla $k = 1$ uzyskujemy ∞, a supremum po wszystkich k może być jeszcze większe czyli nie ma wyjścia - granica musi byc nieskończonością. Opisuje to poniższy rachunek:

$$\lim_{n\to\infty} |x_1^{(n)} - x_1| \geqslant \lim_{n\to\infty} (|x_1^{(n)}| - |x_1|) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{|x_1^{(n)}|}_{\to\infty} - \lim_{n\to\infty} \underbrace{|x_1|}_{\to x_1} = \infty$$

Uwaga: Nie wiem czy formalny zapis powyższej nierówności jest poprawny, jednak na zajęciach ”w skrócie” doszliśmy do takiego samego wyniku.

Zad.5 Sprawdzić czy ciąg $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny w przestrzeni c

$$x^{(n)} = (x_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{(n+1)^k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$$

Rozpiszmy sobie tak jak powyżej postać tego ciągu

$$x^{(1)} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\right)$$

$$x^{(2)} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots\right)$$

$$x^{(3)} = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \dots\right)$$

$$\vdots$$

$$x^{(n)} = \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{(n+1)^2}, \frac{1}{(n+1)^3}, \dots\right)$$

$$\vdots$$

Łatwo zauważyć, że wszystkie elementy (czyli ciągi) będą zbieżne do 0, a cały ciąg zbieżny do

$$x = (0, 0, 0, \dots)$$

Zatem wyliczoną mamy granicę punktową. Teraz pora na granice normy

$$\lim_{n\to\infty} ||x^{(n)} - x|| = \lim_{n\to\infty} ||\frac{1}{(n+1)^k} - 0|| = \lim_{n\to\infty} ||\frac{1}{(n+1)^k}|| = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\in\mathbb{N}} |\frac{1}{(n+1)^k}| \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Co pokazuje, że ciąg ten jest zbieżny w przestrzeni c
Uwaga: ciąg ten należy nie tylko do c, ale także do c_0 i l_∞.

Zad.6 Sprawdzić czy ciąg $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny w przestrzeni c

$$x^{(n)} = (x_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}} = \left(\sqrt[k]{\frac{1}{n}+k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$$

UWAGA: To rozwiązanie nie jest sprawdzone, nie wszystkie przejścia sa jasne.
Rozpiszmy sobie tak jak powyżej postać tego ciągu

$$x^{(1)} = \left(1+1, \sqrt{1+2}, \sqrt[3]{1+3}, \sqrt[4]{1+4}\dots\right)$$

$$x^{(2)} = \left(\frac{1}{2}+1, \sqrt{\frac{1}{2}+2}, \sqrt[3]{\frac{1}{2}+3}, \sqrt[4]{\frac{1}{2}+4},\dots\right)$$

$$x^{(3)} = \left(\frac{1}{3}+1, \sqrt{\frac{1}{3}+2}, \sqrt[3]{\frac{1}{3}+3}, \sqrt[4]{\frac{1}{3}+4},\dots\right)$$

$$\vdots$$

$$x^{(n)} = \left(\frac{1}{n}+1, \sqrt{\frac{1}{n}+2}, \sqrt[3]{\frac{1}{n}+3}, \sqrt[4]{\frac{1}{n}+4},\dots\right)$$

$$\vdots$$

Granica tego ciągu powinna wynosić zatem (pierwsze niejasne przejście: czy $lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{n}+c} = \sqrt{c}$?)

$$x = (1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4},\dots) = (\sqrt[k]{k})_{k\in\mathbb{N}}$$

Wtedy w normie mamy

$$\lim_{n\to\infty} ||x^{(n)} - x|| = \lim_{n\to\infty}\sup_{k\in\mathbb{N}}\left|\sqrt[k]{\frac{1}{n}+k} - \sqrt[k]{k}\right| \overset{(*)}{\leqslant} \lim_{n\to\infty}\sup_{k\in\mathbb{N}}\left|\sqrt[k]{\frac{1}{n}} + \sqrt[k]{k} - \sqrt[k]{k}\right| \leqslant \lim_{n\to\infty}\sup_{k\in\mathbb{N}}\left|\sqrt[k]{\frac{1}{n}}\right| \leqslant \lim_{n\to\infty}\left|\sqrt{\frac{1}{n}}\right| = 0$$

Kolejne niejasne przejście to $(*)$ czyli skorzystanie z nierówności $\sqrt[n]{a+b} \leqslant \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$.
Ogólnie ten przykład jest ciężki. Miejmy nadzieję, że takiego na kolokwium nie będzie.

