Równania różniczkowe

Przepisał: Ricko

Rok 2015/2016

Spis treści

Rozdział 1

Wykład 1 - 23.02.16

1.1 Zawartość wykładu

- Rozszerzenie informacji o równaniach różniczkowych z pierwszego stopnia.
- Początek teorii równań różniczkowych cząstkowych.
- 3 twierdzenia o istnieniu rozwiązania równania różniczkowego *(Picarda, Peano, Cauchy'ego)*.
- Twierdzenie o jednoznaczności.
  Przykład braku jednoznaczności:
  $$y'(t) = 2\sqrt{|y(t)|} \qquad y(0) = 0 \qquad t > 0$$
  To zadania Cauchy'ego ma następujące rozwiązania:
  $$y_1(t) = 0 \qquad t \geqslant 0$$
  $$y_2(t) = t^2 \qquad t \geqslant 0$$
  Łatwo zresztą zauważyć, że $2t = y_2'(t) = 2\sqrt{|y_2(t)|} = 2t$. Rozwiązanie nie jest jednoznaczne, gdyż funkcja $f(t, y) = 2\sqrt{|y|}$ nie spełnia warunku Lipschitza względem zmiennej y.
- Wybrane narzędzia teorii równań cząstkowych.
- Transformata Fouriera.
- Przestrzenie Banacha.
- Lemat Laxa-Milgrama.
- Przestrzeń Sobolewa.
- Słabe rozwiązanie równania eliptycznego.
- Przybliżone rozwiązanie równan cząstkowych (metoda siatek).
- Teoria dystrybucji (Sobolew, Schwarz).

1.2 Twierdzenie Picarda o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania zadania Cauchy'ego.

Będziemy zajmować się tzw. równaniem zwyczajnym o postaci normalnej

$$y'(t) \equiv \frac{dy(t)}{dt} = f(t, y(t)) \tag{1.1}$$

gdzie $f = f(t, y)$ jest pewną zadaną funkcją dwóch zmiennych $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, minimalnie zakładamy, że f jest ciągła. Ponadto często określona jest ona na pewnym podzbiorze otwartym$f: \mathbb{R}^2 \supset D \to \mathbb{R}$.
Już prosta obserwacja pokazuje, że rozwiązania równania (1.1) nie będzie jedyne. Np. dla $y\colon (a, b) \to \mathcal{R}$, gdy $y'(t) = 0$ mamy funkcje postaci $y(t) = const$
Widać, że trzeba dołożyć pewien warunek, aby zestaw (1.1),(1.2) miał jedyne rozwiązanie. Będzie to warunek Cauchy'ego.

$$y(t_0) = y_0 \tag{1.2}$$

gdzie y_0 jest zadane (narzucamy wartość rozwiązania y w wybranym punkcie).
Zestaw (1.1),(1.2) nazywa się zadaniem Cauchy'ego, a (1.2) warunkiem Cauchy'ego.
Przypomnijmy warunek Lipschitza dla funkcji dwóch zmiennych.

Definicja 1. *Niech $g\colon G \to \mathbb{R}, (x, y) \in G \subset \mathbb{R}^2$, gdzie G jest zbiorem otwartym.*
Powiemy, że funkcja g spełnia warunek Lipschitza wględem y w zbiorze G, gdy

$$\underset{L>0}{\exists} \underset{(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in G}{\forall} |g(x_1, y_1) - g(x_2, y_2)| \leqslant L|y_1 - y_2|$$

Stałą L nazywamy stałą Lipschitza.

Teraz przejdziemy do twierdzenia Banacha o punkcie stałym.

Twierdzenie 1. *[Banacha o punkcie stałym]*
Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną zupełną, a $T\colon X \to X$ będzie ***kontrakcją*** *(odwzorowaniem zwężającym). Jeśli*

$$\underset{0\leqslant L<1}{\exists} \underset{x,y\in X}{\forall} d(T(x), T(y)) \leqslant Ld(x, y)$$

Wtedy istnieje dokładnie jeden punkt stały odwzorowania T w X. Ten punkt stały jest granicą ciągu kolejnych przybliżeń (bierzemy dowolny element $x \in X$ i rozpatrujemy ciąg $x, T(x), T(T(x)), T^3(x)...$)

Mając treść twierdzenia Banacha możemy przejść do sformułowania twierdzenia Picarda.

Twierdzenie 2. *[Picarda]*
Niech w obszarze $G \in \mathbb{R}^2$ takim, że $D \subset G$ funkcja $f\colon G \to \mathbb{R}$ dla $(x, y) \in G$ będzie ciągła względem zmiennej x i spełnia warunek Lipschitza względem zmiennej y czyli

$$\underset{L>0}{\exists} \underset{(x,y_1),(x,y_2)\in G}{\forall} |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant L|y_1 - y_2|$$

gdzie stała L może zależeć od wyboru domkniętego i ograniczonego podzbioru $D \subset G$.
Ponadto niech w domkniętym prostokącie P

$$P := \{(x, y) \in G\colon |x - x_0| \leqslant a,\ |y - y_0| \leqslant b\}$$

gdzie a, b - stałe, funkcja będzie ograniczona $|f(x,y)| \leqslant M$ dla $(x,y) \in P$ (funkcja ciągła na zbiorze zwartym przyjmuje kresy).
Wtedy zadanie Cauchy'ego

$$\begin{cases} (1.1)\ y'(x) = f(x, y(x)) \\ (1.2)\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

posiada jedyne rozwiązanie ($y(x)$ określone na przedziale $|x - x_0| \leqslant \alpha$, gdzie $\alpha < \min\{a, \frac{b}{M}, \frac{1}{L}\}$ (wystarczy, aby L była stałą Lipschitza dla prostokąta P).

Dowód.
Uproszczenia:
Zamiast badać zadanie Cauchy'ego (1.1),(1.2) możemy przetłumaczyć je na równanie całkowe:

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} y'(s)ds = \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds$$

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds \tag{1.3}$$

Stw.: Każde ciągłe rozwiązanie (w otoczeniu x_0) równania całkowego (1.3) jest różniczkowalnym (w tym otoczeniu) rozwiązaniem zadania Cauchy'ego (1.1),(1.2).
Wychodzimy od równania całkowego (1.3) i niech $y(x)$ jest jego ciągłym rozwiązaniem (i odwrotnie). Dla $h \neg 0$

$$y(x+h) = y_0 + \int_{x_0}^{x+h} f(s, y(s))ds$$

Obliczamy:

$$\frac{y(x+h) - y(x)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_{x_0}^{x+h} f(s, y(s))ds - \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds\right]$$

$\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} f(s, y(s))ds \xrightarrow{h \to 0} f(x, y(x))$ (z tw. Lebesque'a wobec założeń o f) $\Rightarrow y$ jest różniczkowalna

Skoro y jest różniczkowalna i (1.3) mamy

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds$$

to licząc pochodną $\frac{d}{dx}$

$$y'(x) = f(x, y(x)) \Longleftarrow \text{(równanie (1.1))}$$

Wstawiając w (1.3) $x = x_0$ uzyskujemy

$$y(x_0) = y_0 + \underbrace{\int_{x_0}^{x_0} f(s, y(s))ds}_{0} = y_0$$

. cd. dowodu na kolejnym wykładzie. $\square$

Rozdział 2

Wykład 2 - 01.03.16

2.1 Cd. dowodu tw. Picarda

Dowód.
Sprawdzimy teraz założenie twierdzenia Banacha.
Musimy wyprecyzować przestrzeń (X, d) oraz operator z twierdzenia Banacha. Przestrzeń określamy (najpierw z nadmiarem) następująco: przestrzeń funkcji ciągłych $C^0(|x - x_0| \leqslant \alpha)$ o wartościach w $\mathbb{R}$, jest to przestrzen Banacha. Ponadto stwierdzamy, że każdy domknięty podzbiór przestrzeni Banacha jest przestrzenią metryczną zupełną. Zdefiniujmy teraz zbiór E na którym będziemy określac operator T:

$$E = \{y \in C^0(|x - x_0| \leqslant \alpha), |y(x) - y_0| \leqslant b\} \tag{2.1}$$

Łatwo zauważyć, że powyższy zbiór jest kulą.
Teraz pora zdefiniować operator T (na E), będzie to operator całkowy dany nastepującym wzorem:

$$T(y)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds$$

Punkt stały takiego operatora T jest ciągłym rozwiązanien równania całkowego (1.3) czyli różniczkowalnym rozwiązaniem zadania Cauchy'ego (1.1),(1.2). Chcemy znaleźć punkt stały T w E tzn. taką funkcję $\overline{y}$, że $T(\overline{y}) = \overline{y}$. Weźmy $\overline{y} \in E$ i $T(\overline{y})(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \overline{y}(s))ds = \overline{y}(x)$. Musimy pokazać (aby zastosować twierdzenie Banacha) dwie własności:

1. operator T działa z E w E.
2. T jest kontrakcją.

