Charakteryzacja półwklęsłości przy użyciu wypukłości w sensie Jensena

Na początku przypomnijmy definicję funkcji półwklęsłej.

Definicja. *Mówimy, że funkcja $f\colon A \to \mathbb{R}$, gdzie $A \subset \mathbb{R}^n$ jest półwklęsła jeśli*

$$\underset{c>0}{\exists}\ f(x+y) - 2f(x) + f(x-y) \leqslant c|y|^2$$

gdzie $x, y, x+y, x-y \in A$.

Twierdzenie. *Funkcja f jest półwklęsła, gdy istnieje stała $c > 0$ taka, że odwzorowanie $x \longmapsto f(x) - \frac{c}{2}|x|^2$ jest wklęsłe.*

Celem naszych rozważań będzie udowodnienie powyższego twierdzenia. W tym celu wprowadzimy definicję wypukłości oraz szczególnego przypadku czyli wypukłości w sensie Jensena oraz udowodnimy dwa pomocnicze lematy.

Definicja. *Mówimy, że funkcja $f\colon A \to \mathbb{R}$, gdzie $A \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem wypukłym, jest wypukła, jeśli*

$$\underset{x,y\in A}{\forall}\ \underset{t\in(0,1)}{\forall}\ f(tx + (1-t)y) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y)$$

Definicja. *Mówimy, że funkcja $f\colon A \to \mathbb{R}$, gdzie $A \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem wypukłym, jest wypukła w sensie Jensena, jeśli*

$$\underset{x,y\in A}{\forall}\ f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

czyli jest to funkcja wypukła dla $t = \frac{1}{2}$

Uwaga. *Funkcja f jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja $-f$ jest wklęsła.*

Zatem nasze twierdzenie możemy zapisac w następującej, dualnej wersji.

Twierdzenie. *[Wersja dualna] Funkcja f jest półwklęsła, gdy istnieje stała $c > 0$ taka, że odwzorowanie $x \longmapsto \frac{c}{2}|x|^2 - f(x)$ jest wypukłe.*

Lemat. *Niech $f\colon A \to \mathbb{R}$, gdzie $A \subset \mathbb{R}$ będzie funkcja ciągłą. Wtedy f jest funkcja wypukłą wtedy i tylko wtedy, gdy jest funkcją wypukła w sensie Jensena.*

Dowód. ($\Longrightarrow$)
Oczywisty (każda funkcja wypukła jest wypukła w sensie Jensena)
($\Longleftarrow$) Załóżmy, że funkcja f jest wypukła w sensie Jensena. Przypuśćmy, że f nie jest funkcją wypukłą, wtedy istnieją punkty $a, b \in A$ oraz takie $t \in (0,1)$, że

$$f(ta + (1-t)b) > tf(a) + (1-t)f(b)$$

Zdefiniujmy funkcję $\varphi \colon A \to \mathbb{R}$ następująco

$$\varphi(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a)$$

dla $x \in [a, b]$
Zauważmy, że φ jest sumą f i funkcji afinicznej. Pokażemy teraz, że $\gamma := \sup_{x \in [a,b]} \varphi(x) > 0$. Istotnie

$$\begin{aligned}
\varphi(ta - (1-t)b) &= f(ta + (1-t)b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(ta + (1-t)b - a) - f(a) \\
&> tf(a) + (1-t)f(b)\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(ta + (1-t)b - a) - f(a) \\
&= tf(a) + (1-t)f(b) - (1-t)[f(b) - f(a)] - f(a) = 0
\end{aligned}$$

Kolejnym krokiem będzie zauważenie, że φ zeruje się na a oraz b, a także że φ jest funkcją wypukłą w sensie Jensena.

$$\varphi(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) - f(a) = f(a) - f(a) = 0$$

$$\varphi(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) - f(a) = f(b) - f(b) + f(a) - f(a) = 0$$

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right) &= f\left(\frac{x+y}{2}\right) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\left(\frac{x+y}{2} - a\right) - f(a) \\
&\leqslant \frac{f(x) + f(y)}{2} - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\left(\frac{x+y}{2} - 2\frac{a}{2}\right) - 2\frac{f(a)}{2} \\
&= \frac{\varphi(x) + \varphi(y)}{2}
\end{aligned}$$

Oznaczmy $c := \inf\{x \in [a, b] \colon \varphi(x) = \gamma\}$. Z faktu, że funkcja φ jest ciągła mamy, że $\varphi(c) = \gamma > 0$, co implikuje, że $c \in (a, b)$. Dla każdego $h > 0$ takiego, że $c \pm h \in (a, b)$ mamy $\varphi(c-h) < \varphi(c)$ oraz $\varphi(c + h) \leqslant \varphi(c)$, z faktu, że φ jest funkcją wypukła w sensie Jensena mamy

$$\varphi(c) = \varphi\left(\frac{(c-h) + (c+h)}{2}\right) \leqslant \frac{\varphi(c-h) + \varphi(c+h)}{2} < \frac{\varphi(c) + \varphi(c)}{2} = \varphi(c)$$

A zatem sprzeczność, stąd f musi byc funkcja wypukłą. $\square$

Dowód. [Twierdzenia - wersji dualnej] Na początek przywołamy prostą równość

$$|x + y|^2 - 2|x|^2 + |x - y|^2 = 2|y|^2$$

Przemnóżmy ją stronami przez $\frac{c}{2}$ otrzymując w ten sposób

$$\frac{c}{2}|x + y|^2 - c|x|^2 + \frac{c}{2}|x - y|^2 = c|y|^2 \qquad (*)$$

Naszym celem jest pokazanie, że funkcja f jest półwklęsła czyli

$$\underset{c>0}{\exists}\ f(x+y) - 2f(x) + f(x-y) \leqslant c|y|^2$$

Korzystając z równości $(*)$ chcemy wykazać, że

$$f(x+y) - 2f(x) + f(x-y) \leqslant \frac{c}{2}|x+y|^2 - c|x|^2 + \frac{c}{2}|x-y|^2$$

czyli

$$f(x+y) - 2f(x) + f(x-y) - \frac{c}{2}|x+y|^2 + c|x|^2 - \frac{c}{2}|x-y|^2 \leqslant 0$$

Przekształcając uzyskujemy

$$f(x+y) - \frac{c}{2}|x+y|^2 - 2\left(f(x) - \frac{c}{2}|x|^2\right) + f(x-y) - \frac{c}{2}|x-y|^2 \leqslant 0$$

Podstawiając $h(x) = \frac{c}{2} - f(x)$ otrzymujemy

$$h(x+y) - 2h(x) + h(x-y) \geqslant 0$$

Przekształćmy powyższą nierówność

$$\frac{h(x+y) + h(x-y)}{2} \geqslant h(x)$$

i podstawmy $a = x + y$ oraz $b = x - y$

$$\frac{h(a) + h(b)}{2} \geqslant h\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

A zatem odwzorowanie h jest wypukłe w sensie Jensena. Zatem korzystając z lematu wiemy, że jest także wypukłe. $\square$