1.4.9 Sprawdzenie czy przestrzeń jest przestrzenią Banacha

Aby pokazać, że przestrzeń jest zupełna (czyli jest przestrzenią Banacha) musimy pokazać, że każdy ciąg spełniający warunek Cauchy'ego jest w niej zbieżny.

$$\boxed{\textbf{Warunek Cauchy'ego: } \underset{\varepsilon>0}{\forall} \ \underset{N}{\exists} \ \underset{n,m>N}{\forall} ||f_n - f_m|| < \varepsilon}$$

Zad.1 Pokazać, że przestrzeń l_1 jest zupełna.
Na początek ustalmy ciąg Cauchy'ego (ciąg spełniający warunek Cauchy'ego) elementów z l_1 i oznaczmy go $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. Warunek Cauchy'ego w tym przypadku mówi nam, że

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \ \underset{N}{\exists} \ \underset{n,m>N}{\forall} \ ||x^{(n)} - x^{(m)}|| < \varepsilon$$

Przypomnijmy także postać normy w l_1

$$||(x_n)_{n\in\mathbb{N}}|| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$$

Rozpiszemy postać ciągu

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, \dots) \\ x^{(2)} &= (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}, \dots) \\ x^{(3)} &= (x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, x_3^{(3)}, \dots) \\ &\vdots \\ x^{(n)} &= (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, x_3^{(n)}, \dots) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Z faktu, że jest to ciąg Cauchy'ego uzyskujemy

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \ \underset{N}{\exists} \ \underset{n,m>N}{\forall} \ \sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(n)} - x_k^{(m)}| < \varepsilon \qquad (*)$$

Jak widać cały szereg jest mniejszy od ε, zatem pojedynczy wyraz tym bardziej, stąd

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \ \underset{N}{\exists} \ \underset{n,m>N}{\forall} \ \underset{k}{\forall} \ |x_k^{(n)} - x_k^{(m)}| < \varepsilon$$

A to nam mówi, że przy ustalonym k ciąg $x_k^{(n)}$ spełnia warunek Cauchy'ego w $\mathbb{R}$ (czyli możemy powiedzieć patrząc na przedstawienie tego ciągu kilka linijek wyżej, że spełnia warunek Cauchy'ego w kolumnach), np. przy ustalonym $k = 3$ ciąg

$$x_3^{(1)}, x_3^{(2)}, x_3^{(3)}, x_3^{(4)} \dots$$

spełnia warunek Cauchy'ego.
Wiemy, że w przestrzeniach euklidesowych $\mathbb{R}^n$ ciąg jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia warunek Cauchy'ego. Zatem przy ustalonym k każdy ciąg $x_k^{(n)}$ jest zbieżny (zbieżność kolumnami). Jego granicę oznaczmy jako x_k. Musimy pokazać w tym momencie, że

$$x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in l_1$$

oraz, że

$$||x^{(n)} - x|| \to 0$$

czyli udowodnić, że x jest granicą ciągu $x^{(n)}$
Żeby x należało do l_1 musimy pokazać, że szereg

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$$

jest zbieżny.
W tym celu wystarczy pokazać, że ciąg jego sum częściowych jest ograniczony (powołujemy się na twierdzenie mówiące, że ciąg monotoniczny jest zbieżny witw, gdy jest ograniczony). Z $(*)$ wiemy, że

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \ \underset{N}{\exists} \ \underset{n,m>N}{\forall} \ \underset{j}{\forall} \ \sum_{k=1}^{j} |x_k^{(n)} - x_k^{(m)}| < \varepsilon$$

No bo skoro suma do nieskończoności jest mniejsza od ε to tym bardziej suma pewnej skończonej ilości wyrazów będzie to spełniała.
Teraz ustalamy $n > N$ i przechodzimy z m do ∞, otrzymujemy

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \ \underset{N}{\exists} \ \underset{n>N}{\forall} \ \underset{j}{\forall} \ \sum_{k=1}^{j} |x_k^{(n)} - x_k| \leqslant \varepsilon \qquad (**)$$

Dzięki temu korzystając z warunku trójkąta mamy

$$\sum_{k=1}^{j} |x_k| \leqslant \sum_{k=1}^{j} |x_k - x_k^{(n)}| + \sum_{k=1}^{j} |x_k^{(n)}| \leqslant \varepsilon + ||x^{(n)}|| < \infty$$

