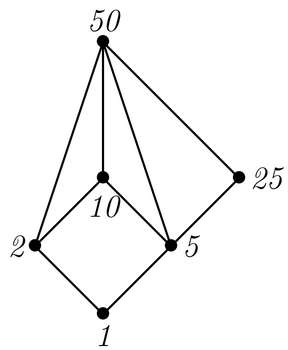
Zad.1

Treść.
a) Wyznaczyć rangę elementu 50 *w zbiorze częściowo uporządkowanym* $(\mathbb{N}, \mid)$.

Rozwiązanie.
Na początek przypomnijmy definicję rangi. Rangą elementu a nazywamy maksymalną długość łańcucha w przedziale $(\leftarrow, a]$ *(gdzie* $(\leftarrow, a] = \{x \in X : x \leqslant a\}$*) i oznaczamy* $r(a)$*. Z kolei długość łańcucha wynosi* $|L| - 1$*, gdzie* $|L|$ *oznacza ilość punktów w łańcuchu. Aby wyznaczyć rangi elementów w jakimkolwiek zbiorze najlepiej narysować sobie diagram Hassego obrazujący zachodzące relacje przy elemencie, którego rangę musimy wyliczyć.*



W tym przykładzie mamy dwa maksymalne łańcuchy o długości 3*, zatem* $r(50) = 3$.

Treść.
b) Wyznaczyć rangę elementu $\{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6,7\}\}$ *w zbiorze podziałów zbioru* $\{1,2,\ldots,7\}$ *z relacją zawierania* $\subseteq$.

Rozwiązanie.
W tym przykładzie oczywiście możnaby narysowac diagram Hassego, jednak byłby on bardzo złożony z racji faktu, że naszym zbiorem sa podziały zbioru. Zauważmy, że potrzebna nam długość najdłuższego łańcucha łączącego nasz podział zbioru, którego rangę wyliczamy z najdrobniejszym podziałem, który w tym przypadku wygląda następująco:

$$\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\},\{7\}\}$$

Najdłuższy łańcuch łączący musi być konstruowany tak, aby w każdym z jego elementów łączyć ze sobą tylko dwa zbiory, a nie więcej. Oczywiście takich łańcuchów jest wiele, gdyż możemy np. połączyć na początku zbiory $\{1\},\{2\}$ *w zbiór* $\{1,2\}$*, lecz możemy równie dobrze połączyć* $\{4\},\{5\}$ *w zbiór* $\{4,5\}$*. Poniżej prezentujemy wycinek z diagramu Hassego z jednym z możliwych łańcuchów maksymalnych.*

$$\{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6,7\}\}$$
$$\{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\},\{7\}\}$$
$$\{\{1,2\},\{3,4\},\{5\},\{6\},\{7\}\}$$
$$\{\{1,2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\},\{7\}\}$$
$$\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\},\{7\}\}$$

Jak widać $r(\{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6,7\}\}) = 4$.

Zad.2

Treść. *Mamy dany zbiór* $X = \{1, 2, \ldots, 11\}$ *oraz dwa podziały zbioru*

$$\pi = \{\{1\}, \{2, 3\}, \{4\}, \{5, 6\}, \{7\}, \{8, 9\}, \{10\}, \{11\}\}$$

$$\sigma = \{\{1\}, \{3\}, \{2, 4\}, \{5, 6\}, \{7\}, \{8, 9, 10\}, \{11\}\}$$

Wyznaczyć $\pi \wedge \sigma$ *oraz* $\pi \vee \sigma$.