Najpierw pokażemy własność pierwszą. Bierzemy dowolny $y \in E$ i $T(y)$. Musimy sprawdzić, że $T(y) \in E$. Wiemy, że jeżeli y jest funkcją ciągłą to $\int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds$ będzie ciągła dla x. Pamiętając o naszych założeniach oznaczmy $Z(x) = \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds$, Widzimy, że $Z(x)$ jest funkcja ciągła:

$$Z(x + h) - Z(x) = \int_{x_0}^{x+h} f(s, y(s))ds - \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds.$$

Teraz sprawdzamy warunek dotyczący definicji E:

$$|T(y)(x) - y_0| = |y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds - y_0| = \Big|\int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds\Big| \leqslant \int_{x_0}^{x} |f(s, y(s))|ds \leqslant \int_{x_0}^{x} Mds = M|x - x_0| \leqslant M\alpha <$$

czyli obraz y poprzez T zawiera się w b.
Teraz pokażemy własność drugą. Bierzemy dwa dowolne elementy $y_1, y_2 \in E$ i szacujemy różnicą

$$\begin{aligned}
\sup_{|x-x_0|\leqslant\alpha} |T(y_1)(x) - T(y_2)(x)| \equiv ||T(y_1) - T(y_2)||_E &\leqslant \\
&\leqslant \sup_{|x-x_0|\leqslant\alpha} \left| y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_1(s))ds - y_0 - \int_{x_0}^{x} f(s, y_2(s))ds \right| = \\
&= \sup_{|x-x_0|\leqslant\alpha} \left| \int_{x_0}^{x} (f(s, y_1(s))ds - f(s, y_2(s))ds) \right| \leqslant \\
&\leqslant \sup_{|x-x_0|\leqslant\alpha} \int_{x_0}^{x} |f(s, y_1(s))ds - f(s, y_2(s))ds| \Big| \leqslant \\
&\leqslant \sup_{|x-x_0|\leqslant\alpha} \int_{x_0}^{x} L \cdot |y_1(s) - y_2(s)| ds \leqslant \\
&\leqslant L \sup_{|x-x_0|\leqslant\alpha} \int_{x_0}^{x} \sup_{|s-x_0|\leqslant\alpha} |y_1(s) - y_2(s)| ds \equiv \\
&\equiv L \sup_{|x-x_0|\leqslant\alpha} \int_{x_0}^{x} \sup_{|z-x_0|\leqslant\alpha} |y_1(z) - y_2(z)| ds = \\
&= L \left(\sup_{|z-x_0|\leqslant\alpha} |y_1(z) - y_2(z)| + \underbrace{\int_{x_0}^{x} 1 ds}_{\leqslant\alpha} \right) \leqslant \\
&\leqslant L\alpha \sup_{|z-x_0|\leqslant\alpha} |y_1(z) - y_2(z)| = \\
&= L\alpha \cdot ||y_1 - y_2||_E
\end{aligned}$$

W sumie uzyskalismy:

$$||T(y_1) - T(y_2)||_E \leqslant L\alpha ||y_1 - y_2||_E$$

wiedząc, że $L\alpha$ jest mniejsza od 1. Zatem T jest kontrakcją.
Sprawdziliśmy zatem, że spełnione sa założenia twierdzenia Banacha dla operatora T określonego na E.
Zatem z twierdzenia Banacha T ma jedyny punkt stały w E.
Jest to funkcja ciągła $\overline{y}$ taka, że $T(\overline{y}) = \overline{y}$ lub $\overline{y}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \overline{y}(s))ds$ czyli $\overline{y}$ jest różniczkowalnym rozwiązaniem zadania Cauchy'ego (1.1),(1.2). □

2.2 Metoda kolejnych przybliżeń

Definicja 2. *Odwzorowanie $F(X, d) \to (Y, \varrho)$ przestrzeni metrycznych nazywamy lipschitzowskim, jeśli spełniony jest warunek:*

$$\underset{L>0}{\exists} \underset{x,y\in X}{\forall} \varrho(F(x), F(y)) \leqslant Ld(x, y)$$

Dla stałej $L < 1$ takie odwzorowanie jest kontrakcją (odwzorowaniem zwężającym)
Zasada odwzorowań zwężających
Niech (Y, ϱ) będzie przestrzenia metryczną zupełną, a $F\colon Y \to Y$ będzie kontrakcją. Wtedy Y ma jedyny punkt stały oraz może on być wyznaczony jako granica ciągu kolejnych przybliżeń. Bierzemy $y \in Y$ i badamy ciąg $y, F(y), F(F(y)), F^3(y), \ldots$. Wtedy $F^n(y) = u$ - punkt stały.

Rozdział 3

Wykład 3 - 08.03.16

3.1 Wprowadzenie do tw. Peano

Twierdzenie Peano (ok. 1930 roku) dotyczy istnienia rozwiązania zadania Cauchy'ego (1.1),(1.2) [*Komentarz przepisującego: zadanie Cauchy'ego na tym wykładzie jest dla $y(t_0) = 0$, a nie $y(t_0) = y_0$, nie wiem czy to celowe, czy błąd profesora*] o ciągłej prawej stronie f.
Przypominamy sobie kontrprzykład z pierwszego wykładu.
Pomocnicze w dowodzie twierdzenia Peano są dwa twierdzenia z analizy funkcjonalnej. Pierwszym z nich jest twierdzenie Arzeli-Ascoliego (kryterium zwartości w przestrzeniach ciągłych $C^0([a, b])$).

Twierdzenie 3. *[Arzeli-Ascoliego]*
Niech G będzie podzbiorem przestrzeni $C^0([a, b])$, gdzie $[a, b]$ jest przedziałem w $\mathbb{R}^n$. Jeśli funkcje rodziny G spełniają warunki:

1. *są wspólnie ograniczone*
$$\underset{M>0}{\exists} \underset{x\in[a,b]}{\forall} \underset{g\in G}{\forall} |g(x)| \leqslant M$$
2. *sa jednakowo jednostajnie ciągłe*
$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \underset{\delta>0}{\exists} \underset{x_0\in[a,b]}{\forall} \underset{g\in G}{\forall} |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$$

to zbiór G jest względnie zwarty w $C^0([a, b], \mathbb{R}^n)$

Dowód znajduje się w książce Musielaka - Wstęp do analizy funkcjonalnej.
W przestrzeni metrycznej zwartość zbioru jest równoważna ciągowej zwartości tzn. z dowolnego ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ można wybrac podciąg zbieżny do pewnego elementu $a \in A$. Względna zwartośc mówi tyle, że zbiór B jest względnie zwarty, gdy $\overline{B}$ jest zwarty.
Drugim istotnym twierdzeniem jest twierdzenie Schaudera.

Twierdzenie 4. *[Schaudera]*
Jeśli K jest zbiorem niepustym, domkniętym i wypukłym w przestrzeni Banacha B, a odwzorowanie $T \colon K \to K$ jest ciągłe i ma tę własność, że obraz $T(K)$ jest względnie zwarty to istnieje punkt $x_0 \in K$, że $T(x_0) = x_0$

Przykład 1. *Niech K będzie kulą domknięta w $\mathbb{R}^n$ o środku w 0 i promieniu 1.*

1. *$T = id$ - wszystkie punkty są stałe.*
2. *T - obrót o kąt 60° - jeden punkt stały (środek).*
3. *T - obrót o kąt 180° - średnica stanowi zbiór punktów stałych.*

Uwaga 1. *Jeśli stosujemy twierdzenie Schaudera w przestrzeni funkcji ciągłych $C^0([a,b],\mathbb{R})$ to do sprawdzenia względnej zwartości stosujemy twierdzenie Arzeli-Ascoliego.*

3.2 Twierdzenie Peano

Mając już wszystkie niezbędne narzędzia możemy przejść do sformułowania twierdzenia Peano.

Twierdzenie 5. *[Peano]*
Niech $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ będzie zbiorem otwartym i niech f będzie funkcją ciągłą, $f \in C^0(D,\mathbb{R})$, wtedy dla dowolnego punktu $(t_0, y_0) \in D$ istnieje liczba $\alpha > 0$, taka że zadanie Cauchy'ego (1.1),(1.2) będzie miało rozwiązanie $y(t)$ określone dla $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, gdzie liczba α jest dostatecznie mała.

Dowód. Ustalmy punkt $(\underbrace{t_0}_{\in\mathbb{R}}, \underbrace{y_0}_{\in\mathbb{R}^n}) \in D$ i obierzmy stałe $a, b > 0$ tak, aby kostka

$$P = \{(t,y) \in \mathbb{R}^{n+1} \colon |t - t_0| \leqslant a,\ |y - y_0| \leqslant b\}$$

zawarta była w D (czyli P jest zbiorem zwartym całkowicie zawartym w zbiorze otwartym).
Na mocy ciągłości f w D funkcja f musi (w zbiorze zwartym) przyjmować kresy. W szczególności

$$\underset{M>0}{\exists}\ \underset{(t,y)\in P}{\forall} |f(t,y)| \leqslant M$$

Obierzmy stałą α w taki sposób, aby $\alpha \leqslant \min\{a, \frac{b}{M}\}$. [*Komentarz przepisującego: Na następnym wykładzie zamiast nierówności wzięliśmy równość*]. W przestrzeni Banacha $B = C^0([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha])$ rozpatrujemy zbiór

$$K = \{\phi \in C^0([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]) \colon ||\phi - y_0||_B \leqslant b\}$$

gdzie y_0 - stała, $||\phi - y_0|| = \sup_{t\in[t_0-\alpha, t_0+\alpha]} |\phi(t) - y_0| \leqslant b$
W jednym wymiarze jest to kula o promieniu b i środku y_0. Określimy teraz odwzorowanie $T\colon K \to B$ dane wzorem

$$T(\phi)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi(s))ds$$

Musimy sprawdzić, że dla wprowadzonych wyżej obiektów zachodzi twierdzenie Schaudera. Zauważmy, że zbiór K jest kulą domkniętą w przestrzeni B, stąd jest to zbiór niepusty i wypukły:

1. $y_0 \in K \Longrightarrow K$ - niepusty
2. $\phi_1, \phi_2 \in K,\ \beta\phi_1 + (1-\beta)\phi_2 \in K$ - kombinacja jest funkcją ciągłą (trzeba wykazać, że jeśli $||\phi_1 - y_0|| \leqslant b,\ ||\phi_2 - y_0|| \leqslant b$ to zachodzi $||(\beta\phi_1 + (1-\beta)\phi_2) - y_0|| \leqslant b$ - zadanie domowe).

