Materiały do kolokwium nr II

Na samym początku pragnę zaznaczyć, że poniższe materiały sa jedynie pomocnicze i nie zawierają pełnych i sprawdzonych rozwiązań zadań. Są to jedynie szkice i pewne intuicje związane z zadaniami z zestawów IV, V, VI oraz wyjaśnienia pewnych kwestii z wykładów. W ramkach zawarte będa niezbędne wiadomości z teorii do rozwiązania każdego z zadań. Proszę NIE rozpowszechniać tych materiałów bez mojej zgody dalej, gdyż po nieprzyjemnej sytuacji przed I kolokwium zdecydowałem nie udostępniać przygotowanych przeze mnie notatek publicznie. Dzięki :)

Uwaga: na pewno nie będzie zadań typu 7/z4 i 7/z5

Przykładowe zadania

Wzory Inwersyjne

Mamy napisać wzory inwersyjne dla łańcucha, $(P(X), \subseteq)$ i $(\mathbb{N}, \mid)$. Na początku przypomnijmy sobie wzory inwersyjne

$$\boxed{\begin{array}{c} F_{\leqslant}(x) = \sum\limits_{y:\, y \leqslant x} F_{=}(y) \\ F_{=}(x) = \sum\limits_{y:\, y \leqslant x} F_{\leqslant}(y)\mu(y,x) \end{array}}$$

- **Łańcuch**
  Oznaczmy łańcuch jako $X = \{1, \ldots, n\}$. Jedyne czego potrzebujemy do wyznaczenia wzoru inwersyjnego jest postać funkcji Möbiusa dla łańcucha

$$\boxed{\mu_L(y,x) = \begin{cases} 1, & y = x \\ -1, & y \lessdot x \\ 0, & \text{w przeciwynym przypadku} \end{cases}}$$

  Ustalmy $x \in X$, wtedy

$$F_{=}(x) = \sum_{y:\, y \leqslant x} F_{\leqslant}(y)\mu(y,x) = 1 \cdot F_{\leqslant}(x) + (-1) \cdot F_{\leqslant}(x-1) = F_{\leqslant}(x) - F_{\leqslant}(x-1)$$

  Suma znika, ponieważ funkcja μ zeruje wszystkie wartości poza tymi na bezpośrednim poprzedniku argumentu i argumentu równego y

- $(P(X), \subseteq)$
  W tym przypadku sytuacja ma się podobnie, wystarczy nam znajomość funkcji Möbiusa dla ro-

dziny podzbiorów zbioru X.

$$\boxed{\mu_{(P(X),\subseteq)}(B,A) = \begin{cases} (-1)^{|A|-|B|}, & B \subseteq A \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}}$$

Ustalmy $A \in P(X)$, wtedy

$$F_{=}(A) = \sum_{B\colon B\subseteq A} F_{\leqslant}(B)\mu(B,A) = \sum_{B\colon B\subseteq A} F_{\leqslant}(B)\cdot(-1)^{|A|-|B|}$$

Tutaj w sumie wszystkie zbiory spełniają warunek dla wartości $(-1)^{|A|-|B|}$ funkcji Möbiusa zatem suma pozostaje.

- $(\mathbb{N}, \mid)$
  Analogicznie jak powyżej, funkcja Möbiusa dla tego zbioru:

$$\boxed{\mu_{(\mathbb{N},|)}(m,n) = \begin{cases} (-1)^k, & m|n \text{ i } \frac{n}{m} \text{ jest iloczynem (bezkwadrat.) } k \text{ liczb pierwszych } (\frac{n}{m} = p_1\cdot \ldots \cdot p_k) \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}}$$

Ustalmy $n \in \mathbb{N}$, wtedy wzór inwersyjny wygląda następująco

$$F_{=}(n) = \sum_{m\colon m|n} F_{\leqslant}(m)\mu(m,n) = \sum_{m\colon m|n} F_{\leqslant}(m)\cdot(-1)^k$$

oczywiście, gdy $m|n$ i $\frac{n}{m}$ jest iloczynem (bezkwadratowym) k liczb pierwszych.