Rozwiązanie.
Musimy znaleźć $\pi \wedge \sigma$ *czyli infimum oraz* $\pi \vee \sigma$ *czyli supremum obydwu tych podziałów. Infimum stanowić będzie podział drobniejszy od obydwu z wyżej wymienionych, ale jednocześnie będzie to musiał być możliwie "najgrubszy" podział zawierający się zarówno w* π *jak i w* σ*. Przedstawimy teraz z czego będzie się on składał. Zbiór* $\{1\}$ *powtarza się w obu podziałach, zatem on pozostaje, następnie badamy* $\{2, 3\}$ *i* $\{4\}$ *z* π *i* $\{3\}$ *i* $\{2, 4\}$ *z* σ*. Nie ma żadnych wspólnych zbiorów, zatem musimy rozbić je na zbiory jednoelementowe* $\{2\}, \{3\}, \{4\}$*, kolejny jest zbiór* $\{5, 6\}$ *powtarzający się w pi i w* σ*, zatem i on zostaje w infimum. Potem badamy* $\{7\}, \{8, 9\}, \{10\}$ *z* π *i* $\{7\}, \{8, 9, 10\}$ *z* σ*, zauważamy, że wspólny jest jedynie podzbiór* $\{8, 9\}$*, zatem jego zostawiamy w całości, a resztę rozbijamy* $\{7\}, \{10\}$*. Na koniec dołączamy wspólny element* $\{11\}$*. W sumie mamy*

$$\pi \wedge \sigma = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5, 6\}, \{7\}, \{8, 9\}, \{10\}, \{11\}\}$$

Z supremum sytuacja będzie analogiczna, lecz w drugą stronę. Poszukiwać będzie podziału "grubszego" od π *i od* σ*, lecz możliwie najdrobniejszego zawierającego w sobie podziały* π *i* σ*. Oczywiście* $\{1\}$ *jest w obu zbiorach takie samo, jednak dla* $\{2, 3\}, \{4\}$ *z* π *i* $\{3\}, \{2, 4\}$ *z* σ *jedynym nadzbiorem zawierającym je jest* $\{2, 3, 4\}$*, następne jest* $\{5, 6\}$ *z zarówno* π *jak i* σ*, podobnie sytuacja ma się ze zbiorem* $\{7\}$*. Dla zbiorów* $\{8, 9\}, \{10\}$ *z* π *i* $\{8, 9, 10\}$ *z* σ *jedynym nadzbiorem jest* $\{8, 9, 10\}$*. Na koniec jak poprzednio dodajemy* $\{11\}$*. Reasumując mamy*

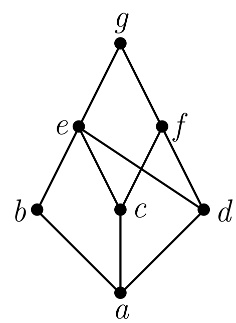
$$\pi \vee \sigma = \{\{1\}, \{2, 3, 4\}, \{5, 6\}, \{7\}, \{8, 9, 10\}, \{11\}\}$$

Na koniec prezentujemy istotną uwagę przydatną do sprawdzenia poprawności wyliczania infimum i supremum.

> *"Infimum dwóch elementów zawiera się w nich obydwu, a supremum dwóch elementów zawiera je obydwa."*
>
> – Piotr Mikula, *Komplety Zabrzańskie*

Zad.3

Treść.
Dla podanego diagramu Hassego wyznaczyć macierz wartości funkcji Möbiusa.



Rozwiązanie.
Na początku ustalmy wymiar naszej macierzy, mamy 7 elementów, zatem $M(\mu)$ będzie wymiaru 7×7. Kolejnośc ustawiania elementów zarówno w wierszach jak i w macierzach niech będzie alfabetyczna (czyli a,b,c,d,e,f,g). Elementy pod przekątną macierzy od razu wypełniamy zerami, gdyż kierujemy się zasadą, że $M(\mu)[i,j] = \mu(i,j)$, a z postaci wzoru funkcji Mobiusa wiemy, że występują tam tylko nierówności $\leqslant$ (nie ma w drugą stronę $\geqslant$). Stąd mamy

$$\begin{bmatrix} & & & & & & \\ 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \end{bmatrix}$$