Zamiast szukać rozwiązań równania (1.1),(1.2) [*Komentarz przepisującego: Dla $t_0 = 0$, patrz komentarz na początku poprzedniego wykładu*] możemy równoważnie szukać punktów stałych T w K. W tym celu zastosujemy twierdzenie Schaudera. Przejdźmy więc do sprawdzenia jego warunków. Zobaczmy, że

$T(K) \subset K$. Niech $\phi \in K$, zauważmy, że $T(\phi)$ jest funkcja ciągłą (jako całka górnej granicy y), szacujemy dalej:

$$||T(\phi) - y_0|| = \sup_{t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]} |T(\phi)(t) - y_0| = \sup_{t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]} |y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi(s)) ds - y_0| \leqslant$$

$$\sup_{t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]} \int_{t_0}^{t} \underbrace{|f(s, \phi(s))|}_{\leqslant M} ds \leqslant \alpha \cdot M \leqslant b$$

Pozostała nam do sprawdzenia własność, że $T(K)$ jest zbiorem względnie zwartym w przestrzeni Banacha funkcji ciągłych. Sprawdzimy to przy użyciu twierdzenia Arzeli-Ascoliego (stosując je do $T(K)$ jako podzbioru funkcji ciągłych). Po pierwsze $K \subset C^0([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha])$ i dodatkowo zbiór $\overline{T(K)}$ jest ograniczony w przestrzeni funkcji ciągłych $C^0([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha])$ bowiem

$$||\phi - y_0||_{C^0([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha])} \leqslant b$$

dokładniej

$$||\phi||_{C^0([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha])} \leqslant ||\phi - y_0||_{C^0([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha])} + ||y_0||_{C^0([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha])} \leqslant b||y_0||_{C^0([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha])}$$

Wszystkie normy są szacowane przez jedna stałą, stąd wszystkie elementy K są wspólnie ograniczone. Po drugie musimy sprawdzić, że elementy $T(\phi)\colon \phi \in K$ są jednakowo jednostajnie ciągłe. Rzeczywiście

$$|T(\phi)(t) - T(\phi)(s)| = \Big| \int_{s}^{t} f(z, \phi(z)) dz \Big| \leqslant \int_{s}^{t} |\underbrace{f(z, \phi(z))}_{\leqslant M}| dz \leqslant M \cdot (t - s)$$

$M \cdot (t - s)$ jest takie samo dla wszystkich ϕ, wynik oszacowania zatem nie zależy od wyboru ϕ z K i pokazuje ciągłość (jednakową jednostajną).

$T(K)$ spełnia założenia twierdzenie Arzeli-Ascoliego, więc jest to zbiór względnie zwarty. Pozostało pokazać, że $T\colon K \to K$ jest ciągłe jako odwzorowanie pomiędzy przestrzeniami Banacha. $\square$

Rozdział 4

Wykład 4 - 22.03.16

4.1 Dokończenie dowodu twierdzenia Peano

Sprawdzimy teraz ostatni warunek z twierdzenia Schaudera czyli ciągłość $T\colon K \to K$. Aby to pokazać użyjemy ciągłości funkcji f w prostokącie P
Dla dowolnych $(t_1, y_1), (t_2, y_2) \in P$ i $\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists} |(t_1, y_1) - (t_2, y_2)| < \delta \Rightarrow |f(t_1, y_1) - f(t_2, y_2)| < \frac{\varepsilon}{\alpha}$.
Weźmy dowolne $\varphi, \psi \in K$ i argument $s \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ oraz $||\varphi - \psi||_B \leqslant \delta$. Wtedy

$$||\varphi - \psi||_B \leqslant \delta \Rightarrow |f(s, \varphi(s)) - f(s, \psi(s))| < \frac{\varepsilon}{\alpha}$$

Dalej

$$||T(\varphi) - T(\psi)||_B = \sup_{t\in[t_0-\alpha,t_0+\alpha]} \Big| y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds - y_0 - \int_{t_0}^{t} f(s, \psi(s))ds \Big| =$$

$$= \sup_{t\in[t_0-\alpha,t_0+\alpha]} \Big| \int_{t_0}^{t} [f(s, \varphi(s)) - f(s, \psi(s))ds] \Big| \leqslant \sup_{t\in[t_0-\alpha,t_0+\alpha]} \int_{t_0}^{t} |f(s, \varphi(s)) - f(s, \psi(s))|ds \leqslant \sup_{t\in[t_0-\alpha,t_0+\alpha]} \int_{t_0}^{t} \frac{\varepsilon}{\alpha} ds \leqslant \varepsilon$$

To oznacza, że $T\colon K \to K$ jest ciągły w przestrzeni funkcji ciągłych B.
Sprawdziliśmy zatem wszystkie założenie twierdzenia Schaudera. W rezultacie operator T ma w zbiorze K punkt stały (niekoniecznie jeden).

$$\underset{u\in K}{\exists}\, T(u) = u$$

Mamy więc ciągłe rozwiązanie równania całkowego

$$y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))ds = u(t) \text{ dla } t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$$

To ciągłe rozwiązanie jest automatycznie różniczkowalnym rozwiązaniem zadania Cauchy'ego (1.1),(1.2)

4.2 Twierdzenie egzystencjalne

Przed podaniem treści twierdzenia potrzebne jest sformułowanie niezbędnych definicji.

Definicja 3. *(Funkcja rzeczywista analityczna)*
Mówimy, że funkcja $F(x_1, ..., x_n)$ zmiennych ***rzeczywistych*** *$x_1, ..., x_n$ jest* ***analityczna*** *względem swoich argumentów w punkcie $(x_1^0, ..., x_n^0)$ jeżeli w zbiorze $|x_i - x_i^0| < r$ (dla małego r) można ją przedstawić*

w postaci szeregu potęgowego

$$F(x_1,...,x_n) = \sum_{(k_1,...,k_n)} a_{k_1,...,k_n}(x_1 - x_1^0)^{k_1} \cdot ... \cdot (x_n - x_n^0)^{k_n}$$

zbieżnego bezwzględnie w otoczeniu $(x_1^0,...,x_n^0)$. *Wektor długości* n $(k_1,...,k_n)$ *przebiega wszystkie możliwe* n*-ki liczb naturalnych.*

Przykład 2.
Weźmy $n = 2$. *Wtedy dowolny wielomian dwóch zmiennych rzeczywistych*

$$W(x_1,x_2) = a_{00} + a_{10}x_1^1 + a_{01}x_2^1 + a_{11}x_1^1x_2^1 + ... + a_{k_1k_2}x_1^{k_1}x_2^{k_2}$$

jest przykładem funkcji rzeczywistej analitycznej dwóch zmiennych x_1, x_2 *w dowolnych punktach płaszczyzny* $\mathbb{R}^2$, *u nas jest to punkt* $(x_1^0, x_2^0) = (0,0)$.

Przykład 3.
Weźmy $n = 1$ *oraz* $x \in \mathbb{R}$

$$e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\frac{1}{n!}}_{a_n} x^n$$

Przykład 4.

$$e^{x+y} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} x^{n-1}y + ... + y_n}{n!}$$

W naszych rozważaniach będziemy się zajmowali funkcjami rzeczywistymi analitycznymi dwóch zmiennych $(y' = f(x,y))$
Przejdźmy do sformułowania twierdzenia:

Twierdzenie 6. *[Cauchy'ego]*
Jeśli funkcja $f(t,y)$ *jest rzeczywista analityczna w otoczeniu punktu* (t_0,y_0) *to istnieje* ***jedyne*** *rozwiązanie rzeczywiste analityczne* $y(t)$ *zadania Cauchy'ego*

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

określone w dostatecznie małym otoczeniu punktu t_0.

Rozdział 5

Wykład 5 - 05.04.16

5.1 Funkcje rzeczywiste analityczne cd.

Zajmujemy się zagadnieniem Cauchy'ego postaci

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{5.1}$$

Problem ten rozwiązujemy w klasie funkcji rzeczywistych analitycznych. Taką funkcję n zmiennych rzeczywistych można przedstawić w postaci szeregu potęgowego n zmiennych

$$F(x_1, ..., x_n) = \sum_{(k_1,...,k_n)} a_{k_1,...,k_n}(x_1 - x_1^0)^{k_1} \cdot ... \cdot (x_n - x_n^0)^{k_n}$$

gdzie $(k_1, \ldots, k_n)$ przebiega wszystkie n-ki liczb naturalnych (z dopuszczeniem zera). O takim szeregu zakładamy, że jest bezwzględnie zbieżny w kostce n-wymiarowej $|x_i - x_i^0| < r$ gdzie r jest dostatecznie małą liczbą dodatnią.
Ważna jest analityczność funkcji F w punkcie $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$. Dotyczy to własności (rozwijania funkcji w szereg) w otoczeniu tego punktu.