Fakt, że $||x^{(n)}|| < \infty$ ($x^{(n)}$ jest ograniczony) wynika z tego, że ciąg ten jest zbieżny a przez to ograniczony. Zatem wykazaliśmy, że $x \in l_1$. Pozostało nam pokazanie

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \ \underset{N}{\exists} \ \underset{n>N}{\forall} \ ||x^{(n)} - x|| \leqslant \varepsilon$$

czyli zbieżności w normie.
Rozpisując mamy

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \ \underset{N}{\exists} \ \underset{n>N}{\forall} \ \sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(n)} - x_k| \leqslant \varepsilon$$

Aby to udowodnić, wystarczy pokazać, że każda suma częściowa jest mniejsza bądź równa od ε

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \ \underset{N}{\exists} \ \underset{n>N}{\forall} \ \underset{j}{\forall} \ \sum_{k=1}^{j} |x_k^{(n)} - x_k| \leqslant \varepsilon$$

A to już jest pokazane wcześniej $(**)$, zatem mamy zbieżność w normie. Podsumowując ciąg spełniający warunek Cauchy'ego jest zbieżny co implikuje, że l_1 jest zupełna. Jak widać trochę roboty było, ale się udało :)

1.5 Dodatkowe zadania z kolosa - skany

Norma operatora

zad 3

$T: (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$

$T(x,y) = (2y-4x, x-5y)$

$\|(x,y)\|_\infty = 1 \iff \max\{|x|,|y|\} = 1$

$\|(x,y)\|_\infty = \max\{|x|,|y|\}$

$\|(x,y)\|_1 = |x| + |y|$

$x \in [-1,1]$

$y \in [-1,1]$

$$\|T(x,y)\|_1 = |2y-4x| + |x-5y| \leq |2y| + |-4x| + |x| + |-5y| = |2y| + |4x| + |x| + |5y| = 7|y| + 5|x| \leq \boxed{12} \max\{|y|,|x|\}$$

$$|2y-4x| + |x-5y| = 12 \wedge \max\{|x|,|y|\} = 1$$

weźmy $(1,-1)$

$\max\{|1|,|-1|\} = 1$

$$\underbrace{|-2-4|}_{6} + \underbrace{|1+5|}_{6} = 12$$

Norma operatora

$\boxed{\text{zad.}}$ $A: (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1) \to (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ $A(x,y) = (3x-2y, y-x)$

$\|(x,y)\|_1 = \max\{2|x|, |y|\}$

$\|(x,y)\|_2 = |x| + |y|$

$\|(x,y)\|_1 = 1 \Rightarrow \max\{2|x|, |y|\} = 1 \Rightarrow \begin{cases} 2|x| \leq 1 \\ \quad |x| \leq \frac{1}{2} \\ |y| \leq 1 \end{cases}$

$\|A(x,y)\|_2 = |3x-2y| + |y-x| \leq$

$|3x| + |2y| + |y| + |-x| =$

$|3x| + |2y| + |y| + |x| =$

$3|x| + 2|y| + |y| + |x| =$

$4\underbrace{|x|}_{\leq \frac{1}{2}} + 3\underbrace{|y|}_{\leq 1} \leq 5 \max\{2|x|, |y|\}$

$|3x-2y| + |y-x| = 5 \quad \wedge \quad \max\{2|x|, |y|\} = 1$

weźmy $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$

$\|A(-\frac{1}{2}, 1)\|_2 = |3 \cdot (-\frac{1}{2}) - 2 \cdot 1| + |1 - (-\frac{1}{2})| = |-\frac{7}{2}| + |\frac{3}{2}| = \frac{10}{2} = 5$ ✓

$\|(-\frac{1}{2}, 1)\|_1 = \max\{2 \cdot |-\frac{1}{2}|, 1\} = \max\{1, 1\} = 1$ ✓

Zbieżność ciągu

$\boxed{\text{Zad. 1}}$ $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ $n \in \mathbb{N}$ dane wzorem

$$f_n(x) = x^n$$

$$f_1(x) = x$$
$$f_2(x) = x^2$$
$$\vdots$$
$$f_n(x) = x^n$$

• ZBIEŻNOŚĆ W $C([0,1])$

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in [0,1) \\ 1 & \text{dla } x = 1 \end{cases}$$