Kolejną ważną rzeczą jest fakt, że $\mu(x,x) = 1$ dla $x \in P$. Zatem przekątna składa się z samych jedynek. Dokładamy ją do macierzy i uzyskujemy

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ 0 & 1 & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Teraz zajmiemy się elementami sąsiednimi. Aby wyliczyć ich wartość jak i wartości na pozostałych punktach przypomnijmy wzór na funkcję Möbiusa

$$\sum_{z \in [x,y)} \mu(z,y) = -1$$

lub alternatywnie

$$\sum_{z \in (x,y]} \mu(x,z) = -1$$

Korzystając ze wzoru pierwszego, gdy mamy $x <\cdot\ y$ w przedziale $[x, y)$ znajduje się wyłącznie $z = x$, zatem $\mu(z, y) = \mu(x, y) = -1$, co infomuje nas, że zawsze funkcja Möbiusa pomiędzy sąsiednimi punktami przyjmować będzie wartości -1. W naszym grafie są to punkty $a-b, a-c, a-d, b-e, c-e, d-e, c-f, d-f, e-g, f-g$. Uzupełniamy macierz wartościami -1 na tych punktach.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & & & \\ 0 & 1 & & & -1 & & \\ 0 & 0 & 1 & & -1 & -1 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Kolejną prostą rzeczą sa elementy nieporównywalne, na których wartości podobnie jak na elementach pod przekątną wyniosą 0. U nas sa to pary $b-c, c-d, b-d, b-f, e-f$. Uzupełniamy macierz zerami na tych punktach.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

To tyle z banałów. Pozostałe wartości wyliczyć musimy korzystając ze wzoru. Rozpiszemy metodę postępowania dla $\mu(a, e)$. Przypomnijmy wzór

$$\sum_{z \in (a,e]} \mu(a, z) = -1$$

Zauważmy, że

$$\sum_{z \in [a,e]} \mu(a, z) = \sum_{z \in (a,e]} \mu(a, z) + \mu(a, a) = -1 + 1 = 0$$

Zatem rozpisując mamy

$$\underbrace{\mu(a, a)}_{1} + \underbrace{\mu(a, b)}_{-1} + \underbrace{\mu(a, c)}_{-1} + \underbrace{\mu(a, d)}_{-1} + \mu(a, e) = 0$$

Przerzucając wynik na drugą stronę uzyskujemy

$$\mu(a, e) = 2$$

Analogicznie rozpisujemy pozostałe przypadki.

$$\mu(a, f) = -(\underbrace{\mu(a, a)}_{1} + \underbrace{\mu(a, c)}_{-1} + \underbrace{\mu(a, d)}_{-1}) = -(-1) = 1$$

$$\mu(b, g) = -(\underbrace{\mu(b, b)}_{1} + \underbrace{\mu(b, e)}_{-1}) = 0$$

$$\mu(d,g) = -(\underbrace{\mu(d,d)}_{1} + \underbrace{\mu(d,e)}_{-1} + \underbrace{\mu(d,f)}_{-1}) = -(-1) = 1$$

$$\mu(c,g) = -(\underbrace{\mu(c,c)}_{1} + \underbrace{\mu(c,e)}_{-1} + \underbrace{\mu(c,f)}_{-1}) = -(-1) = 1$$

$$\mu(a,g) = -(\underbrace{\mu(a,a)}_{1} + \underbrace{\mu(a,b)}_{-1} + \underbrace{\mu(a,c)}_{-1} + \underbrace{\mu(a,d)}_{-1} + \underbrace{\mu(a,e)}_{2} + \underbrace{\mu(a,f)}_{1}) = -1$$

Pozostaje nam tylko uzupełnić macierz wyliczonymi wartościami.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zad.4

Treść.
Niech $(X, \leqslant)$ będzie zbiorem częściowo uporządkowanym, lokalnie skończonym. Wyznaczyć splot $\eta * \kappa$ i opisać słowami uzyskany wynik.