Wyliczanie ilości podzbiorów #1

Musimy udowodnić, że liczba k-elementowych podzbiorów zbioru n-elementowego, gdzie podzbiory te nie zawierają elementów leżących obok siebie jest równa $\binom{n-k+1}{k}$ i oznaczamy ją $f(n,k)$.
Przykładowo dla zbioru $\{1,2,3,4,5\}$ dobrze wybranym podzbiorem będzie $\{1,3,5\}$, a złym $\{1,2,3,5\}$, bo 1 i 2 leżą obok siebie. Zatem zachodzić musi zależność:

$$a_i + 1 < a_{i+1}$$

która eliminuje występowanie elementów obok siebie. Przekształcając ją mamy

$$a_i < a_{i+1} - 1 \quad (*)$$

Podzbiór k-elementowy, oznaczmy go przez A możemy przedstawić jako ciąg punktów $a_1,\ldots,a_k$

$$A \longmapsto (a_1,\ldots,a_k)$$

Korzystając ze wskazówki, która mówi, że *"Ciąg $(a_1,\ldots,a_k)$ jest ciągiem spełniającym warunek $a_i+1 < a_{i+1}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(a_1,\ldots,a_k-k+1)$ jest ciągiem rosnącym ze zbioru $\{1,\ldots,n-k+1\}$"* i z $(*)$ konstruujemy ciąg rosnący postaci

$$a_1 < a_2 - 1 < a_3 - 1 - 1 < \cdots < a_k - k + 1$$

Zatem podzbiory k-elementowe przedstawione jako takie ciągi możemy wybrać ze zbioru $(n-k+1)$-elementowego co kończy nasze rozważania i stąd

$$f(n,k) = \binom{n-k+1}{k}$$

Wyliczanie ilości podzbiorów #2

Musimy sprawdzić, że liczba podzbiorów k-elementowych zbioru n-elementowego niezawierających dwóch elementów obok siebie oraz nie zawierających podzbioru $\{1, n\}$ jest równa $\frac{n}{n-k}\binom{n-k}{n}$ i oznaczamy ją $g(n, k)$. Na początek krótkie przypomnienie z poprzedniego zadania a propos liczby k-elementowych podzbiorów zbioru n-elementowego nie zawierających dwóch sąsiednich elementów

$$\boxed{f(n, k) = \binom{n-k+1}{k}}$$

Nasze rozważania podzielimy na sytuacje, w której interesujące nas podzbiory zawierają i nie zawierają elementu n.

1. Pierwszym krokiem będzie wyznaczenie takich k-elementowych podzbiorów z treści zadania, które zawierają element n, zatem poszukujemy podzbiorów nie zawierających sąsiednich liczb czyli

$$f(n, k) = \binom{n-k+1}{k}$$

   które dodatkowo mają zawierać element n, ale nie zawierać podzbioru $\{1, n\}$. Na początek zauważmy, że mamy mieć element n w każdym z podzbiorów, zatem powinniśmy wybierać o jeden element mniej ze zbioru o jeden mniejszego czyli

$$\binom{n-k}{k-1}$$

   następnie chcemy, aby nasze podzbiory nie zawierały elementu 1, zatem musimy wybierać ze zbioru pomniejszonego o ten element.

$$\binom{n-k-1}{k-1}$$

2. W tym momencie mamy wybrane k-elementowe podzbiory niezawierające sąsiednich wyrazów, zawierające n i niezawierające 1, w drugim kroku znajdziemy takie, które nie zawierają n i jednocześnie mogą zawierać 1, zatem rozpoczniemy od naszej podstawy czyli k-elementowych podzbiorów bez sasiednich wyrazów

$$\binom{n-k+1}{k}$$

   Chcemy dalej wybierać zbiory k-elementowe, ale nie chcemy wybrać n, zatem musimy pomniejszyć o nie zbiór z którego wybieramy uzyskując

$$\binom{n-k}{k}$$

W tym momencie wartości uzyskane w obu krokach należy dodać i w ten sposób uzyskujemy

$$\binom{n-k-1}{k-1} + \binom{n-k}{k} = \frac{(n-k-1)!}{(k-1)!(n-2k)!} + \frac{(n-k)!}{k!(n-2k)!} = \frac{(n-k)!}{k!(n-2k)!}\left(\frac{k}{n-k} + 1\right) = \binom{n-k}{k}\frac{n}{n-k} = g(n, k)$$

