Spis treści

Rozdział 1

Procesy Stochastyczne

1.1 Wykład 1 (03.03.15): Proces Wienera

Proces Stochastyczny

Niech $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ będzie przestrzenią probabilistyczną, (E, ε) przestrzenią mierzalną (np. $E = \mathbb{R}$ lub $E = \mathbb{R}^n$), a T dowolnym zbiorem (np. $T = \mathbb{R}, T = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}, T = \mathbb{N}$, oznaczać będziemy nim najczęściej czas).

Procesem Stochastycznym o wartościach w E nazywamy rodzinę zmiennych losowych $X = (X_t)_{t \in T}$ przyjmujących wartości w E
$t \in T \quad X_t : \Omega \to \mathbb{R}$ - zmienna losowa
$\omega \in \Omega \quad t \to X_t(\omega)$

Trajektorią procesu X nazywamy funkcję $t \to X_t(\omega)$

Proces stochastyczny będziemy oznaczać albo $X = (X_t)_{t \in T}$ albo $X : T \times \Omega \to \mathbb{R}$

Def.: Proces $(X_t)_{t \in T},\ T \subset \mathbb{R}$ ma **przyrosty niezależne** jeśli dla dowolnych $t_0 \leqslant t_1 \leqslant ... \leqslant t_n$ ze zbioru T zmienne losowe $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, ..., X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ są niezależne.

Def.: Mówimy, że proces $(X_t)_{t \in T}$ ma przyrosty stacjonarne, jeśli $X_t - X_s$ zależy tylko od $t - s$ czyli

$$\bigwedge_{t > s \geqslant 0} X_t - X_s \sim X_{t-s} - X_0$$

1.1.1 Proces Wienera

Procesem Wienera (ruchem Browna) nazywamy proces stochastyczny $W = (W_t)_{t \geqslant 0}$ taki, że:

1. $W_0 = 0$
2. W ma przyrosty niezależne
3. Dla $0 \leqslant s < t$ zmienna $W_t - W_s$ ma rozkład normalny $\mathcal{N}(0, t - s)$
4. Trajektorie są ciągłe z prawdopodobieństwem 1

Uwaga: ad.4 Istnieje zbiór $A : P(A) = 1 \wedge \omega \in A$.
$t \to W_t(\omega)$ jest funkcją ciągłą na $[0, \infty)$

Czasami zakłada się, że wszystkie trajektorie sa ciągłe oraz $W_0 = 0$

Def. Proces $X = (X_t)_{t \in T}$ nazywamy **gaussowskim** jeżeli wszystkie skończenie wymiarowe rozkłady X sa gaussowskie tzn. wektor $(X_{t_1} ... X_{t_n})$ ma rozkład gaussowski dla $t_1 ... t_n \in T$ (dla wszystkich t_i, t_j)

Przykłady: Następujące procesy sa procesami gaussowskimi:

- $X_t = f(t) g \quad f : T \to \mathbb{R} \quad$ dowolna $g \sim \mathcal{N}(0,1)$
- Proces Wienera $(W_t)_{t \geqslant 0}$ (zadanie do zrobienia)
- Most Browna $X_t = W_t - t W_1 \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

Przykłady: Procesy $(W_t^2)_{t \geqslant 0}$ oraz $(\exp(W_t))_{t \geqslant 0}$ nie są gaussowskie.

1.1.2 Charakterystyka Procesu Wienera

Tw.: Proces $(X_t)_{t\geqslant 0}$ jest procesem Wienera $\iff$ gdy jest procesem gaussowskim o ciągłych trajektoriach p.n. takim, że $EX_t = 0$ oraz $cov(X_t, X_s) = \min(t, s)$

Zadanie: Dla procesu Wienera $W_t : \Omega \to \mathbb{R}^n$ udowodnić, że zachodzi:
$E\Big||W_t - W_s|^4\Big| = n(n+2)|t-s|^2$
$E\Big||W_t - W_s|^2\Big| = n(t-s) \quad t \geqslant s$

Tw.: (Kołmogorowa o ciągłości trajektorii)
Załózmy, że proces $\{X_t\}_{t\geqslant 0}$ spełnia następujący warunek:
Dla każdego $T > 0$ istnieją dodatnie stałe α, β, D takie, że $E\Big||X_t - X_s|^\alpha\Big| \leqslant D|t-s|^{1+\beta} \quad s \geqslant 0 \quad t \leqslant T$
Wtedy istnieje ciągła wersja procesu $\{X_t\}$
$(X_t)_{t\geqslant 0}$
$(Y_t)_{t\geqslant 0}$ - ma ciągłe trajektorie
$\omega \in \Omega,\ t \to Y_t$ - ciągła
$(Y_t)_{t\geqslant 0}$ jest ciągła wersją $(X_t)_{t\geqslant 0}$
$P(\omega : Y_t(\omega) = X_t(\omega),\ t \in T) = 1$
Trajektorie są ciągłe, ale nigdzie nie są różniczkowalne (jak funkcja Weierstrassa)