Rozwiązanie.
Na początku zapiszemy postacie funkcji η i κ

$$\eta(x,y) = \begin{cases} 1, & gdy\ x \leqslant y \wedge x \neq y \\ 0, & w\ przeciwnym\ przypadku \end{cases} \qquad \kappa(x,y) = \begin{cases} 1, & gdy\ x <\cdot\ y \\ 0, & w\ przeciwnym\ przypadku \end{cases}$$

Przypomnijmy definicję splotu dwóch funkcji.

$$(f * g)(x,y) = \sum_{x \leqslant z \leqslant y} f(x,z) \cdot g(z,y)$$

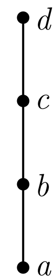
W naszym przypadku mamy zatem

$$(\eta * \kappa)(x,y) = \sum_{x \leqslant z \leqslant y} \eta(x,z) \cdot \kappa(z,y)$$

Skupmy się na funkcji κ. Jej wartość jest równa 1 tylko, gdy z jest bezpośrednim poprzednikiem y, w innych przypadkach zeruje ona iloczyn. Funkcja η z kolei jest równa 1 na elementach mniejszych od, ale nie równych z. Konkluzja jest taka, że wartość splotu tych dwóch funkcji daje nam ilość bezpośrednich poprzedników elementu y, ale wykluczając 2-elementowe łańcuchy.

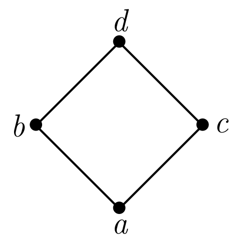
Przykłady obrazujące działanie splotu $(\eta * \kappa)$:

- *Łańcuch*



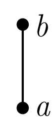
$$(\eta{*}\kappa)(a,d)=\sum_{a\leqslant z\leqslant d}\eta(a,z)\cdot\kappa(z,d)=\underbrace{\eta(a,a)}_{0}\cdot\underbrace{\kappa(a,d)}_{0}+\underbrace{\eta(a,b)}_{1}\cdot\underbrace{\kappa(b,d)}_{0}+\underbrace{\eta(a,c)}_{1}\cdot\underbrace{\kappa(c,d)}_{1}+\underbrace{\eta(a,d)}_{1}\cdot\underbrace{\kappa(d,d)}_{0}=1$$

- *Kilka poprzedników*



$$(\eta{*}\kappa)(a,d)=\sum_{a\leqslant z\leqslant d}\eta(a,z)\cdot\kappa(z,d)=\underbrace{\eta(a,a)}_{0}\cdot\underbrace{\kappa(a,d)}_{0}+\underbrace{\eta(a,b)}_{1}\cdot\underbrace{\kappa(b,d)}_{1}+\underbrace{\eta(a,c)}_{1}\cdot\underbrace{\kappa(c,d)}_{1}+\underbrace{\eta(a,d)}_{1}\cdot\underbrace{\kappa(d,d)}_{0}=2$$

- *Łańcuch 2-elementowy*



$$(\eta*\kappa)(a,b)=\sum_{a\leqslant z\leqslant b}\eta(a,z)\cdot\kappa(z,b)=\underbrace{\eta(a,a)}_{0}\cdot\underbrace{\kappa(a,b)}_{1}+\underbrace{\eta(a,b)}_{1}\cdot\underbrace{\kappa(b,b)}_{0}=0$$

Zad.5

Treść.
Niech P będzie zbiorem częściowo uporządkowanym, lokalnie skończonym. Określamy zbiór

$$Int(P)=\{[a,b]\colon a,b\in P, a\leqslant b\}\cup\{\emptyset\}$$

Wykazać, że $(Int(P),\subseteq)$ jest zbiorem częściowo uporządkowanym oraz że jest zbiorem lokalnie skończonym.

