Miary położenia

Miary położenia dzielimy na:

1. Klasyczne
   - Średnia arytmetyczna
   - Średnia harmoniczna
   - Średnia geometryczna
2. Pozycyjne
   - Modalna
   - Kwantyle

Średnia arytmetyczna

Średnią arytmetyczną definiuje się jako sumę wartości cechy mierzalnej podzieloną przez liczbę jednostek skończonej zbiorowości statystycznej

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Mozemy ją podzielić na **średnią nieważoną** (prostą) z powyższym wzorem dla szeregów szczegółowych, oraz na **średnią ważoną** dla szeregów rozdzielczych punktowych i szeregów rozdzielczych z przedziałami klasowymi o poniższych wzorach

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i \qquad \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} \dot{x}_i n_i$$

gdzie k oznacza liczbę klas, a $\dot{x}_i$ środek przedziału klasowego

Przykładem średniej ważonej jest średnia arytmetyczna dla podgrup:

$$\bar{\bar{x}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{r} \bar{x}_i n_i$$

gdzie $\bar{\bar{x}}$ - średnia arytmetyczna wszystkich podgrup, $\bar{x}_i$ - średnia arytmetyczna i-tej grupy, n_i - liczbność i-tej grupy, $N = \sum_{i=1}^{r}$ - suma liczbności wszystkich grup.

Własności średniej arytmetycznej:

- Suma wartości cechy jest równa iloczynowi średniej arytmetycznej i liczebności zbiorowości

$$n\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \qquad n\bar{x} = \sum_{i=1}^{k} x_i n_i$$

- Średnia arytmetyczna spełnia warunek:

$$x_{\min} < \bar{x} < x_{\max}$$

- Suma odchyleń poszczególnych wartości cechy od średniej równa się zero

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = 0 \qquad \sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x})n_i = 0$$

Średnia harmoniczna

Średnią harmoniczną stosuje się wtedy, gdy wartości cechy podane są w przeliczeniu na stała jednostkę innej zmiennej (czyli w postaci wskaźników natężenia) np. km/h, kg/osobę, min/sztuki.
Określa się ją wzorami:

$$\bar{x}_H = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}} \qquad \bar{x}_H = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i}{\sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{x_i}}$$

odpowiednio dla szregów szczegółowych i rozdzielczych.

Możemy użyć również trochę zmodyfikowane wzoru:

$$\bar{x}_H = \frac{W}{\sum_{i=1}^{k} \frac{w_i}{x_i}}$$

gdzie $w_i = x_i n_i$ oraz $W = \sum_{i=1}^{k} w_i$ (waga w_i jest to np. km w km/h, min w min/szt. itd.)

Średnia geometryczna

Średnia geometryczna znajduje zastosowanie przy badaniu średniego tempa zmian zjawisk.
Określamy ja wzorem:

$$\bar{x}_G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n} = \sqrt[n]{\Pi_{i=1}^{n} x_i}$$

Modalna

Modalna (dominanta, moda, wartość najczęstsza) - wartość cechy statystycznej, która w danym rozkładzie empirycznym występuje najczęściej (wartość, której odpowiada największa liczebność).
Określamy ją wzorem:

$$M_0 = x_{om} + \frac{n_m - n_{m-1}}{(n_m - n_{m-1}) + (n_m - n_{m+1})} h_m$$

gdzie:
m - numer przedziału (klasy), w którym jest modalna
x_{0m} - dolna granica przedziału, w którym jest modalna
n_m - liczebność przedziału modalnej tzn. klasy o numerze m
n_{m-1}, n_{m+1} - liczebność klas poprzedzającej i następującej po przedziale modalnej
h_m - długość przedziału klasowego

Kwantyle

Kwantyle definiuje się jako wartości cechy badanej zbiorowości przedstawionej w postaci szeregu statystycznego, które dzielą zbiorowość na określone części pod względem liczby jednostek (części te pozostają do siebie w określonych proporcjach)
Najczęściej stosujemy **kwartyle**, a gdy mamy do czynienia z bardzo licznymi zbiorowościami **decyle**.

- **Kwartyl pierwszy** Q_1 - dzieli zbiorowość na dwie części tak, że 25% ma wartości mniejsze bądź równe kwartylowi pierwszemu, a 75% równe bądź większe od tego kwartyla.
- **Kwartyl drugi (Mediana Me)** - dzieli zbiorowośc na dwie równe części, połowa jednostek ma wartości mniejsze bądź równe medianie, a połowa równe bądź większe od mediany.
- **Kwartyl trzeci** Q_3 - dzieli zbiorowość na dwie części tak, że 75% ma wartości mniejsze bądź równe kwartylowi trzeciemu, a 25% równe bądź większe od tego kwartyla.

Jeśli chodzi o decyle to np. decyl pierwszy oznacza, że 10% jednostek ma wartości mniejsze bądź równe od decyla, a 90% równe bądź większe od decyla.

Wzory:
Medianę dla szeregów szczegółowych obliczamy następująco:

$$Me = \begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}} & \text{gdy } n \text{ jest nieparzyste} \\ \frac{1}{2}(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}) & \text{gdy } n \text{ jest parzyste} \end{cases}$$

Z kolei dla szeregów rozdzielczych mamy wzór dla mediany:

$$Me = x_{0m} + \frac{N_{Me} - \sum_{i=1}^{m-1} n_i}{n_m} h_m$$

Oraz wzory na kwartyle pierwszy i trzeci:

$$Q_1 = x_{0m} + \frac{N_{Q_1} - \sum_{i=1}^{m-1} n_i}{n_m} h_m \qquad Q_3 = x_{0m} + \frac{N_{Q_3} - \sum_{i=1}^{m-1} n_i}{n_m} h_m$$

gdzie:
m - numer klasy (przedziału), w której znajduje się odpowiadający mu kwartyl badź mediana
x_{0m} - dolna granica tego przedziału
n_m - liczebność tego przedziału
$\sum_{i=1}^{m-1} n_i$ - liczebność skumulowana do przedziału poprzedzającego ten kwartyl
h_m - rozpiętość klasy, w której jest kwartyl
$N_{Me} = \frac{n}{2}$ (pozycja mediany - połowa liczebności próby), $N_{Q_1} = \frac{n}{4}, N_{Q_3} = \frac{3n}{4}$