Tw.: Proces $\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ jest procesem Wienera $\iff$ gdy:
1) $W_0 = 0$
2) Przyrosty są niezależne

$$\left.\begin{array}{l} 3')\ EX_1 = 0 \quad EX_1^2 = 1 \\ 3'')\ \text{Jeśli } t \leqslant s \text{ to } W_t - W_s \sim W_{t-s} \end{array}\right\} W_{t+n} - W_n \sim \mathcal{N}(0, t)$$

4) Trajektorie procesu są ciągłe

Tw.: Załóżmy, że (X_t) spełnia $1, 2, 4$ warunek w definicje procesu Wienera (W zastępujemy X)
$3a)$ X - ma przyrosty stacjonarne
$3b)$ $EX_1 = 0 \quad Var(X_1) = 1$ $(EX_1^2 = 1)$
$3c)$ $EX_t^4 < \infty \wedge t > 0$
Wówczas X_t jest procesem Wienera (warunek niekonieczny)

Tw.: Prawie wszystkie trajektorie procesu Wienera $(W_t)_{t\geqslant 0}$ są funkcjami nieróżniczkowalnymi w żadnym przedziale tzn.

$$P(\bigwedge_{t_0 > 0} t \to W_t(\omega) \text{ jest różniczkowalna w } t_0) = 0$$

Zadanie: Proces $U_t = W_t - tW_1\ t \in [0, 1], W_t$ - proces Wienera, nazywamy mostem Browna.
Wyznaczyć jego funkcje kowariancji $U(t, s) = min(t, s) = ts$

Zadanie: $cov(W_t, W_s) = min(t, s)$ (Trzeba korzystac z niezależnych przyrostów).

1.2 Wykład 2 (10.03.15): Warunkowa wartość oczekiwana i Martyngały

Warunkowa wartość oczekiwana*

a) Względem rozbicia przeliczalnego

Tw. Niech $\mathcal{P}(A) > 0,\ X : \Omega \to \mathbb{R}$ - zmienna losowa, $EX < \infty$
Wtedy $E(X|A) = \dfrac{1}{\mathcal{P}(A)} \displaystyle\int_A X d\mathcal{P}$

Przypomnienie: σ-ciała
$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\} - \sigma$-ciało trywialne
$\sigma(A) = \{\emptyset, \Omega, A, A'\} = \mathcal{F}$ - najmniejsze σ-ciało nietrywialne.

Przykład:
–uzupełnić—

$$E(X|\sigma(A)) = \begin{cases} E(X|A) & \omega \in A \\ E(X|A') & \omega \notin A \end{cases} \qquad (*)$$

Niech A_i - przeliczalne rozbicie Ω

$$\Omega = \bigcup_{i \in I} A_i \qquad A_i \cap A_j = \emptyset \qquad \mathcal{P}(A_i) > 0$$

Jeżeli X jest całkowalna oraz $\mathcal{F} = \sigma(A_i : i \in I)$ to
$E(X|\mathcal{F})(\omega) = \displaystyle\sum_{i \in I} E(X|A_i) \cdot \mathbb{1}$

b) Niech $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ - przestrzeń probabilistyczna.
Jeżeli $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ jest σ-ciałem zbioru Ω, a $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ jest całkowalną zmienną losową na przestrzeni probablistycznej to zmienną losową $\eta : \Omega \to \mathbb{R}$ spełniającą warunki

1. η jest funkcją $\mathcal{F}$-mierzalną
2. $\displaystyle\bigwedge_{A \in \mathcal{F}} \left(\int_A \xi d\mathcal{P} = \int_A \eta d\mathcal{P} \right)$

nazywamy **warunkową wartością oczekiwaną** zmiennej ξ pod warunkiem $\mathcal{F}$ i oznaczamy $E(\xi|\mathcal{F})$
Dzięki tej definicji łatwo możemy udowodnić $(*)$

Tw. Niech A_i - przeliczalne rozbicie Ω
Jeżeli X jest całkowalna to $EX = \displaystyle\sum_{i \in I} E(X|A_i)\mathcal{P}(A_i)$
Dowód znajduje się w Jakubowskim

Uwaga Jeżeli zmienna losowa ξ jest całkowalna to
$E(\xi|\{\emptyset, \Omega\}) = E\xi$ p.n. oraz $E(\xi|\mathcal{A}) = \xi$ p.n.
gdzie $\mathcal{A}$ - największe σ-ciało zadane na Ω.

Tw. Załóżmy, że ξ jest całkowalną zmienną losową na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$, a $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ jest σ-ciałem pozbioru zbioru Ω. Wówczas:

1. $E(E(\xi|\mathcal{F})) = E\xi$
2. $|E(\xi|\mathcal{F})| \leqslant E(|\xi|\big|\mathcal{F})$ p.n - przypadek nierówności Jensena

Tw.

i. Jeżeli zmienna losowa ξ jest $\mathcal{F}$ -mierzalna to $E(\xi|\mathcal{F}) = \xi$ p.n.

ii. Jeżeli $\xi \geqslant 0$ to $E(\xi|\mathcal{F}) \geqslant 0$

iii. Jeżeli $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ jest σ-ciałem pozbioru zbioru Ω to $E(E(\xi|\mathcal{F})|\mathcal{G}) = E(\xi|\mathcal{G})$ p.n

iv. Jeżeli zmienna losowa $\eta : \Omega \to \mathbb{R}$ jest $\mathcal{F}$-mierzalna i $E|\xi\eta| < +\infty$ to $E(\xi\eta|\mathcal{F}) = \eta E(\xi|\mathcal{F})$ p.n.