Ciąg rozbieżny w $C([0,1])$

• ZBIEŻNOŚĆ W $L^2([0,1])$

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in [0,1) \\ 1 & \text{dla } x = 1 \end{cases} \to \text{odrucamy (zbiór miary zero)}$$

Stąd $x = 0$
granica

norma w $L^2([0,1])$: $\sqrt{\int_0^1 |f|^2 d\mu}$

Zbieżność w normie

$$\|x_n - x\| = \|x^n - 0\| = \|x^n\| = \sqrt{\int_0^1 (x^n)^2 d\mu} = \sqrt{\int_0^1 x^{2n} d\mu} =$$

$$\sqrt{\left.\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right|_0^1} = \sqrt{\frac{1}{2n+1} - 0} = \sqrt{\frac{1}{2n+1}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Zatem mamy zbieżność

Domkniętość zbioru

• DOMKNIĘTOŚĆ:

$\boxed{\text{zad. 2}}$ $A = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l_1 : x_{2n+1} = 0\}$ {0 należy do liczb naturalnych}

Ustalmy ciąg elementów z A zbieżny do x

$x^{(1)} = (0, x_2^{(1)}, 0, x_4^{(1)}, \dots)$

$x^{(2)} = (0, x_2^{(2)}, 0, x_4^{(2)}, \dots)$

$\vdots$

$x^{(n)} = (0, x_2^{(n)}, 0, x_4^{(n)}, \dots)$

$\downarrow$

$x = (0, x_2, 0, x_4 \dots) \in A$

$\forall_k \; x_k^{(n)} \xrightarrow{n \to \infty} x_k$ zbieżność po współrzędnych

$\lim_{n \to \infty} x^{(n)} = x \in A$ stąd A jest domknięty

Równoważność Norm

Równoważność norm $\boxed{\text{zad. } 3.12}$

$$\|x_n\|_1 = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2}$$

$$\|x_n\|_2 = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|}{2^n}$$

$$\|x_n\|_1 = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2} \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|}{2^n} = \|\cdot\|_2 \Rightarrow \boxed{\beta = 1}$$

$$\|x_n\|_2 = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|}{2^n} \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2} + \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}}_{1} =$$

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2} + \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\} \leq 2\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2} = 2\|\cdot\|_1$$

$$\alpha = \frac{1}{2}$$

Norma operatora

$\boxed{5.12}$ v) $A:(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ $\quad A(x,y)=\left(\frac{x+y}{4}, \frac{x-y}{4}\right)$

$\|(x,y)\|_\infty = \max\{|x|,|y|\}$

$\|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2}$ $\qquad \|(x,y)\|=1 \Rightarrow \max\{|x|,|y|\}=1$

$$\Downarrow$$

$|x| \le 1$

$|y| \le 1$

$$\|A(x,y)\| = \sqrt{\frac{(x+y)^2}{16}+\frac{(x-y)^2}{16}} = \sqrt{\frac{2(x^2+y^2)}{16}} = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{8}} \leqslant$$

$$\sqrt{\frac{2\max\{|x|,|y|\}}{8}} = \sqrt{\frac{\max\{|x|,|y|\}}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{\max\{|x|,|y|\}} \leqslant \frac{1}{2}\max\{|x|,|y|\}$$

$$\|A(x,y)\| = \sqrt{\frac{(x+y)^2}{16}+\frac{(x-y)^2}{16}} = \frac{1}{2} \quad \wedge \quad \max\{|x|,|y|\}=1$$

weźmy $(1,1)$

$$\|A(1,1)\| = \sqrt{\frac{(1+1)^2}{16}+\frac{(1-1)^2}{16}} = \sqrt{\frac{4}{16}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \quad \checkmark$$

$\|(1,1)\| = \max\{1,1\} = 1$

Norma operatora

vi) $A: (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1) \to (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ $\quad A(x,y) = \left(\frac{x+y}{4}, \frac{x-y}{4}\right)$

$\|(x,y)\|_1 = |x| + |y|$

$\|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2}$ $\quad \|(x,y)\|_1 = 1 \Rightarrow |x|+|y| = 1$

$|x| \leq 1$

$|y| \leq 1$

$$\|A(x,y)\|_2 = \sqrt{\frac{2(x^2+y^2)}{16}} = \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{x^2+y^2} \leq$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4}(|x|+|y|) = \frac{\sqrt{2}}{4}\|(x,y)\|_1$$

$$\|A(x,y)\| = \sqrt{\frac{2(x^2+y^2)}{16}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \quad \wedge \quad |x|+|y| = 1$$