Pokrycie minimalną ilością łańcuchów zbioru $P(X)$ #1

Niech $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Poszukujemy najmniejszej ilości łancuchów, które pokryją wszystkie podzbioru zbioru X. W tym celu wyliczmy ile podzbiorów k-elementowych ma zbiór X dla $k \in \{1, \dots, 4\}$

$$\binom{5}{1} = 5 \quad \binom{5}{2} = 10 \quad \binom{5}{3} = 10 \quad \binom{5}{4} = 5$$

Rozpocznijmy budowę łancuchów od najdłuższego (ze zbiorem pustym i całym zbiorem).

$$L_1 = \emptyset \subseteq \{1\} \subseteq \{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

Następnie zbudujemy łańcuchy 4-elementowe nie wykorzystując przy tym użytych już podzbiorów.

$$L_2 = \{2\} \subseteq \{2, 3\} \subseteq \{2, 3, 4\} \subseteq \{2, 3, 4, 5\}$$

$$L_3 = \{3\} \subseteq \{3, 4\} \subseteq \{3, 4, 5\} \subseteq \{1, 3, 4, 5\}$$
$$L_4 = \{4\} \subseteq \{4, 5\} \subseteq \{1, 4, 5\} \subseteq \{1, 2, 4, 5\}$$
$$L_5 = \{5\} \subseteq \{1, 5\} \subseteq \{1, 2, 5\} \subseteq \{1, 2, 3, 5\}$$

Wykorzystaliśmy zatem podzbiory wszystkie 1 i 4-elementowe, kolejne łańcuchy będą zatem 2-elementowe (oczywiście budujemy z pozostałych nam podzbiorów).

$$L_6 = \{1, 3\} \subseteq \{1, 3, 4\}$$

$$L_7 = \{1, 4\} \subseteq \{1, 2, 4\}$$
$$L_8 = \{2, 4\} \subseteq \{2, 4, 5\}$$
$$L_9 = \{2, 5\} \subseteq \{2, 3, 5\}$$
$$L_{10} = \{3, 5\} \subseteq \{1, 3, 5\}$$

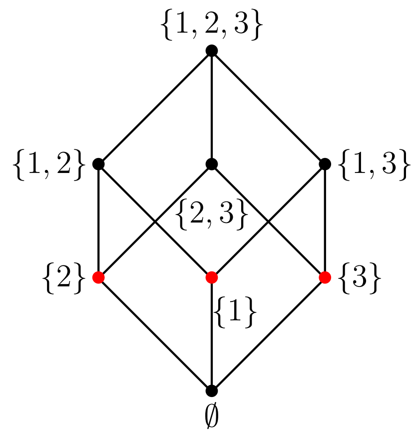
Zatem wskazaliśmy najmniejszą ilość (10) łańcuchów pokrywających $P(5)$. To zadanie rozwiązac również można stosując Twierdzenie Dilwortha. Jego użycie prezentuje poniższe, analogiczne zadanie

Pokrycie minimalną ilością łańcuchów zbioru $P(X)$ #2 (Tw.Dilwortha)

Wyliczymy minimalną ilość łańcuchów $P(X)$ dla $X = \{1, 2, 3\}$
Na początek przypomnimy **twierdzenie Dilwortha**

> W dowolnym skończonym zbiorze częściowo uporządkowanym maksymalna liczność antyłańcucha jest równa minimalnej liczbie łańcuchów, które pokrywaja zbiór P.

W celu łatwiejszego wyliczenia maksymalnej długości antyłańcucha zbudujemy diagram Hassego do zobrazowania relacji między podzbiorami.