Tw. Załóżmy, że ξ_1, ξ_2 sa całkowalnymi zmiennymi losowymi na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$, a $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ jest σ-ciałem pozbioru zbioru Ω. Wówczas

1. Dla liczb rzeczywistych α, β
   $E(\alpha\xi_1 + \beta\xi_2|\mathcal{F}) = \alpha E(\xi_1|\mathcal{F}) + \beta E(\xi_2|\mathcal{F})$ p.n.
2. Jeżeli $\xi_1 \leqslant \xi_2$ to $E(\xi_1|\mathcal{F}) \leqslant E(\xi_2|)$ p.n.

Def. $E(X|Y) = E(X|\sigma(Y))$
Jeżeli Y ma rozkład dyskretny i $\mathcal{P}(Y = y) > 0$ to
$E(X|Y = y) = \dfrac{1}{\mathcal{P}(Y = y)} \displaystyle\int_{Y=y} X d\mathcal{P}$

Tw. Załóżmy, że X i Y posiadają rozkłady skokowe
$\mathcal{P}_Y(y) = \mathcal{P}(Y = y)$
$\mathcal{P}_{(X,Y)}(x, y) = \mathcal{P}(X = x, Y = y)$
$E(h(x), Y) = \displaystyle\sum_{x \in S_x} h(x) \frac{\mathcal{P}(X, Y)(x, y)}{\mathcal{P}_Y(y)}$
h - funkcja borelowska, taka, że $h(x) \in L^1$ (całkowalna)
S_x - zbiór wartości zmiennej losowej X

Tw. Jeżeli (X, Y) ma rozkład ciągły o gęstości g to $E(h(x)|Y) = \dfrac{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} h(x)g(X, Y)dx}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(X, Y)dx}$ o ile $E(|h(x)|) < \infty$

Gdy $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(X, Y)dx = 0$ to $E(h(x)|Y) = 0$

Def. Prawdopodobieństwem warunkowym zdarzenia $A \in \mathcal{F}$ pod warunkiem $Y = y$ nazywamy
$\mathcal{P}(A|Y = y) = E(\mathbb{1}_A|Y = y)$ gdzie $\mathbb{1}_A$ jest zmienną losową.

Tw. Jeżeli (X, Y) ma rozkład ciągły z gęstością g to
$$\mathcal{P}(X \in B|Y) = \frac{\displaystyle\int_B g(X, Y)dx}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(X, Y)dx}$$

Martyngały

Def. Jeżeli $T = \mathbb{N}$ to wówczas $(X_n, \mathcal{F}_n)$ jest martyngałem, gdy
$E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n$ lub $E(X_{n+1} - X_n|\mathcal{F}_n) = 0$
$\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1} \subset ... \subset$

$E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n$
$E(X_n|\mathcal{F}_n) = X_n$ (wiemy to, gdy jest mierzalna)
$E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = E(X_n|\mathcal{F}_n) \overset{\text{addytywność}}{\Longrightarrow} E(X_{n+1} - X_n|\mathcal{F}_n) = 0$

Przykład: Jeżeli $X_n = \xi_1 + ...\xi_n$ gdzie ξ_i - niezależne zmienne losowe takie, że $E\xi = 0$, a $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1...\xi_n)$. Wtedy $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ jest martyngałem.
$E(X_{n+1} - X_n|\mathcal{F}_n) = E(\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n) = E\xi_{n+1} = 0$ - mamy spełniony warunek (korzystamy z niezależności zmiennych losowych).

Przykład: Jeżeli X jest całkowalną zmienną losową, $\mathcal{F}_n$ - filtracja ($\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1} \subset ... \subset$)
$X_n = E(X|\mathcal{F}_n)$ wtedy $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ jest martyngałem.
$E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = E(E(X|\mathcal{F}_{n+1})|\mathcal{F}_n) = E(X|\mathcal{F}_n) = X_n$ (liczymy według najmniejszego).

Def. Rodzina zmiennych losowych $(X_t)_{t\in T}$ jest adoptowalna do filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ jeżeli zmienne losowe X_t są $\mathcal{F}_t$-mierzalne dla $t \in T$

Def. $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t\in T}$ gdzie $EX_t < \infty$ jest

- martyngałem jeśli dla $s \leqslant t \quad s, t \in T \quad E(X_t, \mathcal{F}_s) = X_s$
- nadmartyngałem jeśli $E(X_t|\mathcal{F}_s) \leqslant X_s$
- podmartyngałem jeśli $E(X_t|\mathcal{F}_s) \geqslant X_s$

1.3 Wykład 3 (31.03.15): Proces Poissona, Całka Ito

Martyngałowa charakterystyka procesu Wienera pochodząca od P.Levy'ego
Jeśli proces $X_t, t \geqslant 0$ jest martyngałem o ciągłych trajektoriach , a ponadto $X_t^2 - t$ też jest martyngałem to X_t jest procesem Wienera

Wniosek (własności trajektorii procesu Wienera)
Prawie wszystkie trajektorie procesu Wienera są wszędzie nieróżniczkowalne, mają wahanie nieskończone. Wariacja kwadratowa jest p.n. niezerowa.
Zadanie domowe: Podać dowód, że trajektorie są nieróżniczkowalne (książka - Jakubowski)

Twierdzenie (zasada odbicia)
Jeżeli $\{W_t\}_{t>0}$ jest procesem Wienera to

$$P(\sup_{s\leqslant t} W_s > N) = 2P(W_s > N) \qquad N - \text{dowolna stała}$$

Dotyczy to np. cząsteczek gazów.

