Klasyfikacja punktów krytycznych układów liniowych w $\mathbb{R}^2$

Na samym początku naszych rozważań chcieliśmy przypomnieć kilka pojęć i definicji opisujących układy liniowe na płaszczyźnie i niezbędnych do zrozumienia ich działania. Będziemy rozpatrywać równanie autonomiczne:

$$\dot{x} = Ax \qquad (1)$$

gdzie $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ jest stałą macierzą, a x jest wektorem dwuwymiarowym $[x_1, x_2]$

Zatem nasz układ również pisząc szczegółowo wygląda następująco:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x_2} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases} \qquad (2)$$

Def.: *Punktem krytycznym* powyższego równania naszywamy punkt, w którym $\dot{x} = 0$ czyli mówiąc w skrócie punkt, w którym pochodna się zeruje

W naszym przypadku od razu widać, że punktem tym na pewno jest $x = 0$ (wtedy równanie (1) ma postać: $\dot{x} = A \cdot 0$ czyli prawa strona od razu jest zerem)

Def.: Układ liniowy nazywamy *układem prostym*, gdy nasza macierz A jest nieosobliwa ($\det A \neq 0$)

Naszą klasyfikację będziemy rozważać tylko dla układów prostych w otoczeniu punktu krytycznego $x = 0$
W tym celu rozpatrzymy wielomian charakterystyczny naszej macierzy A:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - tr(A)\lambda + \det A = 0$$

gdzie oczywiście $trA = a_{11} + a_{22}$ jest śladem macierzy A (czyli sumą elementów na przekątnej)
Wyliczmy teraz wartości własne korzystając z podanego wielomianu charakterystycznego:

$$\Delta = tr(A)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \det A$$

$$\lambda_1 = \frac{trA - \sqrt{\Delta}}{2} \qquad \lambda_2 = \frac{trA + \sqrt{\Delta}}{2}$$

Wiadomo, że znajomość wartości własnych pozwala nam znaleźć bazę $\mathbb{R}^2$, w której nasza macierz będzie miała postać kanoniczną. Właśnie takie macierze będziemy rozpatrywać.

Przejdźmy już do konkretnych przypadków:

- $\boxed{\Delta > 0}$

  Nasze równanie ma w tym przypadku dwie różne i rzeczywiste wartości własne, a wektory własne tworzą bazę kanoniczną $\mathbb{R}^2$

  Macierz A ma postać:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

  Wstawiając do układu (2) otrzymujemy:

$$\dot{x_1} = \lambda_1 \cdot x_1$$
$$\dot{x_2} = \lambda_2 \cdot x_2$$

  Rozwiązaniami powyższego układu są:

$$x_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \qquad x_2(t) = c_2 e^{\lambda_2 t}$$

  Możemy teraz wyliczyc równanie orbit wykonując pewne przekształcenia:

  $x_1 = c_1 e^{\lambda_1 t}$

  $\frac{x_1}{c_1} = e^{\lambda_1 t}$

  $\log(\frac{x_1}{c_1}) = \lambda_1 t$

  $\log(\frac{x_1}{c_1})^{\frac{1}{\lambda_1}} = t$

  $x_2 = c_2 e^{\lambda_2 t}$

  Wstawiamy wyliczone t:

  $x_2 = c_2 e^{\lambda_2 \log(\frac{x_1}{c_1})^{\frac{1}{\lambda_1}}}$

  $x_2 = c_2 e^{\log(\frac{x_1}{c_1})^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}}$

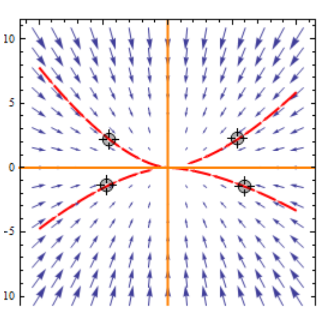
  $x_2 = c_2 \frac{x_1}{c_1}^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$

