Funkcjonał liniowy ciągły w przestrzeniach c_0 i c

Twierdzenie 1.

1. *Niech x^* będzie funkcjonałem liniowym ciągłym nad przestrzenią c_0 ciągów zbieżnych do zera, wtedy istnieje dokładnie jeden ciąg (s_k) taki, że $\sum_{k=1}^{\infty} |s_k| < \infty$ oraz że*

$$x^*x = \sum_{k=1}^{\infty} t_k s_k \ \textit{dla każdego } x = (t_k) \in c_0 \tag{1}$$

   przy czym $||x^*|| = \sum_{k=1}^{\infty} |s_k|$. Na odwrót, jeżeli $\sum_{k=1}^{\infty} |s_k| < \infty$, to wzór (1) określa funkcjonał x^* liniowy ciągły nad c_0

2. *Niech x^* będzie funkcjonałem liniowym ciągłym nad przestrzenią c ciągów zbieżnych, wtedy istnieje dokładnie jeden ciąg $s_0, s_1, s_2, \ldots$ taki, że $\sum_{k=0}^{\infty} |s_k| < \infty$ oraz że*

$$x^*x = ts_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (t_k - t)s_k \ \textit{dla każdego } x = (t_k) \in c \textit{ gdzie } t = \lim_{k\to\infty} t_k \tag{2}$$

   Na odwrót, x^* określone powyżej jest funkcjonałem liniowym i ciągłym nad c.

3. *Przestrzenie c^* i c_0^* sprzężone odpowiednio do c i c_0 są izometrycznie izomorficzne przestrzeni l^1*

Twierdzenie 2. *[Riesza]*
Niech x^* będzie funkcjonałem liniowym ciągłym nad przestrzenią $C([a,b])$ funkcji ciągłych w przedziale zwartym $[a,b] \subset \mathbb{R}$ z normą $||x|| = \sup_{a\leqslant t\leqslant b} |x(t)|$. Wtedy istnieje taka funkcja y o skończonej wariacji w $[a,b], y(a) = 0$, że

$$x^*x = \int_a^b x(t)dy(t) \ \textit{dla każdego } x \in C([a,b]) \tag{3}$$

oraz $||x^*|| = \bigvee_a^b y$. Na odwrót, jeżeli y jest funkcją o skończonej wariacji w $[a,b]$, to funkcjonał x^* określony wzorem (3) jest liniowy i ciągły nad $C[a,b])$

Twierdzenie 3. *[Riesza]*
Niech μ będzie miara σ-skończoną w σ-algebrze Σ podzbiorów zbioru Ω i niech $1 \leqslant p < \infty$. Niech x^* będzie funkcjonałem liniowym ciągłym nad przestrzenią $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ funkcji Σ-mierzalnych x, całkowalnych z p-tą potęgą w Ω, z normą $||x|| = \left(\int_\Omega |x(t)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$. Wtedy istnieje dokładnie jedna (w sensie równości μ-prawie wszędzie) funkcja Σ-mierzalna y taka, że

$$x^*x = \int_\Omega x(t)y(t)d\mu \ \textit{dla każdego } x \in L^P(\Omega, \Sigma, \mu) \tag{4}$$

przy czym, gdy $1 < p < \infty$, $y \in L^q(\Omega, \Sigma, \mu)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $||x^*|| = \left(\int_\Omega |y(t)|^q dq\right)^{\frac{1}{q}}$, a gdy $p = 1$, to $y \in M(\Omega, \Sigma, \mu)$ i $||x^*|| =$ sup ess$_{t\in\Omega}|y(t)|$. Na odwrót, przy danym y spełniającym powyższe warunki, funkcjonał x^* określony wzorem (4) jest liniowy i ciągły nad $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$

Dowód. [Twierdzenia 1]
Ograniczymy się do rozpatrzenia przypadku przestrzeni c_0. Niech funkcjonał x^* będzie określony wzorem (1); ponieważ ciąg (t_k) jest ograniczony i $\sum_{k=1}^{\infty} |s_k| < \infty$, więc szereg po prawej stronie równości (1) jest zbieżny. Liniowość x^* jest oczywista, a ciągłość wynika z nierówności

$$|x^*x| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |t_k s_k| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |s_k| \sup_j |t_j| = \sum_{k=1}^{\infty} |s_k| \cdot ||x||$$

Z nierówności tej wynika też, że $||x^*|| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |s_k|$. Obierzmy teraz $x_n = (t_k^n)$, gdzie $t_k^n = \frac{\overline{s_k}}{|s_k|}$, gdzie $s_k \neq 0$ i $k \leqslant n$, $t_k^n = 0$, gdzie $s_k = 0$ lub $k > n$. Oczywiście $(x_n) \in c_0$. Jeżeli nie wszystkie $s_k = 0$ to dla dostatecznie dużych n mamy $||x_n|| = 1$. Ponadto $x^*x_n = \sum_{k=1}^{n} |s_k| \to \sum_{k=1}^{\infty} |s_k|$ oraz $||x^*|| \geqslant x^*x_n$, więc w granicy przy $n \to \infty$, $||x^*|| = \sum_{k=1}^{\infty} |s_k|$. Gdy $s_k = 0$ dla wszystkich k to równość ta jest oczywista.
Załóżmy teraz na odwrót, że x^* jest funkcjonałem liniowym ciągłym nad c_0. Niech $e_n = (\delta_{in})$ dla $n = 1, 2, \ldots$, gdzie $\delta_{in} = 1$ dla $i = n$, $\delta_{in} = 0$ dla $i \neq n$. Oznaczmy $s_n = x^*e_n$ dla $n = 1, 2, \ldots$. Niech $x = (t_k) \in c_0$, $x_n = \sum_{k=1}^{n} t_k e_k$. Wtedy

$$||x - x_n|| = \sup_{k>n} |t_k| \to 0 \text{ przy } n \to \infty$$

więc na podstawie ciągłości funkcjonału x^* mamy $x^*x = \lim_{n\to\infty} x^*x_n$. Na podstawie liniowości funkcjonału x^*, mamy

$$x^*x_n = \sum_{k=1}^{n} t_k x^* e_k = \sum_{k=1}^{n} t_k s_k$$

Stąd

$$x^*x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} t_k s_k = \sum_{k=1}^{\infty} t_k s_k$$

Trzeba wykazać jeszcze, że $\sum_{k=1}^{\infty} |s_k| < \infty$. W tym celu rozpatrzmy funkcjonał liniowy ciągły $x_n^*x = \sum_{k=1}^{n} t_k s_k$ nad c_0. Na podstawie poprzedniej części dowodu jego norma dana jest wzorem $||x_n^*|| = \sum_{k=1}^{n} |s_k|$
Zastosujmy twierdzenie Banacha-Steinhausa. Ponieważ ciąg (x_n^*x) jest zbieżny dla każdego $x \in c_0$, więc ciąg norm $(||x_n^*||)$ jest ograniczony. Istnieje zatem taka liczba $M > 0$, że $||x_n^*|| < M$ dla $n = 1, 2, \ldots$ tj. $\sum_{k=1}^{n} |s_k| < M$ dla $n = 1, 2, \ldots$. Stąd $\sum_{k=1}^{\infty} |s_k| < \infty$, co kończy dowód twierdzenia. $\square$

Twierdzenie 4. *[Banacha-Steinhausa]*
Granica punktowa ciągu operatorów liniowych i jednakowo ciągłych między przestrzeniami Banacha jest ciągłym operatorem liniowym.