Twierdzenie
Prawo wielkich liczb dla procesu Wienera:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{W_t}{t} = 0 \ \text{ p.w}$$

Twierdzenie
Niech $(P_n) = \{t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, ..., t_{m_n}^{(n)}\}$ $n \in \mathbb{N}$ będzie ciągiem podziałów odcinka $[a, b]$ takich, że $||P_n|| \to 0$ przy $n \to \infty$ gdzie $||P_n|| = \sup_k |t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}|$.
Wówczas $S_n = \sum_{k=1}^{m_n} \left| W_{t_k}^{(n)} - W_{t_{k-1}}^{(n)} \right|^2 \xrightarrow{n\to\infty} b - a$ w L^2 (przestrzeń funkcji całkowalnych z kwadratem).
Jeżeli $\sum ||P_n|| < \infty$ to $S_n \to b - a$ p.w.

Twierdzenie
$\bigwedge_{\alpha<1}$ prawie wszystkie trajektorie procesu Wienera są α-Holderowskie to znaczy istnieje zmienna losowa $C : \Omega \to \mathbb{R}$ taka, że $|W_{t+h} - W_t| < Ch^\alpha \quad \bigwedge_{t,h>0}$

Twierdzenie (Prawa iterowanego logarytmu)

1. Lokalne prawo iterowanego logarytmu
   Niech (W_t) - proces Wienera
   $\bigwedge_{s\geqslant 0}$ z prawdopodobieństwem 1 zachodzi

   - $\limsup_{t\to 0} \frac{(W_{s+t} W_s)}{\sqrt{2t \ln\ln(\frac{1}{t})}} = 1$
   - $\liminf_{t\to 0} \frac{(W_{s+t} W_s)}{\sqrt{2t \ln\ln(\frac{1}{t})}} = -1$
   - $\limsup_{t\to 0} \frac{|W_{s+t} W_s|}{\sqrt{2t \ln\ln(\frac{1}{t})}} = 1$

Mianownik można zapisać jako $g(t) = \sqrt{2t \ln\ln(\frac{1}{t})}$ określone dla $t < \frac{1}{e}$

2. Asymptotyczne prawa iterowanego logarytmu
   Z prawdopodobieństwem 1 zachodzi:
   - $\limsup\limits_{t\to\infty} \dfrac{W_t}{\sqrt{2t\ln\ln t}} = 1$
   - $\liminf\limits_{t\to\infty} \dfrac{W_t}{\sqrt{2t\ln\ln t}} = -1$
   - $\limsup\limits_{t\to\infty} \dfrac{|W_t|}{\sqrt{2t\ln\ln t}} = 1$

Proces Poissona - wprowadzenie
Niech T będzie zmienną losową o rozkładzie wykładniczym o średniej $\frac{1}{\alpha}$
$P(T > t) = e^{-\alpha t} \quad t \geqslant 0$
$ET = \frac{1}{\alpha}$
T ma gęstość $G(x) = \alpha e^{-\alpha x} \quad \alpha \geqslant 0$
α - intenstywność
$\{T_n\}$ - ciąg zmiennych losowych niezależnych o jednakowych rozkładach T

Definicja
$S_0 = 0$
$S_n = T_1 + ...T_n$
S_n ma rozkład gamma o gęstości $f_{\alpha,n}(x) = \Gamma(n)^{-1}\alpha^n x^{n-1} e^{\alpha x} \quad x > 0$
Definiujemy nowa zmienna losową $N(t)$ (ilość sygnałów dla czasu $t > 0$)
$N(t) = \inf\{n : S_{n+1} > t\} \iff \{N(t) \geqslant n\} = \{S_n < t\}$
T_i - czasy oczekiwania na kolejne sygnały
S_n - czas oczekiwania na n-ty sygnał
$P(N(t) = n) = P(S_n \leqslant t \leqslant S_{n+1}) = P(S_{n+1} > t) - P(S_n > t) =$ ... obliczenia gęstości ... $= \frac{(\alpha t)^n}{n!} e^{-\alpha x}$
Otrzymaliśmy rodzinę zmiennych losowych $N(t)$ o rozkładach Poissona o średniej $\lambda = \alpha t$
$(N_t)_{t>0}$ jest procesem stochastycznym - przykładem procesu sygnałowego
$(0, +\infty) \ni t \to N(\omega, t)$ - trajektoria
Trajektoria procesu $(N_t)_{t>0}$ - niemalejące funkcje schodkowe, prawostronnie ciągłe o skokach jednostkowych.