Na czerwono zaznaczyliśmy jeden z możliwych antyłańcuchów maksymalnych $AL = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$, jego długość wynosi 3. Jeśli liczylibyśmy metodą z poprzedniego zadania to również otrzymamy 3 łańcuchy pokrywające $P(3)$

$$L_1 = \{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}$$

$$L_2 = \{\{2\}, \{2,3\}\}$$

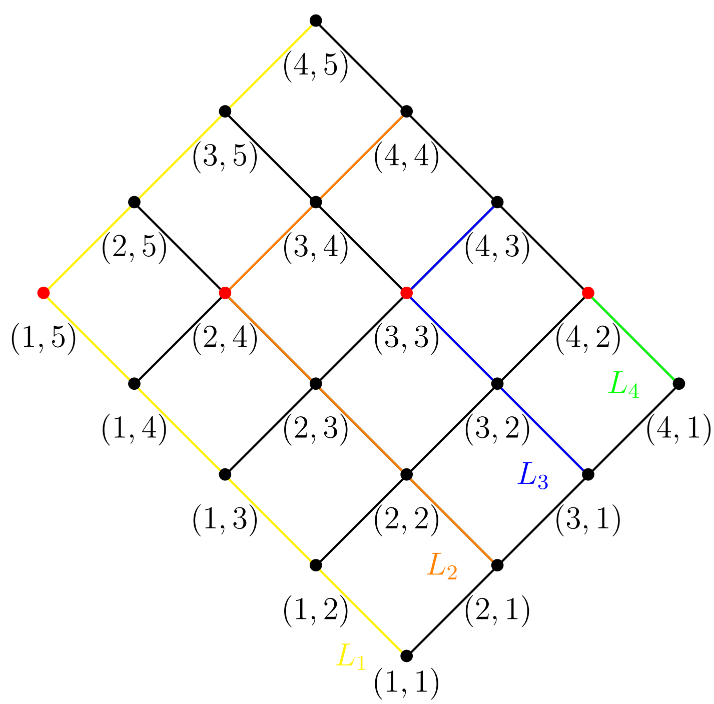
$$L_3 = \{\{3\}, \{1,3\}\}$$

Pokrycie minimalną ilością łańcuchów zbioru $I_4 \times I_5$

Niech $I_4 = \{1,2,3,4\},\ I_5 = \{1,2,3,4,5\}$, relacją w produkcie takiej postaci jest

$$\boxed{(a,b) \leqslant (c,d) \Leftrightarrow a \leqslant c \wedge b \leqslant d}$$

Zadanie to rozwiążemy w formie rysunkowej (za pomocą diagramu Hassego). Widzimy z postaci diagramu, że maksymalna długość antyłańcucha wynosi 4 (oznaczono go czerwonymi kropkami). Z twierdzenia Dilworthа wnioskujemy, że mamy 4 łańcuchy pokrywające zbiór $I_4 \times I_5$, są one zaznaczone na rysunku.



Systemy reprezentantów

Mamy dany zbiór $\{1,2,3,4,5\}$. W celu sprawdzania czy można wybrac system reprezentantów przypomnijmy nierówność Halla, jeśli jest ona spełniona to da się wybrac system reprezentantów, jeśli nie to nie jest to możliwe.

$$\boxed{\left|\bigcup_{i\in J} A_n\right| \geqslant |J|}$$

Mamy do sprawdzenia cztery poniższe ciągi, ponadto jeśli nie znajdziemy systemu reprezentantów to wybierzemy częściowy system reprezentantów (wyrzucimy przeszkadzające nam zbiory), na koniec podamy również ilość systemów w każdym przypadku

a) $(\underbrace{\{1\}}_{A_1},\underbrace{\{2,3\}}_{A_2},\underbrace{\{1,2\}}_{A_3},\underbrace{\{1,3\}}_{A_4},\underbrace{\{1,4,5\}}_{A_5})$
Nie jest spełniony warunek Halla, gdyż

$$\left|A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4\right| = 3 < 4 = |J|$$