Weźmy $(1,0)$

$$\|A(1,0)\| = \sqrt{\frac{2(1+0)}{16}} = \sqrt{\frac{2}{16}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \quad \checkmark$$

$$\|(1,0)\| = |1| + |0| = 1 \quad \checkmark$$

Normy funkcjonałów liniowych

6.A.2

a) $f(x_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{\sqrt[q]{n}}$ → wyrzucamy $\quad x_n \in l_p \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$!

$$\|f\| = \left\| \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[q]{n}} \right\|_q = \sqrt[q]{\sum_{k=1}^{n} \left|\frac{1}{\sqrt[q]{n}}\right|^q} = \sqrt[q]{\sum_{n=1}^{n} \frac{1}{n}} = 1$$

b) $f(x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k$ → wyrzucamy $\quad l_p^*$

$$\|f\| = \left\| \sum_{k=1}^{n} 1 \right\|_q = \sqrt[q]{\sum_{k=1}^{n} |1|^q} = \sqrt[q]{n}$$

6.A.3

a) $f(x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n(n+1)}$ → wyrzucamy $\quad c_0^*$

$$\|f\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \right\| = 1$$

b) $f(x_n) = 2x_1 - x_2 - 2x_3$

$$\|f\| = |2| + |-1| + |-2| = 5$$

c) $f(x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n^2}$ → wyrzucamy

$$\|f\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi}{6}$$

d) $f(x_n) = 10 \cdot x_{10}$

$$\|f\| = 10$$

6.A.4.

a) $f(x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}$ → wyrzucamy

$$\|f\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 \qquad C^*$$

b) $f(x_n) = x_1 - x_2$

$$\|f\| = 1 + 1 = 2$$

c) $f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n$

$$\|f\| = 1$$

Normy funkcjonałów liniowych

6.A.5

a) $f(x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ wyrzucamy

$\|f\| = \sup |1| = 1$

b) $f(x_n) = \frac{1}{2} x_1 - \frac{1}{2} x_2$

$\|f\| = \sup \left\{ \left|\frac{1}{2}\right|, \left|\frac{1}{2}\right| \right\} = \frac{1}{2}$

c) $f(x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (x_{2n+1} - 3x_{2n}) = -3x_2 + x_3 + -3x_4$

$\|f\| = \sup \{|-3|, |1|, |-3|\} = 3$ $\quad l_1^*$

d) $f(x_n) = x_1 - x_2 + 2x_3$

$\|f\| = \sup\{|1|, |-1|, |2|\} = 2$

6.A.6

a) $f(x) = \int_{-1}^{1} x(t)\,dt$

$\|f\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} 1^2\,dt} = \sqrt{t\big|_{-1}^{1}} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ $\quad L_2([-1,1])^*$

c) $f(x) = \int_{0}^{1} x(t)\,dt$

$\|f\| = \sqrt{\int_{0}^{1} 1^2\,dt} = 1$

b) $f(x) \int_{-1}^{1} t x(t)\,dt$

$\|f\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} t^2\,dt} = \sqrt{\frac{t^3}{3}\Big|_{-1}^{1}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$

Równoważność norm / Norma funkcjonału liniowego

zad. 3 z kolosa Poeling

$\|\cdot\| : c \to [0,\infty)$

$\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_1 = |x_1| + \sup\{|x_n| : n \geq 2\} + \lim_{n\to\infty} |x_n|$

$\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_1 = \sup\{|x_n| : n\in\mathbb{N}\} \to$ norma standardowa

$\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_1 = |x_1| + \sup\{|x_n| : n \geq 2\} + \lim_{n\to\infty} |x_n| \leq 3\sup\{|x_n| : n\in\mathbb{N}\}$
$= 3\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_2$

$\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_2 = \sup\{|x_n| : n\in\mathbb{N}\} \leq |x_1| + \sup\{|x_n| : n\geq 2\} \leq$
$|x_1| + \sup\{|x_n| : n\geq 2\} + \lim_{n\to\infty}|x_n| = \|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_1$

---

zad. 6. A.1

c) $f(x_1, x_2, x_3, \ldots) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n} \; \nearrow \, z \; l_2 \quad =$