Definicja
Rodzinę zmiennych losowych $(N(t))_{t>0}$ nazywamy procesem Poissona z intensywnością $\alpha > 0$ gdy

- $N(0) = 0$
- $\bigwedge\limits_{\text{sk.}} (s, s+t)\ W_{s+t}, W_s$ - zmienne losowe o przyrostach niezależnych *(fragment nieczytelny)*
- $N_{s+t} - N_s$ ma rozkład Poissona o średniej $\alpha t \quad s \geqslant 0 \quad t > 0$

$N(t)$ jest procesem Poissona.

Całka Ito

$(\alpha, \mathcal{F}, P)$, $\mathcal{F}_t$ - filtracja

Definicja

Proces $(X_t)_{t\geqslant 0}$ jest adoptowalny do filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ jeśli X_t jest $\mathcal{F}_t$ - mierzalna dla każdego t
Zadanie domowe: Sprawdzić, że
$h_1(t,\omega) = W_{\frac{t}{2}}(\omega)$ jest adoptowalny
$h_2(t,\omega) = W_{2t}(\omega)$ nie jest adoptowalny
Przypomnienie: $\mathcal{F}_t^w = \sigma(W_s : s < t)$

Definicja $U = U(S,T)$ będzie klasą funkcji
$f : [0,+\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$
(i) $(t,\omega) \to f(t,\omega)$ jest $B \times \mathcal{F}$ - mierzalna
(ii) $\omega \to f(t,\omega)$ jest $\mathcal{F}_t$ - adoptowalne
$f(t,\cdot)$ jest $\mathcal{F}_t$ - adoptowalne (t ustalone)
(iii) $E\left(\int_S^T f(t,\omega)^2 dt\right) < \infty$
Dla U zdefiniujemy całkę Ito
$I(f)(\omega) = \int_S^T f(t,\omega) dW_t(\omega)$
W_t - proces Wienera
a) $I(\phi)$ dla funkcji prostych
b) Potem pokażemy, że każdy $f \in U$ może być aproksymowany przez $\phi_U \in U$ (prosta funkcja) i definiujemy $\int f dW_t$ jako granicę.

Definicja
Funkcja $\phi \in U$ jest elementem (funkcją prostą) jeśli jest postaci $\phi(t,\omega) = \sum_j e_j(\omega)\mathbf{1}_{[t_j,t_{j+1})}(t)$
e_j są $\mathcal{F}_{t_j}$ - mierzalne.
$S = t_0 < ... < t_n = T$ - podział odcinka
Definiujemy całkę funkcji prostej

$$\int_S^T \phi(t,\omega) dW_t(\omega) = \sum_{j\geqslant 0} e_j(\omega)[W_{t_{j+1}} - W_{t_j}](\omega)$$

Lemat (Ito izometria dla funkcji prostych)
Jeżeli ϕ jest ograniczonym elementem wtedy

$$E\left(\int_S^T \phi(t,\omega) dW_t(\omega)\right)^2 = E\left(\int_S^T \phi(t,\omega) dg\right)$$

Konstrukcja całki Ito
Krok 1: Niech $g \in U$ będzie ograniczone i $\forall_\omega$ $t \to g(t,\omega)$ będzie ciągła. Wtedy istnieją elementarne funkcje $\phi_n \in U$ takie, że

$$E\left(\int_S^T (g - \phi_n)^2 dt\right) \to 0$$

Definiujemy $\phi_n(t,\omega) = \sum_j g(t_j,\omega)\mathbf{1}_{[t_j,t_{j+1})}(t)$
$\phi_n \in U$ i ponieważ $\int_S^T (g-\phi_n)^2 dt \to 0$ przy $n \to \infty$ $\forall_\omega$
$t \to g(t,\omega)$ są $\forall_\omega$ zatem $E\left(\int_S^T (g-\phi_n)^2 dt\right) \to 0$ przy $n \to \infty$

Zadanie domowe:

$$\int_S^T (g - \phi_n)^2 dt \to 0$$

1.4 Wykład 4 (14.04.15): Całka Ito z Definicji

Przypomnienie:
$f(t,\omega)$ - proces stochastyczny
Funkcja $\phi \in U$ jest elementarna (prosta) jesli jest postaci $\phi(t,\omega) = \sum_j e_j(\omega)\mathbb{1}_{[t_j,t_{j+1}](t)}$ *S6 / P4*

Kontrukcja całki Ito *S9 / P4*
Chcemy skonstruowac całkę postaci: $\int_S^T f(s,\omega)dW_s$ dla $f \in U(S,T)$
Krok I (był na poprzednim wykładzie) *S9 / P4*
Bierzemy funkcje $g \in U$ ograniczoną z ciągłymi trajektoriami. Wtedy istnieje ciąg funkcji elementarnych $\phi_n \in U$ zdefiniowanych wzorem

$$\phi_n(t,\omega) = \sum_j g(t_j,\omega)\mathbb{1}_{[t_j,t_{j+1}](t)}$$

Uwaga: jest to bardzo ważny i istotny wzór, podobnie jak wybór t_j
Chcemy policzyć $\int_S^T g(s,\omega)dW_s$
Podział: $S = t_0 < ... < t_n = T$