F jest analityczna w zbiorze otwartym $G \subset \mathbb{R}^n$ jeśli jest analityczna w każdym punkcie zbioru G.

Jeśli policzymy formalną pochodną funkcji F (tzn. wejdziemy z różniczkowaniem pod sumę), to taka funkcja - po zróżniczkowaniu będzie analityczna rzeczywista na nie mniejszym niż F zbiorze.

Takie funkcje można więc dowolnie wiele razy różniczkować, nie wychodząc przy tym poza klasę funkcji rzeczywistych analitycznych.

Pokażemy tylko jedyność takiego rozwiązania analitycznego. Dokładniej jeśli rozwiązanie (5.1) rzeczywiste analityczne istnieje to jest jedyne

5.2 Twierdzenie egzystencjalne: dowód jedyności

Dowód. [Konstrukcyjny]
Uproszczenie: Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $(t_0, y_0) = (0, 0)$. Jeśli tak nie jest rozpatrzymy

nową zmienną $\tau = t - t_0$ i nową funkcję $z = y - y_0$. Przyjmijmy jednak, że wyjściowy warunek ma postać $y(0) = 0$. Mamy więc założone istnienie rozwiązania analitycznego (w otoczeniu punktu $t = 0$)

$$y(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + \dots \tag{5.2}$$

Pokażemy, że zadanie (5.1) o postaci

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

w jednoznaczny sposób zadaje wszystkie współczynniki $c_0, c_1, c_2, \dots$.
Warunek $y(0) = 0$ implikuje, że $c_0 = 0$.
Wstawiamy postać rozwiązania (5.2) do (5.1). Pochodna ma wtedy postać

$$\frac{dy(t)}{dt} = c_1 + 2c_3 t + 3c_3 t^2 + \dots = f(t, y(t)) \tag{5.3}$$

i kładziemy $t = 0$ otrzymując w ten sposób $c_1 = f(0,0)$, ale f jest zadana, w szczególności $f(0,0)$ zadaje jednoznaczność. Aby wyznaczyć c_2 różniczkujemy (5.3), otrzymujemy wtedy

$$\frac{dy^2(t)}{dt} = 2c_2 + 3 \cdot 2c_3 t + 3 \cdot 4c_4 t^2 + \dots = \frac{\partial f(t, y(t))}{\partial t} + \frac{\partial f(t, y(t))}{\partial y} \cdot \frac{dy(t)}{dt} \tag{5.4}$$

Wstawiamy $t = y(t) = 0$ i otrzymujemy $c_1 = \frac{dy(0)}{dt}$

$$2c_2 = \frac{\partial f(0,0)}{\partial t} + \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} \cdot c_1$$

co pokazuje jednoznaczność wyznaczania współczynnika c_2 (bo wartości $\frac{\partial f(0,0)}{\partial t}$ i $\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}$ są zadane).
Wyznaczanie c_3: trzeba zróżniczkować (5.4) po t i wstawić $t = y(t) = 0$. Dostajemy wtedy po lewej stronie

$$2 \cdot 3c_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4c_t t + \dots$$

i po prawej

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f(t, y(t))}{\partial t} + \frac{\partial f(t, y(t))}{\partial y} \cdot \frac{dy(t)}{dt}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 f(t, y(t))}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 f(t, y(t))}{\partial y \partial t} + \frac{\partial^2 f(t, y(t))}{\partial t \partial y} \cdot \frac{dy(t)}{dt} + \frac{\partial^2 f(t, y(t))}{\partial y} \cdot \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2 + \frac{\partial^2 f(t, y(t))}{\partial y} \cdot \frac{d^2 y(t)}{dt^2}$$

Wstawiamy $t = y(t) = 0$ pamiętając, że

$$\frac{dy(0)}{dt} = c_1 \qquad \frac{d^2 y(0)}{dt^2} \overset{(5.4)}{=} 2c_2$$

Podobnie liczymy wartości wyższych współczynników.
Widzimy, że kolejne współczynniki c_i są jednoznacznie wyznaczone przez warunek $y(0) = 0$, wartości funkcji $f(t, y)$ i jej pochodnych cząstkowych w punkcie $(0,0)$. Znaczy to, że jednoznacznie wyznaczone są współczynniki rozwinięcia rozwiązania

$$y(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + \dots$$

Czyli ta funkcja analityczna jest wyznaczona w sposób jednoznaczny przez równanie (5.1) i warunek $y(0) = 0$
Nie mogą istnieć dwa różne rozwiązania analityczne (5.1). $\square$

5.3 Twierdzenie egzystencjalne: dowód istnienia analitycznego rozwiązania (5.1)

Dowód.
Dowód ten prowadzi się metodą majorant.
Dla dwóch funkcji z $\mathbb{R}^n$ w $\mathbb{R}^n$, klasy C^∞ w otoczeniu zera powiemy, że f jest majoryzowana przez F, jeśli

$$|D^\alpha f_k(0)| \leqslant D^\alpha F_k(0) \quad \underset{\alpha \in z^n}{\forall} \, \underset{k}{\forall}$$

gdzie α jest współczynnikiem $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. α_i mówi nam, że α_i razy różniczkujemy f po i-tej zmiennej. □

5.4 Wyższe pochodne

Wzory Leibnitza:
$\frac{d^n}{dt^n}(f(t) \cdot g(t))$:
$\frac{d}{dt}(f(t)g(t)) = f'(t)g(t) + f(t)g'(t)$
$\frac{d}{dt}(f'(t)g(t) + f(t)g'(t)) = f''(t)g(t) + f'(t)g'(t) + f'(t)g'(t) + f(t)g''(t)$ itd.

$\frac{d^n}{dt^n}(f(g(t)))$:
$\frac{d}{dt}f(g(t)) = f'(g(t))g'(t)$

5.5 Transformata Fouriera

Transformata (całkowa) Fouriera jest określona dla funkcji $f \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ wzorem

$$\hat{f} := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(t) e^{-itx} dt \tag{5.5}$$

gdzie $t = (t_1, \ldots, t_n), x = (x_1, \ldots, x_n)$ i $tx = t_1x_1 = \ldots t_nx_n$
Oznaczamy $\mathcal{F}(f)(x) \equiv \hat{f}(x)$

Specjalne podziękowania dla Pauliny Koniarek za udostępnienie tego wykładu :)

Rozdział 6

Wykład 6 - 19.04.16

6.1 Transformata Fouriera - cd.

Na początek odpowiemy sobie na pytanie dla jakich funkcji transformacja całkowa (5.5) jest sensowna.

Twierdzenie 7.
Przekształcenie Fouriera $\hat{}$ *funkcji* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *(przestrzeń funkcji mierzalnych i całkowalnych z modułem) istnieje w kiażdym punkcie* $x \in \mathbb{R}^n$ *oraz* $\hat{f}$ *jest funkcja jednostajnie ciągła w* $\mathbb{R}^n$ *i ponadto* $\hat{f}(x) \to 0$ *gdy* $|x| \to 0$

Dowód. Istnienie $\hat{f}$ dla $f \in L^1(\mathbb{R})$ wynika z oszacowania

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t) \cdot e^{-it \cdot x}| = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|dt < \infty$$

gdy $z \in \mathbb{R}$ (*Dopisek przepisującego:* $z = t \cdot x$) oraz $|e^{\pm iz}| = 1$.
Sprawdzenie tego faktu jest proste, w tym celu skorzystamy ze wzoru Eulera:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

$$|e^{iz}| = |\cos z + i \sin z| = \sqrt{\cos^2 z + \sin^2 z} = 1$$

Teraz sprawdzimy ciągłość, w tym celu bierzemy przyrost $h \in \mathbb{R}^n$

$$|\hat{f}(x+h) - \hat{f}(x)| = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(t) \cdot \left[e^{-it\cdot(x+h)} - e^{-it\cdot x} \right] dt \right| \leqslant (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} |f(t)| \cdot |e^{-itx}| \cdot |e^{-ith} - 1| dt =$$

$$= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left| f(t) \cdot 2\sqrt{\sin^2 \frac{ht}{2}} \right| dt$$

Obieramy $\varepsilon > 0$. Istnieje wtedy liczba $a > 0$ taka, że

$$(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{|t|>a} |f(t)|dt < \frac{\varepsilon}{4} \tag{6.1}$$

Wyika to z tego, że $f \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} |f(t)|dt < \infty$ tzn. $\lim_{r\to\infty} \int_{K(0,r)} |f(t)|dt < \infty$
Całka poza dostateczną kulą jest tak mała jak chcemy. Teraz obierzmy

$$\eta := \left[(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{|t|\leqslant a} |t| \cdot |f(t)|dt \right]^{-1} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \tag{6.2}$$

Wtedy kontynuując nasze oszacowanie dla $|h| < \eta$ otrzymujemy

$$|\hat{f}(x+h) - \hat{f}(x)| \leqslant (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} |f(t)| \cdot 2 \left|\sin \frac{ht}{2}\right| dt =$$

$$= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{|t|\leqslant a} |f(t)| \cdot 2 \left|\sin \frac{ht}{2}\right| dt + (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{|t|>a} |f(t)| \cdot 2 \left|\sin \frac{ht}{2}\right| dt \leqslant$$

$$\leqslant (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{|t|\leqslant a} |f(t)| \cdot \underbrace{|ht|}_{\leqslant |h||t|} dt + 2(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{|t|>a} |f(t)| dt <$$

$$\underbrace{|h|}_{|h|<\eta} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{|t|\leqslant a} |f(t)| \cdot |t| dt + 2 \cdot \underbrace{\frac{\varepsilon}{4}}_{\text{z (6.1)}} < \underbrace{\frac{\varepsilon}{2}}_{\text{z (6.2)}} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Całkę z $\mathbb{R}^n$ rozbiliśmy na dwie całki, w pierwszej skorzystaliśmy z szacowania modułu sinusa przez moduł jego argumentu, a następnie skorzystaliśmy z (6.2) dla $|h| < \eta$, z kolei w drugiej całce szacowaliśmy sinusa przez jedynkę i korzystaliśmy z (6.1).