Rozwiązanie.
Powiem szczerze, że to zadanie jest bardzo "mętne" i że poprawność tego rozwiązania nie jest potwierdzona. Kierowałem się głównie intuicją. Na początek musimy sprawdzić czy zbiór $(Int(P),\subseteq)$ jest częściowo uporządkowany. Musimy zatem sprawdzić czy relacja $\subseteq$ na tym zbiorze jest ***zwrotna, antysymetryczna*** *i* ***przechodnia****.*

- ***Zwrotność***
  Musimy pokazać
  $$\forall_{x \in Int(P)} \; x \subseteq x$$
  Zastanówmy się jakiej postaci są elementy z $Int(P)$. *Są to albo przedziały postaci* $[a,b]$ *albo zbiór pusty* $\emptyset$. *Zatem rozważamy dwa przypadki*
  - $x = [a,b]$
    Wtedy $[a,b] \subseteq [a,b] \quad \surd$
  - $x = \emptyset$
    Wtedy $\emptyset \subseteq \emptyset \quad \surd$

  Zatem relacja jest zwrotna.

- ***Antysymetria***
  Musimy pokazać
  $$\forall_{x,y \in Int(P)} \; x \subseteq y \land y \subseteq x \Rightarrow x = y$$
  Tutaj też należy rozważyć dokładnie $2^2 = 4$ *przypadki wyboru elementów* x *i* y.
  - $x = [a,b] \quad y = [c,d]$
    Wtedy $[a,b] \subseteq [c,d] \land [c,d] \subseteq [a,b] \Rightarrow [a,b] = [c,d] \quad \surd$
  - $x = [a,b] \quad y = \emptyset$ *i* $x = \emptyset \quad y = [a,b]$ *- przypadki niemożliwe (pustospełnione (?))*
    Rozpisując $\underbrace{[a,b] \subseteq \emptyset}_{niemożliwe} \land \emptyset \subseteq [a,b] \Rightarrow \underbrace{[a,b] = \emptyset}_{niemożliwe}$ *oraz w drugim przypadku symetycznie.*

    Te przypadki rozpoczynają całą serię sytuacji, gdy mamy w warunku zawieranie sie przedziału w zbiorze pustym co jest sytuacją niemożliwą, bo przedział postaci $[a,b]$ *zawsze ma w sobie chociaz jeden element, a zbiór pusty nie ma żadnego. Zatem taki przypadek jest niemożliwy do osiągnięcia.*
  - $x = \emptyset \quad y = \emptyset$
    Wtedy $\emptyset \subseteq \emptyset \land \emptyset \subseteq \emptyset \Rightarrow \emptyset = \emptyset \quad \surd$

  Zatem widzimy, że relacja jest antysymetryczna.

- ***Przechodniość***
  Musimy pokazać
  $$\forall_{x,y,z \in Int(P)} \; x \subseteq y \land y \subseteq z \Longrightarrow x \subseteq z$$
  Najgorszy przypadek, musimy rozważyć $2^3 = 8$ *możliwości wyboru* $x, y, z \in Int(P)$
  - $x = [a,b] \quad y = [c,d] \quad z = [e,f]$
    Wtedy $[a,b] \subseteq [c,d] \land [c,d] \subseteq [e,f] \Longrightarrow [a,b] \subseteq [e,f] \quad \surd$
  - $x = [a,b] \quad y = [c,d] \quad z = \emptyset$ *- przypadek niemożliwy*
    Wtedy $[a,b] \subseteq [c,d] \land \underbrace{[c,d] \subseteq \emptyset}_{niemozliwe} \Rightarrow \underbrace{[a,b] \subseteq \emptyset}_{niemożliwe}$
  - $x = [a,b] \quad y = \emptyset \quad z = [c,d]$ *- przypadek niemożliwy, patrz powyżej*

– $x = [a, b] \quad y = \emptyset \quad z = \emptyset$ - *przypadek niemożliwy, patrz powyżej*

– $x = \emptyset \quad y = [a, b] \quad z = [c, d]$
Wtedy $\emptyset \subseteq [a, b] \wedge [a, b] \subseteq [c, d] \Rightarrow \emptyset \subseteq [c, d] \qquad \surd$