$\left(x_n \mid \frac{1}{n}\right)$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \in l^2 \; \checkmark$

stąd liczymy normę

$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \right\| = \sqrt{\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}}} = \sqrt{\frac{\pi^2}{6}} = \frac{\pi}{\sqrt{6}}$ bo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ dla $\alpha > 1$ są zbieżne

$\left\{ \to \text{tzw. funkcja dzeta} \quad \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} \right\}$

Norma operatora

$\boxed{5A21}$ Norma operatora $A: C([0,1]) \to C([0,1])$

gdzie $(Af)(t) = t f(t)$ dla $t \in [0,1]$

norma w $C([0,1]) = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$

Bierzemy funkcje ze sfery jednostkowej $\|f\| = 1 \Rightarrow \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| = 1$

$$\|(Af)(t)\| = \sup_{t\in[0,1]} |t f(t)| \leqslant \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| = \|f\|$$ stała $= 1$

$$\|(Af)(t)\| = \sup_{t\in[0,1]} |t f(t)| = 1 \quad \wedge \quad \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| = 1$$

Weźmy $f(t) = 1$

$\|(Af)(t)\| = \sup_{t\in[0,1]} |t| = 1$ ✓

$\|f\| = \|1\| = \sup_{t\in[0,1]} 1 = 1$ ✓

1.5.1 Spis zadań

- Sprawdzenie czy coś jest normą / iloczynem skalarnym

  - $\langle f, g \rangle = \int_X f\overline{g}d\mu$

- Równoważność norm

  - $||f||_1 = \max\{|f(x)|\colon x \in [a,b]\} + \max\{|f'(x)|\colon x \in [a,b]\}$
    $||f||_2 = |f(a)| + \max\{|f(x)|\colon x \in [a,b]\}$
  - $||f||_1 = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)| + \sup\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)| + \sup\limits_{x\in[a,b]} |f''(x)|$
    $||f||_2 = |f(a)| + |f(b)| + \sup\limits_{x\in[a,b]} |f''(x)|$
  - $||x_n||_1 = \sqrt{\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^2}$
    $||x_n||_2 = \sqrt{\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|}{2^n}}$
  - $||x_n||_1 = |x_1| + \sup\{|x_n|\colon n \geqslant 2\} + \lim\limits_{n\to\infty} |x_n|$
    $||x_n||_2 = \sup\{|x_n|\colon n \in \mathbb{N}\}$

- Sprawdzenie czy norma pochodzi od iloczynu skalarnego

  - $C([a,b])$
  - c i c_0
  - l_p

- Sprawdzenie czy zbiór jest ograniczony

  - $\{f \in L_1([0,1])\colon \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \leqslant 1\}$
  - $\{f \in C([0,1])\colon \int_0^1 |f(x)|dx \leqslant 1\}$

- Sprawdzenie czy zbiór jest domknięty

  - $\{(x_1, x_2, \dots) \in l_2\colon x_1 = x_2\}$
  - $\{(x_1, x_2, \dots) \in l_2\colon x_{2k} = 0\, \forall_{k\in\mathbb{N}}\}$
  - $\{(x_1, x_2, \dots) \in l_2\colon \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \leqslant 1\}$
  - $\{(x_1, x_2, \dots) \in l_2\colon \exists_{n\geqslant 1} \forall_{k\geqslant n}\, x_k = 0\}$
  - $\{(x_1, x_2, \dots) \in l_1\colon x_{2k+1} = 0 \;\; \forall_{k\in\mathbb{N}}\}$

- Wyznaczanie norm operatorów

  - $T\colon (\mathbb{R}^2, ||\cdot||_1) \to (\mathbb{R}^2, ||\cdot||_2)$ oraz $T\colon (\mathbb{R}^2, ||\cdot||_2) \to (\mathbb{R}^2, ||\cdot||_1)$
    $T(x,y) = \left(\frac{x+y}{4}, \frac{x-y}{4}\right)$ dla norm
    $||(x,y)||_1 = \sqrt{x^2+y^2}$
    $||(x,y)||_2 = |x| + |y|$