Częściowym system reprezentantów jest $(1,2,3,4)$ lub $(1,2,3,5)$ wybrane z ciągu

$$(\{1\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,4,5\})$$

b) $(\{1,2\},\{2,3\},\{4,5\},\{4,5\})$
Tutaj możemy wybrać sześć systemów reprezentantów: $(1,2,4,5)$, $(1,2,5,4)$, $(2,3,4,5)$, $(2,3,5,4)$, $(1,3,4,5)$, $(1,3,5,4)$

c) $(\underbrace{\{1,3\}}_{A_1},\underbrace{\{2,3\}}_{A_2},\underbrace{\{1,2\}}_{A_3},\underbrace{\{3\}}_{A_4})$
Nie jest spełniony warunek Halla, gdyż

$$\left|\bigcup_{i=1}^{4} A_n\right| = 3 < 4 = |J|$$

Częściowym systemem reprezentantów jest np. ciąg $(2,1,3)$ wybrany z podzbiorów $(\{2,3\},\{1,2\},\{3\})$.

d) $(\{1,3,4\},\{1,4,5\},\{2,3,5\},\{2,4,5\})$ W tym przypadku mamy wiele możliwości wyboru systemu reprezentantów np. $(1,4,3,2)$ lub $(3,4,2,5)$. Dokładną liczbę systemów reprezentantów wyliczymy stosując następujące twierdzenie

Liczba systemów reprezentantów dla ciągu $(A_1,\ldots,A_n)$ jest równa $per(A^T)$ gdzie A jest macierzą incydencji ciągu $(A_1,\ldots,A_n)$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$per(A^T) = per\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = per\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + per\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + per\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= per\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + per\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + per\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + per\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + per\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + per\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= 4 + 3 + 4 + 3 + 4 + 1 = 19$$

Jak liczyć permanent małych macierzy? Przykładowo

$$per\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 4$$

lub

$$per\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = per(11) + per(11) = 2 + 2$$

gdyż

$$\sigma \colon \{1\} \to \{1, 2\}$$

i

$$\sigma(1) = 1 \qquad \sigma(2) = 1$$

Systemy reprezentantów - wzór indukcyjny

Niech $n \geqslant 3$. Pytamy ile systemów reprezentantów ma ciąg $(A_1, \ldots, A_n)$ podzbiorów zbioru X, gdzie $A_1 = \{1, 2\},\ A_i\ \{i-1, i, i+1\}, i = 2, \ldots, n-1,\ A_n = \{n-1, n\}$? Oznaczmy a_n jako liczbę systemów reprezentantów ciągu $(A_1, \ldots, A_n)$. Będziemy starali wyznaczyć liczbę a_{n+1} na podstawie mniejszych ciągów podzbiorów. Zatem wiemy, że

$$\underbrace{\{1,2\}, \{1,2,3\}, \{2,3,4\}, \ldots, \{n-1, n\}}_{a_n}$$

Nas interesuje wyznaczenie

$$\underbrace{\{1,2\}, \{1,2,3\}, \{2,3,4\}, \ldots, \{n-1, n, n+1\}, \{n, n+1\}}_{a_{n+1}}$$

Rozważymy dwie możliwości. Na początek do naszego systemu reprezentanów wybierzemy z pierwszego podzbioru 1, wtedy

$$1 \longrightarrow \underbrace{\{2,3\} \longrightarrow \{2,3,4\} \longrightarrow \ldots \longrightarrow \{n-1, n, n+1\} \longrightarrow \{n, n+1\}}_{a_n}$$

Teraz rozważymy drugą sytuację, że w naszym systemie reprezentantów z pierwszego podzbioru wybieramy element 2, mamy wtedy

$$2 \longrightarrow \{1,3\} \longrightarrow \underbrace{\{3,4\} \longrightarrow \{3,4,5\} \longrightarrow \ldots \{n-1, n, n+1\} \longrightarrow \{n, n+1\}}_{a_{n-1}}$$