Do pokazania pozostało, że $\hat{f}(x) \to 0$, gdy $|x| \to 0$ (pomijamy to na wykładzie). □

Wniosek 1. *Dla funkcji $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ transformata Fouriera jest dobrze określona.*

Definicja 4. *Odwrotna transformata Fouriera definiowana jest następująco*

$$\tilde{f}(t) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{itx} dx$$

Oznaczamy ją $\mathcal{F}^{-1}(f)(t)$. Nie jest to odwzorowanie odwrotne na całym $L^1(\mathbb{R}^n)$, ale jest (odwrotne) na pewnym podzbiorze $\mathfrak{S}$ (przestrzeni funkcji szybko malejących do zera).

6.2 Przestrzeń Schwartza

Definicja 5. *Przestrzenią $\mathfrak{S}$ funkcji szybko malejących do zera (przestrzenią Schwartza) nazywamy podzbiór funkcji klasy $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ o tej własności, że*

$$\underset{m\geqslant 0}{\forall} \ \underset{\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)}{\forall} \ \underset{M_{m,\alpha}>0}{\exists} \ \underset{x\in\mathbb{R}^n}{\forall} \ (1+|x|^m)|D^\alpha \varphi(x)| \leqslant M_{m,\alpha}$$

Własności przestrzeni Schwartza:

- $\mathfrak{S}$ jest przestrzenią liniową
- $\varphi \in \mathfrak{S} \Rightarrow \varphi \in L^p(\mathbb{R}^n)$ dla wszystkich $p \geqslant 1$
- gdy $\varphi, \psi \in \mathfrak{S}$ to $\varphi \cdot \psi \in \mathfrak{S}$

Definicja 6. *Pojęcie wielowskaźnika stosowane jest dla funkcji określonych na $\mathbb{R}^n$ do prostego zapisywania pochodnych cząstkowych. Wielowskaźnik to wektor długości n, każda składowa to liczba ze zbioru $\mathbb{N}_0$ (naturalne z zerem)*

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$$

Przykład 5.

$$D^{\alpha}\varphi(x) = \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\dots\partial x_n^{\alpha_n}}$$

Przykład 6. *Funkcje* $\varphi(x) = e^{|x|}$ *oraz* $\varphi(x) = e^{-|x|^2}$ *są funkcjami szybko malejącymi do zera.*

Przykład 7. *Innym przykładem są funkcje klasy* C^{∞} *o zwartych nośnikach. Niech* $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$*, powiemy że funkcja* φ *ma zwarty nośnik (support) jeśli zbiór*

$$supp\ \varphi = cl[x \in \mathbb{R}^n\colon \varphi(x) \neq 0]$$

jest zbiorem zwartym (domkniętym i ograniczonym)
Jest to na przykład $\varphi \equiv 0$ *lub* $\varphi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}} & |x| < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$

Rozdział 7

Wykład 7 - 26.04.16

7.1 Przestrzeń Schwartza - dalsze własności

Uwaga 2. *Na początku zauważmy pewien prosty związek*

$$\tilde{f}(-x) = \hat{f}(x)$$

Odwrotna transformata Fouriera określona jest dla funkcji $f \in L^1(\mathbb{R})$
Dla $f \in \mathfrak{S}$ zachodzi ponadto $\hat{\tilde{f}} = f = \tilde{\hat{f}}$ (tylko dla funkcji z przestrzeni Schwartza, nie dla wszystkich $f \in L^1(\mathbb{R})$

Twierdzenie 8.
Gdy $\varphi \in \mathfrak{S}$ to $\hat{\varphi} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ oraz dla dowolnego wielowskaźnika α zachodzi:

a) $(D^\alpha \widehat{\varphi})(x) = (-i)^{|\alpha|}\widehat{(t^\alpha \varphi)}(x)$

b) $\widehat{(D^\alpha \varphi)}(x) = i^{|\alpha|} x^\alpha \widehat{\varphi}(x)$

Dowód.
Na samym początku kilka pomocniczych faktów.

- Dla $\varphi \in \mathfrak{S}$ mamy $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ wraz ze swoimi wszystkimi pochodnymi czątkowymi $D^\alpha \varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ zatem $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ (oraz wszystkie są L-mierzalne).
- Zachodzi oszacowanie
$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)| dx = \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\varphi(x) \cdot (1 + |x|^m)}_{\leqslant M_{m,0}} \cdot \frac{1}{1+|x|^m} dx \leqslant M_{m,0} \cdot \frac{1}{1+|x|^m} dx < \infty \text{ gdy } m > n$$
- Dla $n = 1$ mamy $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{1+|x|^{1+\varepsilon}} dx < \infty$ dla $\varepsilon > 0$
- Podobne przeliczenia działają dla dowolnej pochodnej $D^\alpha \varphi$ funkcji φ z przestrzeni $\mathfrak{S}$.

Ponieważ całki
$$\int_{\mathbb{R}^n} D_x^\alpha (\varphi(t) e^{-itx}) dt = \int_{\mathbb{R}^n} (-i)^{|\alpha|} t^\alpha \varphi(t) e^{-itx} dt$$

są zbieżne jednostajnie względem parametru x, więc można wejść z pochodną D^α_x pod całkę.

$$\int_{\mathbb{R}^n} D\alpha_x(\varphi(t)e^{-itx})dt = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_n^{\alpha_n}}(\varphi(t)e^{-i(t_1x_1+\dots+t_nx_n)})dt$$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial}{\partial x_1}(\varphi(t)e^{-i(t_1x_1+\dots+t_nx_n)}) &= \int_{\mathbb{R}^n}\varphi(t)\frac{\partial}{\partial x_1}(e^{-it_1x_1}\cdot\ldots\cdot e^{-it_nx_n})dt = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\varphi(t)(-it_1)e^{-it_1x_1}\cdot\ldots\cdot e^{-it_nx_n}dt = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\varphi(t)(-it_1)e^{-it\cdot x}dt\end{aligned}$$

Szacujemy

$$\begin{aligned}(D^\alpha\hat{\varphi}) &= D^\alpha_x\left((2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(t)e^{-itx}dt\right) = \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}D^\alpha_x(\varphi(t)e^{-itx})dt = \\ &= (-i)^{|\alpha|}(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}t^\alpha\varphi(t)e^{-itx}dt = \\ &= (-i)^{|\alpha|}\widehat{t^\alpha\varphi(t)}(x).\end{aligned}$$

Co kończy dowód podpunktu a.
Uwaga przepisującego: Dowód podpunktu b (na razie) dołączony jest w postaci skanu, gdyż jest w nim sporo uwag i podopisywanych przejść przez co ciężko składnie opisać to w formie tekstowej

□

7.2 Splot funkcji z $L^1(\mathbb{R}^n)$

Definicja 7. *Niech $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będa funkcjami L-mierzalnymi. Całką*

$$(*)\quad \int_{\mathbb{R}^n} f(s-t)g(t)dt = (f*g)(s)$$

nazywamy splotem funkcji f i g.
Jest to rodzaj "mnożenia" funkcji. To "mnożenie" nie wyprowadza z przestrzeni $L^1(\mathbb{R}^n)$. Przestrzeń $L^1(\mathbb{R}^n)$ ze splotem jest przykładem tzw. algebry Banacha.

Twierdzenie 9.
Gdy $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ to splot $f*g$ istnieje prawie wszędzie w $\mathbb{R}^n$ i należy do $L^1(\mathbb{R}^n)$. Dodatkowo

$$||f*g||_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leqslant ||f||_{L^1(\mathbb{R}^n)}||g||_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

Dowód.

Gdy f, g są mierzalne, to $f(s-t)$ - mierzalna oraz $f(s-t)g(t)$ - mierzalna. Wobec twierdzenia Fubiniego

$$\begin{aligned}
||f * g||_{L^1(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(s-t)g(t)dt \right| ds \leqslant \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(s-t)| \cdot |g(t)| dt\ ds = \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(s-t)| \cdot |g(t)| ds\ dt = \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |g(t)| \int_{\mathbb{R}^n} |f(\underbrace{s-t}_{z=s-t})| ds\ dt = \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |g(t)| \int_{\mathbb{R}^n} |f(z)| dz\ dt = \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |g(t)| dt \int_{\mathbb{R}^n} |f(z)| dz = \\
&= ||g||_{L^1(\mathbb{R}^n)} \cdot ||f||_{L^1(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

□

Splot w $L^1(\mathbb{R}^n)$ jest działaniem przemiennym, łącznym i rozdzielnym z dodawaniem:

- $f * g = g * f$
- $f * (g * h) = (f * g) * h$
- $f(g + h) = f * g + f * h$

Rozdział 8

Wykład 8 - 10.05.16

8.1 Transformata Fouriera a splot i iloczyn funkcji

Pokażemy dwie własności wiążące transformatę Fouriera, splot i iloczyn (w $L^1(\mathbb{R}^n)$ lub w $\mathfrak{S}$).