  $x_2 = c x_1^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$

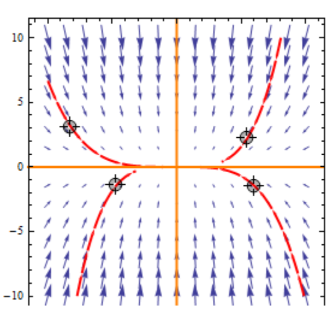
  Czyli nasze $x_2 = c x_1^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$

  Można to zilustrować dla przypadków, gdy:

- $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$



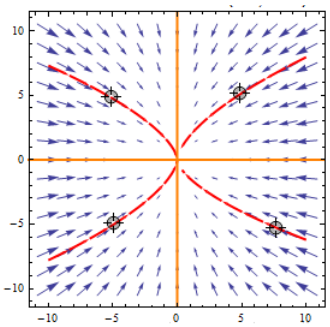
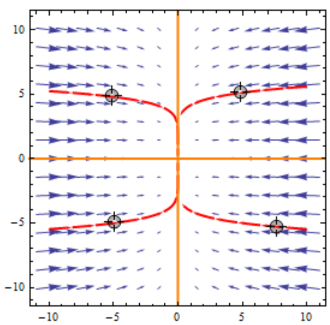
$\lambda_1 = -1.75,\ \lambda_2 = -2.8$



$\lambda_1 = -0.2,\ \lambda_2 = -1.55$

W tych przypadkach punkt $x = 0$ nazywa się *węzłem*, dodatkowo punkt jest stabilny stąd nazwać go możemy *węzłem stabilnym*

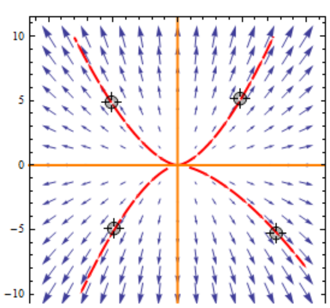
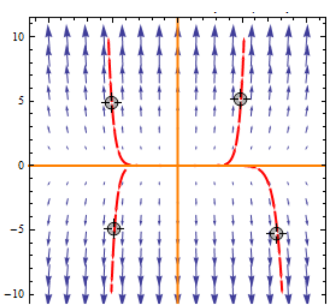
- $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$

$\lambda_1 = -2.8,\ \lambda_2 = -1.75$ $\qquad\qquad$ $\lambda_1 = -1.75,\ \lambda_2 = -0.2$

Tutaj punkt również jest *węzłem stabilnym*, z ta różnicą, że do $x = 0$ zmierzamy po osi x_2, a nie x_1 jak w poprzednim przypadku

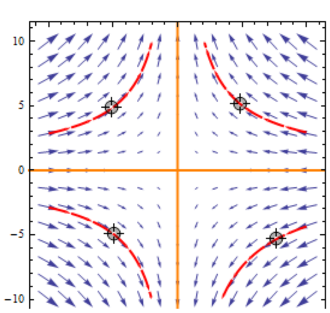
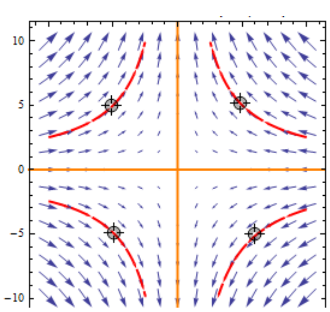
- $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$

$\lambda_1 = 1.75,\ \lambda_2 = 2.8$ $\qquad\qquad$ $\lambda_1 = 0.2,\ \lambda_2 = 1.55$

Mamy tu doczynienia z *węzłem niestabilnym*, sytuacja jest analogiczna dla $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$

- $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

$\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 2$ $\qquad\qquad$ $\lambda_1 = -5,\ \lambda_2 = 5$

W tym przypadku punkt $x = 0$ nazywać będziemy *siodłem*, jest ono niestabilne (po jednej osi mamy zbieganie do 0, po drugiej odpychanie od 0)

Gdy $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ to następuje zamiana osi przyciągającej i odpychającej