- $T\colon (\mathbb{R}^2, ||\cdot||_\infty) \to (\mathbb{R}^2, ||\cdot||_1)$
  $T(x,y) = (2x-4y, x-5y)$ dla norm
  $||(x,y)||_\infty = \max\{|x|,|y|\}$
  $||(x,y)||_1 = |x|+|y|$
- $T\colon (\mathbb{R}^2, ||\cdot||_1) \to (\mathbb{R}^2, ||\cdot||_2)$
  $T(x,y) = (3x-2y, x-x)$ dla norm
  $||(x,y)||_1 = \max\{2|x|,|y|\}$
  $||(x,y)||_2 = |x|+|y|$
- $A\colon (\mathbb{R}^2, ||\cdot||_\infty) \to (\mathbb{R}^2, ||\cdot||_2)$
  $A(x,y) = \left(\frac{x+y}{4}, \frac{x-y}{4}\right)$ dla norm
  $||(x,y)||_\infty = \max\{|x|,|y|\}$
  $||(x,y)||_2 = \sqrt{x^2+y^2}$
- $A\colon (\mathbb{R}^2, ||\cdot||_1) \to (\mathbb{R}^2, ||\cdot||_2)$
  $A(x,y) = \left(\frac{x+y}{4}, \frac{x-y}{4}\right)$ dla norm
  $||(x,y)||_1 = |x|+|y|$
  $||(x,y)||_2 = \sqrt{x^2+y^2}$
- $A\colon C([0,1]) \to C([0,1])$
  $(Af)(t) = tf(t)$ dla $t \in [0,1]$

\- Wyznaczanie norm funkcjonałów liniowych i ciągłych

- $f(x_1,x_2,x_3,\dots) = \lim_{n\to\infty} x_n$ w przestrzeni c^*
- $f(x_1,x_2,x_3,\dots) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x_n}{n(n+1)}$ w przestrzeni c_0^*
- $f(x_1,x_2,x_3,\dots) = 2x_1 - x_2 - 2x_3$ w przestrzeni l_2^*
- $f(x_1,x_2,x_3,\dots) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{x_k}{\sqrt[q]{n}}$ w przestrzeni l_p^*
- $f(x_1,x_2,x_3,\dots) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ w przestrzeni l_p^*
- $f(x_1,x_2,x_3,\dots) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x_n}{n(n+1)}$ w przestrzeni c_0^*
- $f(x_1,x_2,x_3,\dots) = 2x_1 - x_2 - 2x_3$ w przestrzeni c_0^*
- $f(x_1,x_2,x_3,\dots) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x_n}{n^2}$ w przestrzeni c_0^*
- $f(x_1,x_2,x_3,\dots) = 10\cdot x_{10}$ w przestrzeni c_0^*
- $f(x_1,x_2,x_3,\dots) = \frac{x_n}{2^n}$ w przestrzeni c^*
- $f(x_1,x_2,x_3,\dots) = x_1 - x_2$ w przestrzeni c^*
- $f(x_1,x_2,x_3,\dots) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ w przestrzeni c^*
- $f(x_1,x_2,x_3,\dots) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ w przestrzeni l_1^*
- $f(x_1,x_2,x_3,\dots) = \dfrac{1}{2}x_1 - \dfrac{1}{2}x_2$ w przestrzeni l_1^*

- $f(x_1, x_2, x_3, \dots) = \sum_{n=1}^{\infty}(x_{2n+1} - 3x_{2n})$ w przestrzeni l_1^*
- $f(x_1, x_2, x_3, \dots) = x_1 - x_2 + 2x_3$ w przestrzeni l_1^*
- $f(x) = \int_{-1}^{1} x(t)dt$ w przestrzeni $L_2([-1, 1])^*$
- $f(x) = \int_{0}^{1} x(t)dt$ w przestrzeni $L_2([-1, 1])^*$
- $f(x) = \int_{-1}^{1} tx(t)dt$ w przestrzeni $L_2([-1, 1])^*$
- $f(x_1, x_2, x_3, \dots)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n}$ w przestrzeni l_2^*

\- Zbieżność ciągów

- $f_n(x) = x(1 - x^n)$ w $C([0, 1])$
- $f_n(x) = x^n(1 - x)$ w $C([0, 1])$
- $f_n(x) = x^n(1 - x^n)$ w $C([0, 1])$
- $x^{(n)} = (x_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}} = (n^{\frac{1}{k}})_{k\in\mathbb{N}}$ w c
- $x^{(n)} = (x_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{(n+1)^k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ w c
- $x^{(n)} = (x_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}} = \left(\sqrt[k]{\frac{1}{n} + k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ w c
- $f_n(x) = x^n$ w $C([0, 1])$ i $L_2([0, 1])$

\- Sprawdzenie czy przestrzeń jest przestrzenią Banacha

- l_1