Jednak tutaj możliwa jest tylko sytuacja

$$2 \longrightarrow 1 \longrightarrow \underbrace{\{3,4\} \longrightarrow \{3,4,5\} \longrightarrow \ldots \longrightarrow \{n-1, n, n+1\} \longrightarrow \{n, n+1\}}_{a_{n-1}}$$

gdyż dla drugiej sytuacji

$$2 \longrightarrow 3 \longrightarrow \underbrace{4}_{\text{z } \{3,4\}} \longrightarrow \underbrace{5}_{\text{z } \{3,4,5\}} \longrightarrow \ldots \longrightarrow \underbrace{n+1}_{\text{z } \{n-1,n,n+1\}} \longrightarrow \underbrace{?}_{\text{z } \{n,n+1\}}$$

brakuje nam elementu do wyboru z ostatniego podzbioru (czyli nie istnieje system reprezentantów). Sumując obie możliwości mamy

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$$

Jak widać jest to troszkę zmieniony ciąg Fibonacciego, gdyż

$$a_3 = f_4$$

U nas za początkowe elementy należy przyjąć wtedy

$$a_0 = 1 \quad a_1 = 1 \quad a_2 = 2$$

Łańcuchy w produkcie liczb zespolonych - zapowiadane zadanie!

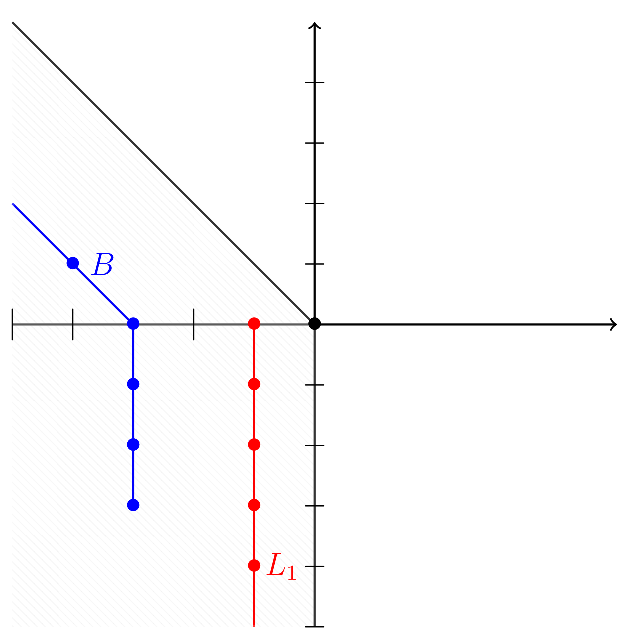
Przytoczmy treść zadania: Czy każdy łańcuch w zbiorze $A = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \colon x \leqslant 0 \wedge x + y \leqslant 0\}$ jest skończony? Czy długości łańcuchów w tym zbiorze są wspólnie ograniczone? Dla każdej liczby naturalnej n podaj przykład nieskończonego podzbioru zbioru B, w którym maksymalna długość łańcucha wynosi n. Na początku zauważmy jak wygląda relacja w zbiorze $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$$(a, b) \leqslant (c, d) \Leftrightarrow a \leqslant c \wedge b \leqslant d$$

Korzystając z niej odpowiemy na pytania:

- Czy wszystkie łańcuchy są skończone? Nie, gdyż istnieją łańcuchy nieskończone np. łańcuch L_1.
- Czy długości łańcuchów są wspólnie ograniczone? Nie, gdyż mamy łańcuchy nieskończone.
- Ustalmy $n \in \mathbb{N}$, aby pokazać o jakie zbioru chodzi, niech przykładowo $n = 3$, wtedy zbiorem nieskończonym jest zbiór $B = \{(x, y) \colon x \leqslant -3 \wedge x + y = -3\} \cup \{(x, y) \colon x = -3 \wedge -3 \leqslant y \leqslant 0\}$.

Aby lepiej przedstawić nasze rozważania potrzebne informacje zostały zobrazowane na rysunku.