Krok II *S11 / P4*
Niech $h \in U$ będzie ograniczoną i ciągłą funkcją, wtedy istnieje ciąg funkcji ograniczonych $g_n \in U$ taki, że $g_n(\cdot,\omega)$ jest ciągłe $\forall_{\omega\in U\ ,\ n\in\mathbb{N}}$ (ciągła trajektoria)

$$E\left(\int_S^T (h-g_n)^2 dt\right) \to 0$$

Komentarz: Całka Riemanna (ustalamy ω, całka po t, h ciągłe, g_n ciągłe - całka po czasie)
Dowód: Przypuśćmy, że $g(t,\omega) \leqslant M$ - ograniczoność □

Def. ψ_n - nieujemne, ciągłe na $\mathbb{R}$ takie, że

i. $\psi_n(x) = 0 \quad x \leqslant -\frac{1}{n} \quad x \geqslant 0$
ii. $\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(x)dx = 1$

$g_n(t,\omega) = \int_0^t \psi_n(s-t)g(s,\omega)ds$
Wtedy $g_n(\cdot,\omega)$ jest ciągła
$|g_n(t,\omega)| \leqslant M$
Ponieważ $h \in U$, $g_n(t,\cdot)$ jest $\mathcal{F}_t$-mierzalna $\forall_t$
Zad.dom: $\int_S^T (g_n(s\omega) - h(s,\omega))^2 ds \to 0 \quad n \to \infty\ \forall_\omega$
Zatem z twierdzenia o ograniczonej zbieżności

$$E\left(\int_S^T (h(t,\omega) - g_n(t,\omega))^2 dt\right) \to 0 \quad n \to \infty$$

Krok III *S15 / P4*
Niech $f \in U$. Wtedy $\exists_{h_n \subset U}$ takie, że h_n - ograniczone $\forall_n$

$$E\left(\int_S^T (f-h_n)^2 dt\right) \to 0 \ \text{ przy } \ n \to \infty$$

Definiujemy $h_n = \begin{cases} -n & f(t,\omega) \leqslant -n \\ f(t,\omega) & -n \leqslant f(t,\omega) \leqslant n \\ n & f(t,\omega) \geqslant n \end{cases}$
Na koniec pokazujemy, że f przybliża h_n średniokwadratowo.

Odwracamy kroki
$f \in U \Longrightarrow$ przybliżamy ją $h_n \Longrightarrow$ przybliżamy funkcjami z U ograniczonymi $\Longrightarrow$ te funkcje z U o ciągłych trajektoriach przybliżamy ciągiem funkcji elementarnych ϕ_n.

Def. Całka Ito *S17 / P4*
Niech $f \in U(S,T)$. Wtedy całka Ito zdefiniowana jest następująco

$$\int_S^T f(t,\omega) dW_t(\omega) = \lim_{n\to\infty} \int_S^T \phi_n(t\omega) dW_t(\omega)$$

gdzie ϕ_n jest ciągiem funkcji elementarnych spełniający warunek

$$E\left(\int_S^T (f(t\omega) - \phi_n(t\omega))^2 dt\right) \to 0 \text{ przy } n \to \infty$$

Wn. Izometria Ito (właściwa)
Dla $f \in U(S,T)$

$$E\left(\int_S^T \underbrace{f(t,\omega)dW_t(\omega)}_{\text{całka Ito}}\right)^2 = E\left(\int_S^T \underbrace{f^2(t,\omega)dt}_{\text{zwykła całka}}\right)$$

Wn. Jeżeli $f \in U(S,T)$, $f_n \in U(S,T)$ oraz

$$E\left(\int_S^T (f_n(t,\omega) - f(t,\omega))^2 dt\right) \to 0 \text{ przy } n \to \infty$$

Wtedy

$$\int_S^T f_n(t,\omega) dW_t(\omega) \stackrel{L^2(\Omega)}{\to} \int_S^T f(t,\omega) dW_t(\omega)$$

Przykład: *S20 / P4*
$\displaystyle\int_0^t W_s dW_s = \frac{1}{2}W_t^2 - \frac{1}{2}t$
Łatwo zauwazyć, że $S = 0 \quad T = t \qquad f(s,\omega) = W_s(\omega)$
Dowód:
$\phi_n(s,\omega) = \sum_j W_{t_j} \mathbb{1}_{[t_j,t_{j+1})}(t)$ oraz przyjmujemy oznaczenie $W_{t_j} = W_j$
Wtedy $E\left(\int_0^t (\phi_n(s,\omega) - W_s(\omega))^2 ds\right) =$
$E\left(\sum_j \int_{t_j}^{t_{j+1}} (W_j - W_s)^2 ds\right) =$
$\sum_j \int_{t_j}^{t_{j+1}} E((W_j - W_s)^2) ds =$
$\sum_j \int_{t_j}^{t_{j+1}} (s - t_j) ds =$

$\sum_j \frac{1}{2}(t_{j+1}-t_j)^2 \to 0$, gdy $\Delta t_j \to 0$ (przyrost).