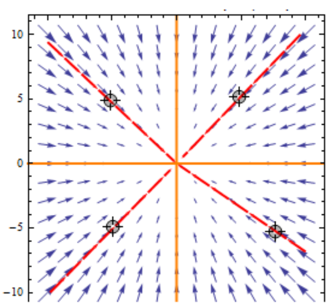
- $\boxed{\Delta = 0}$

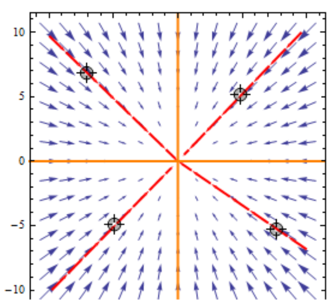
  Mamy tutaj dwie identyczne rzeczywiste wartości własne

  Gdy tej wartości własnej odpowiadają dwa liniowo niezależne wektory to macierz A jest postaci:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

- $\lambda < 0$

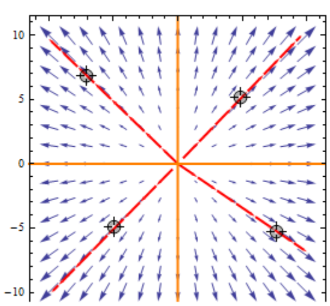


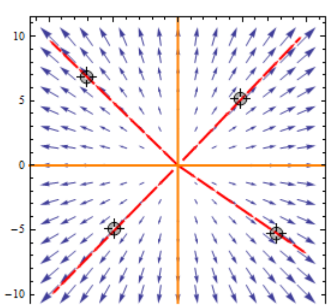


$\lambda = -1$ $\qquad$ $\lambda = -5$

Widzimy tu tak zwany *węzeł gwiaździsty stabilny*

- $\lambda > 0$





$\lambda = 2$ $\qquad$ $\lambda = 7$

Tu z kolei mamy *węzeł gwiaździsty niestabilny*

Jeśli jednak wartości własnej λ odpowiada jeden wektor własny to macierz A jest postaci:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}$$

Jak widać macierz ta jest klatką Jordana, a nasze równanie (2) wygląda następująco:

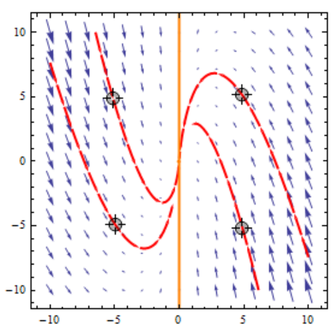
$$\dot{x_1} = \lambda x_1$$

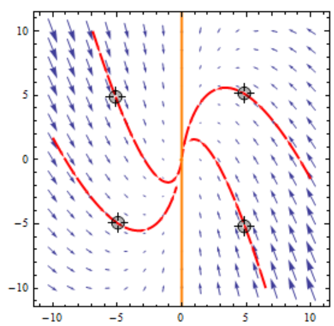
$$\dot{x_2} = x_1 + \lambda x_2$$

Gdzie rozwiązania takiego układu są:

$$x_1 = c_1 e^{\lambda t} \qquad\qquad x_2 = (c_2 + c_1 t)e^{\lambda t}$$

- $\lambda < 0$

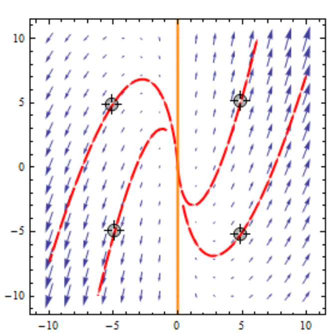


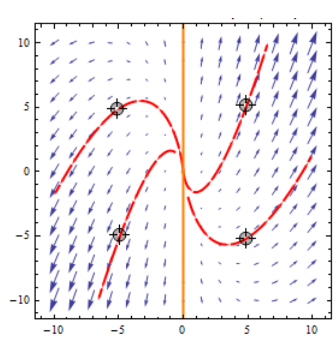


$\lambda = -0.4$ $\qquad\qquad$ $\lambda = -0.6$

$x = 0$ jest tutaj nazywamy *węzłem zdegenerowanym stabilnym*

- $\lambda > 0$





$\lambda = 0.4$ $\qquad\qquad$ $\lambda = 0.6$

Tu z kolei $x = 0$ jest *węzłem zdegenerowanym niestabilnym*