– $x = \emptyset \quad y = \emptyset \quad z = [a, b]$
Wtedy $\emptyset \subseteq \emptyset \wedge \emptyset \subseteq [a, b] \Rightarrow \emptyset \subseteq [a, b] \quad \surd$

– $x = \emptyset \quad y = \emptyset \quad z = \emptyset$
Wtedy $\emptyset \subseteq \emptyset \wedge \emptyset \subseteq \emptyset \Rightarrow \emptyset \subseteq \emptyset \quad \surd$

– $x = \emptyset \quad y = [a, b] \quad z = \emptyset$ - *przypadek niemożliwy, patrz przypadki wyżej*

Relacja jest zwrotna, antysymetryczna i przechodnia, a zatem jest zbiór $(Int(P), \subseteq)$ *jest zbiorem częściowo uporządkowanym.*

Pozostaje zagadnienie lokalnej skończoności. Rozpiszmy na początek postać przedziału z $Int(P)$ *o dwóch końcach będących przedziałami.*

$$\Big[[a, b], [y, z]\Big] = \{[c, d] \colon [a, b] \subseteq [c, d] \wedge [c, d] \subseteq [y, z]\}$$

Zauważmy, że na mocy założenia o zbiorze P *przedziały* $[a, b], [y, z]$ *są skończone. Czyli zawierają one skończoną ilość elementów, które moga być początkami/końcami przedziałów* $[c, d]$*. Stąd wiemy że długość przedziału w* $Int(P)$ *też jest skończona. Poniżej prezentujemy przykład obrazujący te zależności.*

Przykład:
Niech $P = \mathbb{Z}$*, ustalmy w nich dwa przedziały* $[1, 3] = \{1, 2, 3\}$ *oraz* $[0, 4] = \{0, 1, 2, 3, 4\}$*. Są to dobrzy kandydaci na granicę przedziału w* $Int(P)$*. Rozpiszmy przedział o takich końcach.*

$$\Big[[1, 3], [0, 4]\Big] = \{[c, d] \colon [1, 3] \subseteq [c, d] \wedge [c, d] \subseteq [0, 4]\} = \{[1, 3], [1, 4], [0, 3], [0, 4]\}$$

Zatem

$$\Big|\Big[[1, 3], [0, 4]\Big]\Big| < \infty$$

W przypadku gdy lewą granicę przedziału stanowi $\emptyset$*, a prawą przedział* $[y, z]$ *to sytuacja wygląda następująco.*

$$\Big[\emptyset, [y, z]\Big] = \{[c, d] \colon \emptyset \subseteq [c, d] \wedge [c, d] \subseteq [y, z]\}$$

Pierwszy warunek w koniunkcji jest zawsze spełniany, a z drugim sytuacja ma się identycznie jak w przypadku dwóch przedziałów omawianej powyżej. Istotne jest założenie lokalnej skończoności zbioru P*, a co za tym idzie* $|[y, z]| < \infty$*, stąd*

$$\Big|\Big[\emptyset, [y, z]\Big]\Big| < \infty$$

Sytuacja ostatnia czyli przedział postaci $\Big[[a, b], \emptyset\Big]$ *jest niemożliwa (zbiór pusty nie może zawierać w sobie żadnego przedziału). Zatem zbiór* $(Int(P), \subseteq)$ *jest lokalnie skończony.*

Dodatek dla Paulinii (i nie tylko)

Przegląd najważniejszych funkcji z algebry incydencji:

- $\boxed{\mu(x, x) = 1 \qquad \sum_{z \in [x, y)} \mu(z, y) = -1 \text{ lub } \sum_{z \in (x, y]} \mu(x, z) = -1}$

- $\boxed{\delta(x,y) = \begin{cases} 1, & x = y \\ 0, & x \neq y \end{cases}}$

- $\boxed{\zeta(x,y) = \begin{cases} 1, & x \leqslant y \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}}$