Zatem z definicji:

$\int_0^t W_s dW_s = \lim_{\Delta t_j \to 0} \int_0^t \phi_n dW_s \overset{\text{z def. całki}}{=} \lim_{\Delta t_j \to 0} \sum_j W_j \Delta W_j$

Teraz musismy się zastanowić co chcemy otrzymać, zatem:

$\Delta(W_j)^2 = W_{j+1}^2 - W_j^2 = (W_{j+1}-W_j)^2 + 2W_j(W_{j+1}-W_j) = (\Delta W_j)^2 + 2W_j\Delta W_j$

Pamiętamy, że $W_0 = 0$

Wtedy $W_t^2 = \sum_j \Delta(W_j^2) = \sum_j (\Delta W_j^2) + 2\sum_j W_j \Delta W_j$

Przekształcając otrzymujemy $\sum_j W_j \Delta W_j = \frac{1}{2}W_t^2 - \frac{1}{2}\sum_j (\Delta W_j)^2$

$W_t^2 = W_t^2 - 0 = W_t^2 - W_0^2 = (W_{t_{j_n}}^2 - W_{t_{j_{n-1}}}^2) + ... + (W_{t_1}^2 - W_0^2)$

Pokazaliśmy, że $\sum_j (\Delta W_j)^2 \overset{\Delta t_j \to 0}{\longrightarrow} t$ w $\mathcal{L}^2$

Stąd $\int_0^t W_s dW_s = \frac{1}{2}W_t^2 - \frac{1}{2}t$

Inne przykłady: *S24 / P4*

$\phi_{1,n}(t,\omega) = \sum_j W_{\frac{j}{2^n}}(\omega)\mathbb{1}_{[\frac{j}{2^n},\frac{j+1}{2^n})}(t)$

$\phi_{2,n}(t,\omega) = \sum_j W_{\frac{j+1}{2^n}}(\omega)\mathbb{1}_{[\frac{j}{2^n},\frac{j+1}{2^n})}(t)$

$\int_0^t \phi_{1,n}(t,\omega)dW_t(\omega) = \sum_j W_{t_j}(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})$

$\int_0^t \phi_{2,n}(t,\omega)dW_t(\omega) = \sum_j W_{t_{j+1}}(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})$

Wtedy $E\left(\int_0^t \phi_{1,n}(t,\omega)dW_t(\omega)\right) = \sum_j E(W_{t_j}(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})) = 0$ ponieważ są tu niezależne przyrosty.

A w przypadku $E\left(\int_0^t \phi_{2,n}(t,\omega)dW_t(\omega)\right) = \sum_j E(W_{t_{j+1}}(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})) = \sum_j E((W_{t_{j+1}} - W_{t_j})^2) = \sum_j (t_{j+1}-t_j) = T$

1.5 Wykład 5 (21.04.15): Formuła Ito

Przypomnienie: *S4 / P5*
$\phi_n(t,\omega) = \sum_j f(t_j^*, \omega) \mathbb{1}_{[t_j, t_{j+1})}(t)$

1. $t_j^* = t_j$ - całka Ito
2. $t_j^* = \frac{1}{2}(t_j + t_{j+1})$ - całka Stratanowicza

Tw. $f, g \in U(0,T) \qquad 0 \leqslant S < U < T$ *S5 / P5*
Wtedy:

i) $\int_S^T fgW_t = \int_S^U f dW_t + \int_U^T f dW_t$

ii) $\int_S^T (cf+g) dW_t = c \int_S^T f dW_t + \int_S^T g dW_t$

iii) $E\left(\int_S^T f dW_t\right) = 0$

iv) $\int_0^T f dW_t$ jest $\mathcal{F}_t$ mierzalna

Tw.(Nierówność martyngałowa Dooba) *S6 / P5*
Jeżeli M_t jest martyngałem, takim, że $t \to M_t(\omega)$ jest ciągłe p.w.
Wtedy $p \geqslant 1, T \geqslant 0, \lambda > 0$

$$\mathcal{P}(\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} M_t \geqslant \lambda) \leqslant \frac{1}{\lambda^p} E(|M_t|^p)$$

Tw. Niech $f \in U(0,T)$. Wtedy istnieje t-ciągła wersja *S7 / P5*

$$\int_0^t f(s,\omega) dW_s(\omega)$$

$0 \leqslant t \leqslant T$ - tzn. istnieje proces J_t o ciągłych trajektoriach na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ taki, że

$$\mathcal{P}(J_t = \int_0^t f dW) = 1$$

Wn. Niech $f \in U(0,T)$ dla kazdego T. Wtedy: *S13 / P5*

$$M_t(\omega) = \int_0^t f(s,\omega) dW_s$$

jest martyngałem względem $\mathcal{F}_t$ i

$$\mathcal{P}\left(\sum_{0 \leqslant t \leqslant T} |M_t| \geqslant \lambda\right) \leqslant \frac{1}{\lambda^2} E\left(\int_0^T f(s,\omega)^2 ds\right)$$

Jednowymiarowy proces Ito *S2 / P6*

Niech W_t będzie jednowymiarowym procesem Wienera na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$. Jednowymiarowy proces Ito (lub całka stochastyczna) to proces X_t na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ postaci:

