

Interpolacja Czebyszewa

Wielomiany Czebyszewa pierwszego rodzaju

Wielomiany te można definiować na dwa różne sposoby

- Rekurencyjny:

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2x \cdot T_{k-1}(x) - T_{k-2}(x)$$

- Jawny:

$$T_k(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^k + (x - \sqrt{x^2 - 1})^k}{2}$$

Postać trygonometryczna

Wielomiany te można również zapisać za pomocą funkcji trygonometrycznych (przekształcając postać jawną stosując odpowiednie podstawienie):

$$T_k(x) = \cos(k \cdot \arccos(x))$$

Uwaga

Wielomiany Czebyszewa są określone na przedziale $[-1, 1]$ (tam są ortogonalne wraz z wagą)

Przykładowe wielomiany Czebyszewa

5 pierwszych wielomianów Czebyszewa:

1. $T_0(x) = 1$

2. $T_1(x) = x$

3. $T_2(x) = 2x^2 - 1$

4. $T_3(x) = 4x^3 - 3x$

5. $T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$

A nasz wielomian interpolacyjny będzie miał postać

$$F(x(t)) = a_0 T_0\left(\frac{t}{2} - 7\right) + a_1 T_1\left(\frac{t}{2} - 7\right) + a_2 T_2\left(\frac{t}{2} - 7\right) + a_3 T_3\left(\frac{t}{2} - 7\right) + a_4 T_4\left(\frac{t}{2} - 7\right)$$

Wyliczmy teraz współczynniki a_0, a_1, a_2, a_3, a_4

$$\begin{bmatrix} T_0(x_0) & T_1(x_0) & T_2(x_0) & T_3(x_0) & T_3(x_0) \\ T_0(x_1) & T_1(x_1) & T_2(x_1) & T_3(x_1) & T_3(x_1) \\ T_0(x_2) & T_1(x_2) & T_2(x_2) & T_3(x_2) & T_3(x_2) \\ T_0(x_3) & T_1(x_3) & T_2(x_3) & T_3(x_3) & T_3(x_3) \\ T_0(x_4) & T_1(x_4) & T_2(x_4) & T_3(x_4) & T_3(x_4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_0 \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix}$$

Podstawmy nasze dane:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -0.5 & -0.5 & 1 & -0.5 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0.5 & -0.5 & -1 & -0.5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 25 \\ 23 \\ 20 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Po wyliczeniu $a_0 = 21.6, a_1 = -4.33, a_2 = -1.5, a_3 = 0.33, a_4 = -0.166$

Po podstawieniu $t = 14,5$ czyli w naszej znormalizowanej wersji $x = 0.25$ otrzymujemy: $W(0.25) == 21.6 \cdot (1) - 4.33 \cdot (0.25) - 1.5 \cdot (2 \cdot 0.25^2 - 1) + 0.33 \cdot (4 \cdot 0.25^3 - 3 \cdot -0.25) - 0.166 \cdot (8 \cdot 0.25^4 - 0.25^2 + 1) = 21.57 \approx 21.6$