- $\boxed{\lambda(x,y) = \begin{cases} 1, & x = y \text{ lub } x <\!\cdot\, y \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}}$

- $\boxed{\kappa(x,y) = \begin{cases} 1, & x <\!\cdot\, y \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}}$

- $\boxed{\eta(x,y) = \begin{cases} 1, & x < y \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}}$

Przejdźmy do kilku istotnych splotów funkcji wyżej wymienionych. W zadaniu 4 rozważaliśmy splot $(\eta * \kappa)$. Teraz rozważymy dodatkowo 3 inne i opiszemy co oznaczają.

1. $(\zeta * \zeta)(x,y)$

$$(\zeta * \zeta)(x,y) = \sum_{x \leqslant z \leqslant y} = \zeta(x,z) \cdot \zeta(z,y)$$

Składnik $\zeta(x,z)$ daje jedynkę, gdy $x \leqslant z$, z kolei składnik $\zeta(z,y)$ daje jedynkę, gdy $z \leqslant y$, zatem iloczyn tych dwóch składników jest jedynką dla $x \leqslant z \leqslant y$ co oznacza, że wartość splotu oznacza długośc przedziału $[x,y]$

$$(\zeta * \zeta)(x,y) = |[x,y]|$$

2. $(\kappa * \zeta)(x,y)$

$$(\kappa * \zeta)(x,y) = \sum_{x \leqslant z \leqslant y} = \kappa(x,z) \cdot \zeta(z,y)$$

Składnik $\kappa(x,z)$ jest jedynką tylko, gdy z jest bezpośrednim następnikiem x, składnik $\zeta(z,y)$ jest mniej istotny, gdyż on jest zawsze jedynką. Zatem iloczyn jest jedynką, gdy z jest bezpośrednim następnikiem x czyli splotu oznacza ilość bezpośrednich następników elementu x.

3. $(\zeta * \kappa)(x,y)$

$$(\zeta * \kappa)(x,y) = \sum_{x \leqslant z \leqslant y} = \zeta(x,z) \cdot \kappa(z,y)$$

Składnik $\zeta(x,z)$ jest zawsze jedynką, zatem o tym kiedy iloczyn będzie jedynką decyduje składnik $\kappa(z,y)$, który jest jedynką, gdy z jest bezpośrednim poprzednikiem y, stąd wartość splotu wyraża ilość bezpośrednich poprzedników elementu y.

Dodatek II

Ranga w $(\mathbb{N}, \mid)$

Dopisałem kilka istotnych wg mnie rzeczy. W zadaniu 1 z kolokwium musieliśmy wyliczać rangę elementu, nie było to trudne, gdyż chodziło o element 50, którego rangę wyliczyliśmy na podstawie diagramu

Hassego. Co jeśli mieliśmy jakiś większy element np. 672? Wtedy diagram byłby ogromny, jednak istnieje wzór na wyliczanie rangi elementu w zbiorze $(\mathbb{N}, \mid)$. Aby go uzyskać musimy mieć rozkład liczby, której rangę liczymy

$$x = p_1^{k_1} \cdot ... \cdot p_n^{k_n}$$

Wtedy

$$r(x) = k_1 + \cdots + k_n$$

W zadaniu pierwszym $r(50) = 3$. Czy nasz wzór potwierdza tę wartość?

$$50 = 2^1 \cdot 5^2$$

A zatem

$$r(50) = k_1 + k_2 = 1 + 2 = 3$$

Teraz z łatwością wyliczymy rangę elementu 672

$$672 = 2^5 \cdot 3^1 \cdot 7^1$$

Zatem

$$r(672) = k_1 + k_2 + k_3 = 5 + 1 + 1 = 7$$

Infimum i supremum w $(\mathbb{N}, \mid)$

Kolejną istotną rzeczą związaną ze zbiorem $(\mathbb{N}, \mid)$ jest postać infimum i supremum w tym zbiorze. Niech $x = p_1^{x_1} \cdot \dots \cdot p_n^{x_n}$ i $y = p_1^{y_1} \cdot \dots \cdot p_n^{y_n}$

$$x \wedge y = NWD(x, y) = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\min\{x_i, y_i\}}$$

$$x \vee y = NWW(x, y) = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\max\{x_i, y_i\}}$$

Postać tych działań może posłużyć między innymi do pokazania, że zbiór $(\mathbb{N}, \mid)$ jest kratą dystrybutywną.