Twierdzenie 10.
Gdy $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ to przekształcenie Fouriera splotu wyraża się wzorem

$$(**)\ \widehat{(f * g)}(t) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \widehat{f}(t) \cdot \widehat{g}(t) \quad \underset{t \in \mathbb{R}^n}{\forall}$$

Dowód.
Gdy $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ to $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ oraz $|f| * |g| \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Wobec tego zachodzi oszacowanie

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(t-s)g(s) \underbrace{e^{-itu}}_{|e^{-itu}|=1} |ds \right] dt = \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(t-s)||g(s)|ds \right] dt = \int_{\mathbb{R}^n} |f| * |g|(t) dt < \infty$$

Oczywiste jest, że jeśli funkcja jest w przestrzeni $L^1(\mathbb{R}^n)$ to jej moduł także. Powyższe oszacowanie pokazuje nam, że funkcja $f(t-s)g(s)e^{-itu}$ będzie sumowalna (całkowalna) dla każdego $u \in \mathbb{R}^n$. Rozpiszmy teraz transformatę Fouriera splotu

$$\begin{aligned}
\widehat{f * g}(u) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(t) e^{-itu} dt = \\
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(t-s) g(s) \right] e^{-itu} dt = \\
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} g(s) \int_{\mathbb{R}^n} f(t-s) \underbrace{e^{-itu}}_{e^{-i(t-s)u} \cdot e^{-isu}} ds = \\
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} g(s) e^{-isu} \int_{\mathbb{R}^n} f(\underbrace{t-s}_{z=t-s}) e^{-i(t-s)u} \underbrace{dt}_{dz=dt} ds = \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\left[(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(z) e^{-izu} dz \right]}_{\text{transformata Fouriera punktu } u} g(s) e^{-isu} ds = \\
&= \widehat{f}(u) \cdot \int_{\mathbb{R}^n} g(s) e^{-isu} ds \cdot \underbrace{(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \cdot (2\pi)^{\frac{n}{2}}}_{\text{sztucznie domnożone}} = \\
&= (2\pi)^{\frac{n}{2}} \widehat{f}(u) \widehat{g}(u)
\end{aligned}$$

$\square$

Teraz pokażemy wzór na transformację Fouriera iloczynu

Uwaga 3. *Stosunkowo łatwo podać przykład funkcji $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ takich, że ich iloczyn nie należy do $L^1(\mathbb{R}^n)$. Wobec tego następujące twierdzenie nie będzie bezpośrednio prawdziwe dla dwóch funkcji z $L^1(\mathbb{R}^n)$, podamy je dla elementów przestrzeni Schwartza $\mathfrak{S}$, gdyż mnożenie elementów z $\mathfrak{S}$ nie wyprowadza z $\mathfrak{S}$.*

Twierdzenie 11.
Gdy $\varphi, \psi \in \mathfrak{S}$ to $\varphi \cdot \psi \in \mathfrak{S}$ i zachodzi związek

$$(***) \quad \widehat{\varphi \cdot \psi}(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}(\widehat{\varphi} * \widehat{\psi})(x)$$

Dowód.
Pokażemy prawdziwość wzoru (***). Stosujemy równość (**) dla φ, ψ

$$\widehat{(\varphi * \psi)}(x) = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\widehat{\varphi}(x) \cdot \widehat{\psi}(x)$$

Wstawiamy odpowiednio $\widetilde{\varphi}$ i $\widetilde{\psi}$ w miejsce φ i ψ (na przestrzeni $\mathfrak{S}$ transformaty $\widetilde{\ }$ i $\widehat{\ }$ sa wzajemnie odwrotne).

$$\widehat{\widetilde{\varphi} * \widetilde{\psi}}(x) = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\widehat{\widetilde{\varphi}}(x)\widehat{\widetilde{\psi}}(x) = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\varphi(x)\psi(x)$$

Obłożymy teraz powyższa równość odwrotną transformatą$\widetilde{\ }$

$$\widetilde{\widehat{\widetilde{\varphi} * \widetilde{\psi}}}(x) = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\widetilde{\varphi \cdot \psi}(x)$$

[Komentarz przepisującego: tutaj powinien zmienić się argument z x na inny]

$$(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\widetilde{\varphi} * \widetilde{\psi}(x) = \widetilde{\varphi \cdot \psi}(x)$$

Ponieważ $\widehat{f}(x) = \tilde{f}(-x)$ dla $f \in \mathfrak{S}$ to

$$\widehat{\varphi \cdot \psi}(x) = \widetilde{\varphi \cdot \psi}(-x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\widetilde{\varphi} * \widetilde{\psi}(-x)$$

Teraz rozpiszemy splot

$$(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}\widetilde{\varphi}(-x-t)\widetilde{\psi}(t)\ dt$$
$$(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{\varphi}(x+t)\widehat{\psi}(-t)\ dt$$

Zamieniamy zmienną t na $-s$ (jakobian wyniesie 1)

$$(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{\varphi}(x-s)\widehat{\psi}(s)\ ds$$
$$(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\left(\widehat{\varphi} * \widehat{\psi}\right)(x)$$

Co należało wykazać. □

Uwaga 4.
Dla funkcji $\psi(x) = e^{-\frac{1}{2}|x|^2} \quad x \in \mathbb{R}^n$ mamy

$$\widehat{\psi}(t) = e^{-\frac{1}{2}|t|^2}$$

Stąd funkcja ψ jest ***niezmiennikiem transformaty Fouriera****.*

[Komentarz przepisującego: Na koniec liczyliśmy jeszcze całkę z tej funkcji, lecz obliczenia sa chaotyczne, a sam sens wyliczania tego w kontekście wykładu znikomy.]

Rozdział 9

Wykład 9 - 17.05.16

9.1 Równanie ciepła

Pokażemy zastosowanie transformaty Fouriera do rozwiązania równania ciepła w $\mathbb{R}^n$. Niech $u = u(t, x_1, \ldots, x_n)$. Równanie ciepła w $\mathbb{R}^n$ - problem Cauchy'ego mający postać

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \left(= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} \right) \text{ dla } x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0 \tag{9.1}$$

Z warunkiem początkowym

$$u(0, x) = \varphi_0(x) \text{ dla } x \in \mathbb{R}^n \tag{9.2}$$

To zadanie opisuje problem rozchodzenia sie ciepła w $\mathbb{R}^n$. Zmienna $x = (x_1, \ldots, x_n)$ opisuje położenie, a t jest czasem. Funkcja $u(t, x)$ opisuje temperature w chwili t w punkcie x. Znajdziemy rozwiązanie tego zadania używając transformaty Fouriera, ale nie będziemy bardzo rygorystycznie uzasadniali wszystkich przeliczeń. Będziemy poszukiwali takiego rozwiązania zadania (9.1)(9.2), które dla wszystkich czasów $t \geqslant 0$ zmienia się w przestrzeni $\mathfrak{S}$

$$\underset{t \geqslant 0}{\forall}\, u(t, \cdot) \in \mathfrak{S}$$

Zakładamy, że $\varphi \in \mathfrak{S}$. Obkładamy równanie (9.1) transformatą Fouriera względem zmiennej x.

$$(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} e^{-ix\xi}\, dx = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x_k^2} e^{-ix\xi}\, dx$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} u(t, x) e^{-ix\xi}\, dx}_{\text{Transformata Fouriera}} = \sum_{k=1}^{n} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x_k^2} e^{-ix\xi}\, dx$$

Teraz będziemy dwa razy całkowali przez części prawą stronę równania.

$$\frac{\partial}{\partial t} \widehat{u}(t, \xi) = \sum_{k=1}^{n} (-i\xi_k)^2 \underbrace{(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} u(t, x) e^{-ix\xi}\, dx}_{\text{Transformata Fouriera}}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \widehat{u}(t, \xi) = |\xi|^2 \widehat{u}(t, \xi) \tag{9.3}$$

Otrzymaliśmy równanie zwyczajne z parametrem. Teraz obłożymy (9.2) transformatą Fouriera po zmiennej x i w ten sposób otrzymamy warunek początkowy dla (9.3).

$$\widehat{u}(0, \xi) = \widehat{\varphi}(\xi) \tag{9.4}$$

Rozwiązując to równanie zwyczajne otrzymujemy dla (9.3),(9.4) rozwiązanie

$$\widehat{u}(t,\xi) = \widehat{\varphi}(\xi)e^{-|\xi|^2 t} \tag{9.5}$$

Jest to "ukryta" forma rozwiązania (9.1),(9.2). Postaramy się rozwiązać (9.5) za pomoca transformaty odwrotnej.

Uwaga 5.
Gdy $\varphi \in \mathfrak{S}$ to $\widehat{\varphi} \in \mathfrak{S}$.
Dla $t > 0$ czynnik $e^{-|\xi|^2 t}$ jest elementem z $\mathfrak{S}$. Ponieważ przestrzeń $\mathfrak{S}$ jest zamknięta na mnożenie elementów , więc prawa strona (9.5) należy do $\mathfrak{S}$, zatem lewa też.