Dodatek - Skrót najważniejszych rzeczy z wykładu

Omawianie twierdzeń i definicji rozpoczne od strony 13 (od faktów po funkcji Möbiusa, która była na zeszłym kolokwium).

- Jeśli mamy dwa odcinki izomorficzne ze sobą $[x, y] \cong [z, t]$, to mają one identyczne wartości funkcji Möbiusa $\mu(x, y) = \mu(z, t)$
- Dla izomorfizmu zbiorów częściowo uporządkowanych $\varphi\colon \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_2$ można określić izomorfizm algebr $\phi\colon \mathcal{A}(\mathbb{P}_1) \to \mathcal{A}(\mathbb{P}_2)$ wzorem $\underset{f\in\mathcal{A}(\mathbb{P}_1)}{\forall} \ \underset{x,y\in P_1}{\forall} \ \phi(f)(x, y) = f(\varphi(x), \varphi(y))$.
- Funkcję $f\colon P \to \mathbb{R}$ nazywamy **sumowalną** jeśli dla każdego $x \in P$ w sumie $G(x) = \sum_{y\colon y\leqslant x} f(y)$ występuje tylko skończona liczba składników róznych od zera (ponadto G też jest sumowalna).
- Wzór inwersyjny Möbiusa

$$F_{\leqslant}(x) = \sum_{y\colon y\leqslant x} F_{=}(y)$$
$$F_{=}(x) = \sum_{y\colon y\leqslant x} F_{\leqslant}(y)\mu(y, x)$$

- Dualna wersja wzoru inwersyjnego Möbiusa

$$F_{\geqslant}(x) = \sum_{y\colon y\geqslant x} F_{=}(y)$$
$$F_{=}(x) = \sum_{y\colon y\geqslant x} F_{\geqslant}(y)\mu(x, y)$$

- Jeżeli $\mathbb{P}^* = (P, \leqslant^*)$ jest porządkiem dualnym do zbioru lokalnie skończonego i częściowo uporządkowanego to $\underset{x,y\in P}{\forall} \ \mu_{P^*}(x, y) = \mu_P(x, y)$
- Jeśli $\mathbb{P}_1$ i $\mathbb{P}_2$ są skończonymi zbiorami częściowo uporządkowanymi, to dla $x, z \in P_1,\ y, t \in P_2$ mamy $\mu_{\mathbb{P}_1\times\mathbb{P}_2}(< x, y >, < z, t >)\ \mu_{\mathbb{P}_1}(x, z)\mu_{\mathbb{P}_2}(y, t)$ (można to uogólnić na dowolną liczbę zbiorów).
- Dla zbiorów lokalnie skończonych i częściowo uporządkowanych $\mathbb{P}_i$ można zdefiniować nastepujący zbiór $\bigoplus_{i\in I} = \{x \in \bigtimes_{i\in I} \mathbb{P}_i \colon Ix = \{i \in I \colon x_i \neq 0\}$ jest skończony $\}$
- Jeżeli $x \leqslant y$ i $y \neq 0$, to odcinek $[x, y]$ zbioru $\bigtimes_{i\in I} \mathbb{P}_i$ jest izomorficzny z odcinkiem $[\overline{x}, \overline{y}]$ zbioru $\bigtimes_{i\in Iy} \mathbb{P}_i$, gdzie $\overline{x} = x_i,\ \overline{y} = y_i$ dla $i \in Iy$
- Jeżeli $\mathbb{P} = \bigtimes_{i\in I} \mathbb{P}_i$ gdzie $\mathbb{P}_i$ są lokalnie skończonymi zbiorami częściowo uporządkowanymi, to dla dowolnych $x, y \in P$, takich że $x \leqslant y$ mamy $\mu_{\mathbb{P}}(x, y) = \prod_{i\in Iy} \mu_{\mathbb{P}_i}(x_i, y_i)$
- Funkcja Möbiusa zbioru $(\mathbb{N} \mid\ )$ jest równa

$$\mu_{(\mathbb{N},|)}(m, n) = \begin{cases} (-1)^k, & m|n \text{ i } \frac{n}{m} \text{ jest iloczynem (bezkwadrat.) } k \text{ liczb pierwszych } (\frac{n}{m} = p_1 \cdot \ldots \cdot p_k) \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