Krata dystrybutywna - warunki równoważne

A propos krat dystrybutywnych interesujące jest zadanie, w którym pokazać należy równoważność pomiędzy dwoma warunkami koniecznymi na bycie kratą dystrybutywną.

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \iff x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

Udowodnimy te równoważność w jedną ze stron.
$(\Rightarrow)$
Załóżmy, że

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

Zacznijmy rozpisywanie od prawej strony równości, która mamy wykazać.

$$\begin{aligned}(x \wedge y) \vee (x \wedge z) &= (x \wedge y) \vee x) \wedge ((x \wedge y) \vee z) = \\ &= x \wedge (z \vee (x \wedge y)) = \\ &= x \wedge ((z \vee x) \wedge (z \vee y)) = \\ &= (x \wedge (z \vee x)) \wedge (z \vee y) = x \wedge (y \vee z)\end{aligned}$$

Dowód w drugą stronę jest analogiczny. Do wyjaśnienia pozostaje jednak czemu $(x \wedge y) \vee x = x$ oraz $x \wedge (z \vee x) = x$. Pokażemy rozumowanie dla pierwszej równości. Załóżmy, że $x > y$. Wtedy $x \wedge y = y$ a wtedy $y \vee x = x$, z kolei jeśli $x < y$ to $x \wedge y = x$ i $x \vee x = x$. Czyli za każdym razem wychodzi x. (Pamiętam, że były jeszcze jakies rozważania dla nieporównywalnych na zajęciach, lecz uważam, że są one mniej istotne).

Współczynniki Gaussa

Współczynnikiem Gaussa nazywamy ilość k-wymiarowych podprzestrzeni liniowych zawartych w przestrzeni $\mathbb{F}_q^n$ i oznaczamy $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$. Wartość ta wyliczamy na podstawie następującego wzoru.

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{(q^n - 1)(q^{n-1} - 1) \cdot \ldots \cdot (q^{n-k+1} - 1)}{(q^k - 1)(q^{k-1} - 1) \cdot \ldots \cdot (q - 1)}$$

Przykładowym zadaniem z tym związanym może być przykładowo udowodnienie poniższej równości:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix}_q$$

Rozpiszmy prawa stronę równości ze wzoru.

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix}_q &= \frac{(q^n - 1)(q^{n-1} - 1) \cdot \ldots \cdot (q^{n-(n-k)+1} - 1)}{(q^{n-k} - 1)(q^{n-k-1} - 1) \cdot \ldots \cdot (q - 1)} = \\ &= \frac{(q^n - 1)(q^{n-1} - 1) \cdot \ldots \cdot (q^{k+1} - 1)}{(q^{n-k} - 1)(q^{n-k-1} - 1) \cdot \ldots \cdot (q - 1)} = \\ &= \frac{(q^n - 1)(q^{n-1} - 1) \cdot \ldots \cdot (q^{n-k+1} - 1) \cdot (q^{n-k} - 1) \cdot \ldots \cdot (q^{k+1} - 1)}{(q^{n-k} - 1) \cdot \ldots \cdot (q^{k+1} - 1) \cdot (q^k - 1) \cdot \ldots \cdot (q - 1)} = \\ &= \frac{(q^n - 1)(q^{n-1} - 1) \cdot \ldots \cdot (q^{n-k+1} - 1)}{(q^k - 1)(q^{k-1} - 1) \cdot \ldots \cdot (q - 1)} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q\end{aligned}$$