Do (9.5) zastosujemy teraz odwrotną transformatę Fouriera$\tilde{}$(wszystko należy do $\mathfrak{S}$).

$$u(t,x) = \tilde{\widehat{u}}(t,x) = \widetilde{\widehat{\varphi}(\xi)e^{-|\xi|^2 t}}(x)$$

Zastosujemy teraz wzór na transformatę iloczynu.

$$\widetilde{\widehat{\varphi}(\xi)e^{-|\xi|^2 t}}(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \tilde{\widehat{\varphi}} * \widetilde{e^{-|\xi|^2 t}}(x)$$

Musimy teraz wyliczyć $\widetilde{e^{-|\xi|^2 t}}(x)$. W tym celu użyjemy własności

$$\widetilde{e^{-\frac{1}{2}|\xi|^2}}(x) = e^{-\frac{1}{2}|x|^2}(x)$$

Oczywiście niezbędne będzie odpowiednie przeskalowanie i zamiana zmiennych.

$$(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\xi|^2 t} e^{ix\xi}\, d\xi = \widetilde{e^{-|\xi|^2 t}}(x)$$

Obliczymy całkę

$$(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi - |\xi|^2 t}\, d\xi = \left| \begin{array}{l} \xi_k\sqrt{2t} = \eta_k \quad k = 1,\dots,n \\ d\xi_k = \frac{d\eta_k}{\sqrt{2t}} \end{array} \right| =$$

$$= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\frac{\eta}{\sqrt{2t}} - \frac{1}{2}|\eta|^2 t}\, \frac{d\eta}{(\sqrt{2t})^n} = \left| \begin{array}{l} -|\xi|t = -\sum_{k=1}^n \xi_k^2 \\ -\sum_{k=1}^n \frac{\eta_k^2}{2} = -\frac{1}{2}|\eta|^2 \end{array} \right| =$$

$$= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\frac{x}{\sqrt{2t}}\eta - \frac{1}{2}|\eta|^2 t}\, \frac{d\eta}{\sqrt{2t}^{\frac{n}{2}}} =$$

$$= (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\frac{x}{\sqrt{2t}}\eta - \frac{1}{2}|\eta|^2 t}\, d\eta =$$

$$= (2t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

Rozpiszmy dokładnie użytą w ostatniej linijce własność niezmiennika

$$(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi - \frac{1}{2}|\xi|^2}\, d\xi = e^{-\frac{1}{2}|x|^2}$$

Wstawmy $x = \frac{x}{\sqrt{2t}}$, stąd po prawej stronie mamy

$$e^{-\frac{1}{2}\left|\frac{x^2}{2t}\right|} = e^{-\frac{1}{4t}|x^2|}$$

Zatem w tym momencie możemy wrócić do naszej bazowej równości i wstawić to co wyliczyliśmy (oczywiście musimy zamienić zmienną).

$$u(t,x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \varphi * \widetilde{e^{-|\xi|^2 t}}(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (2t)^{-\frac{n}{2}} \varphi * e^{-\frac{1}{4t}|y|^2}$$

Rozpisując splot i zamieniając zmienne

$$(4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y) \cdot e^{-\frac{|y|^2}{4t}}\ dy$$

$$u(t,x) = \frac{1}{4\pi t}^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(z) \cdot e^{-\frac{|x-z|^2}{4t}}\ dz$$

Jest to tak zwany wzór Dirichleta, dla $n = 1$ przyjmuje on postać

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(z) \cdot e^{-\frac{(x-z)^2}{4t}}\ dz$$

Podany wzór występuje w rachunku prawdopodobieństwa przy obliczeniach związanych z rozkładem normalnym.

Rozdział 10

Wykład 10 - 31.05.16

10.1 Lemat Laxa-Milgrama

Lemat Laxa-Milgrama jest abstrakcyjnym twierdzeniem z analizy funkcjonalnej. Służy ono do dowodu istnienia słabych rozwiązań równan eliptycznych. Jest to pewne uogólnienie twierdzenia Riesza o reprezentacji funkcjonału.
Dla przestrzeni Banacha X przez X^* oznaczamy przestrzeń funkcjonałów liniowych i ciągłych (ograniczonych) na przestrzeni X. Przykłady:

- $(L^2(\Omega))^* = L^2(\Omega)$
- $(L^p(\Omega))^* = L^q(\Omega)$ dla $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \qquad 1 < p, q < \infty$
- $H^* = H$ dla H - przestrzeń Hilberta

Twierdzenie 12. *[Riesza o postaci funkcjonału liniowego i ciągłego na przestrzeni Hilberta]*
Dla dowolnego liniowego, ciągłego funkcjonału $x^* \in H^*$, gdzie H jest przestrzenią Hilberta, istnieje jedyny element $z \in H$ taki, że

$$x^*(x) = \langle x, z \rangle \quad \underset{x \in H}{\forall}$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ oznacza iloczyn skalarny.

Lemat 1. *[Laxa-Milgrama]*
Niech H będzie rzeczywistą przestrzenią Hilberta, a $B \colon H \times H \to \mathbb{R}$ formą dwuliniową na H. Zakładamy, że forma B jest ***ciągła*** *tzn.*

$$\underset{C}{\exists} \underset{x,y \in H}{\forall} |B(x,y)| \leqslant C||x|| \cdot ||y||$$

oraz ***koersywna***

$$\underset{c}{\exists} \underset{x \in H}{\forall} |B(x,x)| \geqslant c||x||^2.$$

Wtedy dowolny liniowy, ciągły funkcjonał $x^* \in H^*$ może być przedstawiony w postaci

$$\underset{x^* \in H^*}{\forall} \underset{z \in H}{\exists} \underset{x \in H}{\forall} x^*(x) = B(x,z)$$

Uwaga 6. *Zauważmy, że iloczyn skalarny $\langle \cdot, \cdot \rangle$ jest szczególnym przypadkiem formy dwuliniowej. Stąd Lemat Maxa-Milgrama $\Rightarrow$ Twierdzenie Riesza.*

Formą dwuliniową B na H nazywamy odwzorowanie $B\colon H \times H \to \mathbb{R}$ liniowe na każdy argument z osobna.

Dowód. Ustalmy dowolne $y \in H$, wtedy $|B(x,y)| \leqslant C||x|| \cdot ||y|| = C'||x||$, gdzie $C' = C||y||$ jest stała przy ustalonym y, a zmieniającym się x. Wyrażenie $B(x,y)$ jest liniowym funkcjonałem na przestrzeni H (bo mieliśmy formę dwuliniową). Wobec twierdzenia Riesza istnieje jedyny element oznaczony Ty taki, że

$$B(x,y) = \langle x, Ty\rangle \underset{x\in H}{\forall}$$

Powyższym wzorem wprowadziliśmy pewne przyporządkowanie elementowi y wartości Ty. Sprawdzimy własności odwzorowania $T\colon \underbrace{H}_{\ni y} \to \underbrace{H}_{\ni Ty}$. T jest liniowym odwzorowaniem H na H. Rzeczywiście

$$||Ty||^2 = \langle Ty, Ty\rangle = B(Ty, y) = |B(Ty,y)| \leqslant C||Ty|| \cdot ||y||$$

stąd $||Ty|| \leqslant C||y||$ co oznacza, że T jest odwzorowaniem ograniczonym. Z kolei, ponieważ

$$c||x||^2 \leqslant |B(x,x)| = |\langle x, Tx\rangle| \leqslant ||x|| \cdot ||Tx||$$

to $c||x|| \leqslant ||Tx||$ co oznacza, że odwzorowanie T może zerować się jedynie na elemencie zerowym. Jednak liniowe odwzorowanie zerujące sie tylko w 0 musi przeprowadzać H na liniową domkniętą podprzestrzeń $H_0 \subseteq H$. Pokażemy, że $H_0 = H$. Załóżmy nie wprost, że $H_0 \subset H$ (bez równości). Wtedy musi istnieć element $z \neq 0$ taki, że z jest ortogonalny do wszystkich elementów z H postaci Tx, gdzie $x \in H$ (twierdzenie o rzucie ortogonalnym). W szczególności

$$0 = |\langle z, Tz\rangle| = |B(z,z)| \geqslant c||z||^2 > 0$$

Sprzeczność (nie może istnieć taki element z, więc $H_0 = H$). Stąd $T\colon H \xrightarrow{\text{na}} H$. Niech x^* będzie liniowym i ciągłym funkcjonałem na H ($x^* \in H^*$). Wobec twierdzenia Riesza istnieje $z_0 \in H$ taki, że $x^*(x) = \langle x, z_0\rangle \ \forall_{x\in H}$. Skoro jednak $TH = H$ to istnieje $z \in H$, że $Tz = z_0$. Więc

$$x^*(x) = \langle x, z_0\rangle = \langle x, Tz\rangle = B(x,z)$$

Funkcjonał liniowy x^* został przedstawiony jak forma dwuliniowa z ustalonym drugim argumentem. Chcemy jeszcze pokazać, jedyność takiego przedstawienia. Gdyby istniały dwa rózne elementy $z, z' \in H$ takie, że

$$x^*(x) = B(x,z) \qquad x^*(x) = B(x,z') \underset{x\in H}{\forall}$$

$$B(x,z) = B(x,z') \underset{x\in H}{\forall}$$

Z dwuliniowości $B(x, z - z') = 0 \underset{x\in H}{\forall}$. Wtedy $x = z - z'$. Wówczas

$$c||z - z'||^2 \leqslant |B(z - z', z - z')| = 0$$

Stąd $z = z'$ - sprzeczność. To pokazanie jedyności z kończy dowód lematu Laxa-Milgrama, bowiem każdy liniowy i ciągły funkcjonał mozna zapisać w postaci

$$x^*(x) = B(x,z)$$

dla pewnego jednoznacznego elementu $z \in H$. $\square$

Rozdział 11

Wykład 11 - 07.06.16

11.1 Słabe pochodne

Na samym początku wprowadzimy definicję słabej pochodnej

Definicja 8. *Niech $Q \subset \mathbb{R}^n$ będzie obszarem (zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^n$). Zazwyczaj zakłada się, że ∂Q jest klasy C^1 (możemy odwzorować kawałek brzegu na odcinek klasy C^1, odwracalnie). Niech $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ będzie wielowskaźnikiem. Funkcję $f^\alpha \in L^1_{loc}(Q)$ nazywamy α-tą słabą pochodną funkcji $f \in L^1_{loc}(Q)$ jeżeli zachodzi warunek*

$$\int_Q f(x) \cdot \overline{D^\alpha g(x)} dx = (-1)^{|\alpha|} \int_Q f^\alpha(x) \cdot \overline{g(x)} dx \quad \underset{g \in C_0^{|\alpha|}(Q)}{\forall} \qquad (*)$$