- Funkcja Möbiusa kraty Π_n jest dana wzorem

$$\mu(\pi,\delta)(-1)^{|\pi|-|\delta|}\prod_{j=1}^{|\delta|}(n_j-1)!$$

gdzie $\pi < \delta$ oraz $N - J$ oznacza liczbe bloków podziału π zawartych w j-tym bloku podziału δ

- Jeżeli S jest zbiorem skończonym, a $P_1,\ldots,P_n$ jest ciągiem podzbiorów S to funkcję $v\colon S \to \mathbb{R}$ nazywamy **funkcją wagi**, dla $Y \subseteq S$ przyjmujemy $v(T) = \sum_{a\in T} v(a)$

- Gdy $\{1,\ldots,n\}$ - zbiór indeksów podzbiorów $P_1,\ldots,P_n$, dla dowolnego $U \subseteq X$ mamy

$$F_{=}(Y) = v\left(\bigcap_{i\in Y} P_i \cap \bigcap_{j\in X\setminus Y}(S\setminus P_j)\right) = v\left(\bigcap_{i\in Y} P_i \cap S \setminus \bigcap_{j\in X\setminus Y} P_j\right)$$

$$F_{\geqslant}(Y) = v\left(\bigcap_{i\in Y} P_i\right) = \sum_{z\colon z\geqslant y} F(z)$$

- Jeśli $Z, T \subseteq S$ i $Z \cap T = \emptyset$, to $v(Z\cup T) = v(Z) + v(T)$.

- $F_{\geqslant}(Y) = \sum_{Z\colon Z\subseteq Y} F_{=}(Z)$

- $v\left(\bigcup_{j\in X} P_i\right) = \sum_{i=1}^{n} v(P_i) - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} v(P_i\cap P_j) + \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n} v(P_i\cap P_j\cap P_k) - \ldots$

- Waga zbiorów należących do dokładnie k spośród $P_1,\ldots,P_n$ zbiorów jest równa

$$V_k = \sum_{m=k}^{n}(-1)^k\binom{m}{k}\sum_{\substack{Z\colon Z\subseteq X\\ |Z|=m}} v\left(\bigcap_{i\in Z} P_i\right)$$

- Jednoargumentowa funkcja Möbiusa

$$\begin{cases} (-1)^k, & \text{gdy } m \text{ jest iloczynem } k \text{ różnych liczb pierwszych} \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

- Funkcja Eulera

$$\varphi(n) = |\{k\colon 1\leqslant k\leqslant n \wedge NWD(n,k)=1\}| = n\cdot\prod_{p|n}\left(1-\frac{1}{p}\right)$$

- **Twierdzenie Dilwortha**: W dowolnym skończonym zbiorze częściowo uporządkowanym maksymalna liczność antyłancucha jest równa minimalnej liczbie łańcuchów, które pokrywaja zbiór P.

- Dualna wersja twierdzenia Dilwortha: W dowolnym zbiorze częściowo uporządkowanym $(P,\leqslant)$ maksymalna liczność łańcucha jest równa minimalnej liczbie antyłańcuchów, które pokrywaja P.

- Każdy zbiór częściowo uporządkowany o co najmniej $rs+1$ elementach zawiera łańcuch o liczności $r+1$ lub antyłańcuch o liczności $s+1$.

- Każdy ciąg $n \geqslant rs + 1$ liczb rzeczywistych zawiera podciąg niemalejący o $r + 1$ elementach lub podciąg malejący o $s + 1$ elementach.
- Kazdy $r^2 + 1$ ciąg liczb rzeczywistych zawiera podciąg monotoniczny długości $r + 1$.
- **Warunek Halla**: Dla każdego zbioru $J \subset \{1, \ldots, n\}$ zachodzi $\left| \bigcup_{i \in J} A_i \right| \geqslant |J|$ (jeśli warunek ten jest spełniony to istnieje system reprezentantów).