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(s,\omega)ds + \int_0^t v(s,\omega)dW_s$$

gdzie $v \in W_H$ zatem

$$\mathcal{P}\left(\int_0^t v(s,\omega)^2 ds < \infty \text{ dla każdego } t \geqslant 0\right) = 1$$

Ponadto zakładamy, że μ jest H_t-adoptowalna (tzn. σ-ciało, takie, że dla każdego t W_t jest H_t-mierzalny) i

$$\mathcal{P}\left(\int_0^t |\mu(s,\omega)| ds < \infty \text{ dla każdego } t \geqslant 0\right) = 1$$

Jeżeli X_t jest procesem Ito to umownie zapisujemy

$$dX_t = \mu dt + v dW_t \qquad \left(d\left(\frac{1}{2}W_t^2\right) = \frac{1}{2}dt + W_t dW_t\right)$$

Tw. (Jednowymiarowa formuła Ito) *S4 / P6*
Niech X_t będzie procesem danym przez:

$$dX_t = \mu dt + v dW_t$$

Niech $g \in C^2([0 \times \infty) \times \mathbb{R})$. Wtedy $Y_t = g(t, X_t)$ jest procesem Ito i

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t,X_t)dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t,X_t)dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x}(t,X_t)\cdot(dX_t)^2$$

gdzie $(dX_t)^2 = (dX_t)(dX_t)$ jest zgodne z zasadami:
$dt \cdot dt = dt \cdot dW_t = dW_t \cdot dt = 0$
$dW_t \cdot dW_t = dt$

Przykłady: *S6 / P6*

1. $I = \displaystyle\int_0^t W_s^2 dW_s \qquad X_t = W_t$ - proces Ito
   $g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad g(t,x) = \frac{x^3}{3}$
   $\frac{\partial g}{\partial t} = 0 \qquad \frac{\partial g}{\partial x} = x^2 \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 2x$
   $dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t,W_t)dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t,W_t)dW_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t,W_t)dt$
   $Y_t = g(t,W_t) = \frac{1}{3}W_t^3$
   $d\left(\frac{W_t^3}{3}\right) = W_t^2 dW_t + \frac{1}{2}2W_t dt$
   $\frac{W_t^3}{3} = \underbrace{\dfrac{W_0^3}{3}}_{=0} + \displaystyle\int_0^t W_s^2 dW_s + \int_0^t W_s ds$
   $\displaystyle\int_0^t W_s^2 dW_s = \frac{W_t^3}{3} - \int_0^t W_s ds$

2. $I = \displaystyle\int_0^t s dW_s$
   $g(t,x) = tx$
   $\dfrac{\partial g}{\partial t} = x \qquad \dfrac{\partial g}{\partial x} = t \qquad \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 0$
   $Y_t = g(t,W_t) = tW_t$
   $d(tW_t) = W_t dt + t dW_t$

$$tW_t = \underbrace{0 \cdot W_0}_{=0} + \int_0^t W_s ds + \int_0^t s dW_s$$

$$\int_0^t s dW_s = tW_t - \int_0^t W_s ds$$

3. $I = \displaystyle\int_0^t e^{W_s} dW_s$

$g(t,x) = e^x$

$\dfrac{\partial g}{\partial t} = 0 \qquad \dfrac{\partial g}{\partial x} = e^x \qquad \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} = e^x$

$Y_t = g(t, W_t) = e^{W_t}$

$d(e^{W_t}) = e^{W_t} dW_t + \dfrac{1}{2} e^{W_t} dt$

$e^{W_t} = 1 + \displaystyle\int_0^t e^{W_s} dW_s + \dfrac{1}{2} \int_0^t e^{W_s} ds$

$\displaystyle\int_0^t e^{W_s} dW_s = e^{W_t} - \dfrac{1}{2} \int_0^t e^{W_s} ds - 1$

Tw. (Całkowanie przez części) *S10 / P6*

Załózmy, że $f(s,\omega) = f(s), f$ -ciągła i ma ograniczone wahanie na $[0,t]$. Wtedy:

$$\int_0^t f(s) ds = f(t)W_t - \int_0^t W_s dfs$$

Przy dodatkowym założeniu, że $f \in C^1$

$$\int_0^t f(s) ds = f(t)W_t - \int_0^t W_s f'(s) ds$$

$\displaystyle\int_0^t s dW_s = tW_t - \int_0^t W_s ds$

$Y_t = g(t, W_t) = f(t)W_t \qquad g(t,x) = f(t)x$

$\dfrac{\partial g}{\partial t} = f'(t)x \qquad \dfrac{\partial g}{\partial x} = f(t) \qquad \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 0$

$f(t)W_t = f(0)W_0 + \displaystyle\int_0^t f'(s) W_s ds + \int_0^t f(s) dW_s$

Niech $\varphi(x), x \in A$ będzie formułą zdaniową.

$\varphi(x)$ dla p.w. (prawie wszystkich) $x \in A \Leftrightarrow \exists_{N \in \mathfrak{M}} \ (\mu(N) = 0 \ \wedge \{x \in A \colon \ \sim \varphi(x)\} \subset N)$