Tutaj $C_0^{|\alpha|}(Q)$ oznacza przestrzeń funkcji o klasycznych pochodnych do rzędu $|\alpha|$ o zwartych nośnikach w Q. Z kolei

$$L^1_{loc} = \{f\colon Q \to \mathbb{C}\colon f \text{ jest } L - \text{mierzalna}) \;\wedge\; \int_K |f(x)| dx < \infty \text{ dla dowolnego zbioru zwartego } K \subset Q\}$$

[Komentarz przepisującego: L-mierzalna czyli mierzalna w sensie Lebesgue'a]
Przykładowo wielomiany są w L^1_{loc}, a nie są w L_1

Uwaga 7. *Istnieje najwyżej jedna uogólniona pochodna funkcji f. Jeżeli istniałyby dwie różne f_1^α, f_2^α to wobec gwiazdki $(*)$*

$$(-1)^{|\alpha|} \int_Q (f_1^\alpha(x) - f_2^\alpha(x)) \cdot \overline{g(x)} dx = 0 \quad \underset{g \in C_0^{|\alpha|}(Q)}{\forall}$$

Ta ostatnia równość pokazuje, że w dowolnym podzbiorze zwartym $D \subset Q$ funkcje $f_1^\alpha = f_2^\alpha$ prawie wszędzie. Wynika to z zasadniczego twierdzenia rachunku wariacyjnego.

Ważne jest, że możemy zmieniać funkcje próbne g w zbiorze gęstym w $L^2_{loc}(Q)$.

Lemat 2.
Przestrzeń $C_0^\infty(Q)$ jest gęsta w $L^1_{loc}(Q)$ $[L^2_{loc}(Q)]$

Lemat ten dowodzi się poprzez uśrednienia splotowe funkcji.

Własności słabych pochodnych

- W odróżnieniu od pochodnej klasycznej (punktowej) słaba pochodna jest zadawana od razu w całym Q.
- Istnieją "dziwne" przykłady słabych pochodnych, dla których istnieje druga słaba pochodna, a nie istnieją pierwsze. Taka możliwość wynika z postaci definicji ($*$). Wysoka pochodna w definicji nie odwołuje się do pochodnych niższych.

11.2 Przestrzeń Sobolewa

Omawiać będzie przestrzeń $H^k(Q)$ (przypadek Hilbertowski).
Komentarz przepisującego: Ogólnie przestrzenie Sobolewa oznacza się $W^{k,p}(Q)$]

Definicja 9. *Gdy $Q \subset \mathbb{R}^n$ będzie obszarem to dla $k \in \mathbb{N}$*

$H^k(Q) := \{f \in L^2(Q)\colon$ *istnieją wszystkie słabe pochodne f do rzędu $|\alpha| = k$ i należą one również do $L^2(Q)$*$\}$

W przestrzeni $H^k(Q)$ wprowadzamy normę wzorem

$$||f||_{H^k(Q)} = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant k} \int_Q |D^\alpha f(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \tag{11.1}$$

Ta norma bierze się z iloczynu skalarnego

$$\langle f, g \rangle = \sum_{|\alpha| \leqslant k} \int_Q D^\alpha f(x) \cdot \overline{D^\alpha g(x)} \, dx \tag{11.2}$$

Zatem przestrzeń $H^k(Q)$ jest przestrzenią Hilberta.

Uwaga 8.

$$L^2(Q) = H^0(Q) \supset H^1(Q) \supset H^2(Q) \supset \dots$$

Własności przestrzeni $H^k(Q)$

- Przestrzeń $H^k(Q)$ jest przestrzenią Banacha.

  Dowód.
  Niech $\{f_n\}$ będzie ciągiem Cauchy'ego w $H^k(Q)$

  $$||f_s - f_n||^2_{H^k(Q)} = \sum_{|\alpha| \leqslant k} \int_Q |D^\alpha f_s(x) - D^\alpha f_n(x)|^2 \, dx \xrightarrow{s,n \to \infty} 0 \tag{11.3}$$

  Wynika stąd, że

  $$\forall_{|\alpha| \leqslant k} \int_Q |D^\alpha f_s(x) - D^\alpha f_n(x)|^2 \, dx \xrightarrow{s,n \to \infty} 0 \tag{11.4}$$

  bo w (11.3) mamy sumę wyrazów nieujemnych, w szczególności biorąc w (11.4) zerowy wielowskaźnik α mamy

  $$\int_Q |f_s(x) - f_n(x)|^2 \, dx \xrightarrow{s,n \to \infty} 0$$

Ale to znaczy, że ciąg $\{f_n\}$ jest Cauchy'ego w $L^2(Q)$. Jest to przestrzeń zupełna, więc

$$f_n \to f \text{ w } L^2(Q)$$

Ustalając w (11.4) wielowskaźnik α albo pochodną D^α poczynimy podobną jak wyżej obserwację.

$$D^\alpha f_n \to f^\alpha \in L^2(Q)$$

dla α takiego, że $|\alpha| \leqslant k$. Pokażemy, że f^α jest równa słabej pochodnej $D^\alpha f$. Zauważmy, że każda z funkcji f_n ma α-tą słabą pochodną (dla $|\alpha| \leqslant k$) daną wzorem

$$\langle f_n, D^\alpha g\rangle_{L^2(Q)} = (-1)^{|\alpha|}\langle D^\alpha f_n, g\rangle_{L^2(Q)} \quad \underset{g\in C_0^{|\alpha|}(Q)}{\forall}$$

Z faktu, że $f_n \to f$ oraz $D^\alpha f_n \to f^\alpha$ funkcja graniczna f spełnia więc warunek

$$\langle f, D^\alpha g\rangle_{L^2(Q)} = (-1)^{|\alpha|}\langle f^\alpha, g\rangle_{L^2(Q)} \quad \underset{g\in C_0^{|\alpha|}(Q)}{\forall}$$

To oznacza, że f^α jest słaba α-tą pochodną funkcji f. $\square$

- Gdy $Q' \subset Q$ i funkcja $f \in H^k(Q)$ to $f \in H^k(Q')$
- Gdy funkcja $f \in H^k(Q)$ oraz funkcja $a \in C^k(Q)$ to $f \cdot a \in H^k(Q)$ i zachodzi wzór Leibnitza

$$D^\alpha(f\cdot a) = \sum_{|\beta|\leqslant|\alpha|} \begin{pmatrix} |\alpha| \\ |\beta| \end{pmatrix} D^\beta f \cdot D^{\alpha-\beta} a$$

gdzie $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

- Wzór na całkowanie przez części (Greena, Gaussa)
Gdy $f, g \in C^1(Q)$ oraz $\partial Q \in C^1$. Wtedy dla dowolnego $i \in 1, 2, \ldots, n$ zachodzi

$$\int_Q \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot g \, dx = \int_{\partial Q} f \cdot g \cdot \cos(n, x_i) \, ds - \int_Q f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i} \, dx$$

gdzie n jest normalną zewnętrzną do brzegu ∂Q, s jest elementem powierzchniowym, a f i g na Q należy traktować w sensie śladu.
Ten wzór przenosi sie na $f, g \in H^1(Q)$

Rozdział 12

Do egzaminu

- Twierdzenie Picarda, Peano + dowód jednego z nich
- Twierdzenie Cauchy'ego (bez dowodu)
- Jednoznaczne rozwiązanie analityczne + (dowód do wyboru - albo ten albo jednoznaczne rozwiązanie analityczne [dla osób zdających 10/13.06.16, pozostali mają oba])
- Transformacja Fouriera: definicje, 4 własności + dowód jednej z nich
- Splot funkcji z L^1 + dowód
- Równanie ciepła + wzór na rozwiązanie podstawowe (bez dowodu)
- Lemat Laxa-Milgrama
- Twierdzenie Riesza o przestrzeniach Hilberta
- Słabe pochodne - definicje
- Przestrzeń Sobolewa
- Zupełność przestrzeni Sobolewa (dowód do wyboru - albo ten albo jednoznaczne rozwiązanie analityczne [dla osób zdających 10/13.06.16, pozostali mają oba])

[Serdeczne podziękowania dla Pauliny Koniarek oraz Moniki Bojdoł za pomoc w rozwiązywaniu niejasności i podsyłaniu brakujących wykładów, a także za miłe chwile na wykładzie ☺]