# Równanie Burgersa

Równanie Burgersa jest jednym z fundamentalnych równań różniczkowych cząstkowych mechaniki płynów. Występuje w wielu dziedzinach matematyki i fizyki, np. w modelach dynamiki gazów i ruchu ulicznego. Nazwa równania upamiętnia holenderskiego fizyka Johannesa Martinusa Burgersa (1895-1981), który jako pierwszy badał to równanie. Równanie Burgersa uzyskuje się z klasycznego równania Naviera-Stokesa

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{u}(\mathbf{x},t) + \mathbf{u}(\mathbf{x},t)\cdot\nabla\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = -\nabla p(\mathbf{x},t) + \nu\Delta\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = 0, \tag{1}$$

w którym $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ oznacza prędkość płynu względem zmiennej przestrzennej $\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_n)$ w czasie $t$, $p$ oznacza ciśnienie, a $\nu$ jest współczynnikiem lepkości. Po opuszczeniu składnika odpowiedzialnego za ciśnienie oraz rozważeniu jedynie jednej zmiennej przestrzennej (plus oczywiście czasowa) otrzymujemy równanie postaci

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) + u(x,t)\frac{\partial}{\partial x}u(x,t) = \nu\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t). \tag{2}$$

Otrzymane równanie jest parabolicznym równaniem nieliniowym, lecz za pomocą transformacji Hopfa-Cole'a można sprowadzić je do postaci równania liniowego parabolicznego. W tym celu posłużymy się równaniem KPZ (Kardar-Parisi-Zhang) opisującym ruchy powierzchni i zjawisko erozji. Ma ono następującą postać

$$\frac{\partial}{\partial t}h(\mathbf{x},t) - \frac{1}{2}(\nabla h(\mathbf{x},t))^2 = \nu\frac{\partial}{\partial x^2}h(x,t). \tag{3}$$

Równanie (3) jest bardzo podobne do równania (2). W celu przejścia z równania KPZ do równania Burgersa wystarczy użyć podstawienia

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = -\nabla h(\mathbf{x},t) \tag{4}$$

Możemy w tym momencie przejść do transformacji Hopfa-Cole'a. Pozwoli ona na sprowadzenie równania Burgersa do liniowego równania rozchodzenia się ciepła. Przypomnijemy teraz jego podstawową formę:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{x},t) = \Delta\psi(\mathbf{x},t) & x\in\mathbb{R}^n,\ t\in\mathbb{R}_+ \\ \psi(x,0) = g(x) & g\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R} \end{cases} \tag{5}$$

Nas interesować będzie nieco zmodyfikowana postać

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{x},t) = \nu\Delta\psi(\mathbf{x},t) & x\in\mathbb{R}^n,\ t\in\mathbb{R}_+ \\ \psi(x,0) = g(x) & g\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R} \end{cases} \tag{6}$$

Weźmy

$$\psi(\mathbf{x},t) = e^{\frac{h(\mathbf{x},t)}{2\nu}} \tag{7}$$

Wtedy

$$\Delta\psi = \frac{1}{2\nu}\left[\Delta h + \frac{1}{2\nu}(\nabla h)^2\right] e^{\frac{h}{2\nu}} \tag{8}$$

prowadzi do postaci (po podstawieniu do wzoru (6) funkcji $\psi$ określonej wzorej (7) i jej laplasjanu określonego wzorem (8))

$$\frac{\partial}{\partial t}h - \frac{1}{2}(\nabla h)^2 = \nu\Delta h \tag{9}$$

a to jak widać jest forma równania odpowiadająca równaniu KPZ (3) dla pojedynczej zmiennej przestrzennej (po to je wprowadziliśmy). Na podstawie wzorów (4) i (7) możemy podać wzór na $\mathbf{u(x}, t)$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = -2\nu\nabla ln\psi(\mathbf{x}, t) \tag{10}$$

oraz analogicznie dla jednego wymiaru

$$u(x,t) = -2\nu\frac{\psi_x(x,t)}{\psi(x,t)} \tag{11}$$

Przejdźmy do podania rozwiązania ogólnego. Ustalmy warunki początkowe w chwili $t = 0$

$$u_0(x,0) = -2\nu\frac{\psi_x(x,0)}{\psi(x,0)}, \tag{12}$$

który po przekształceniu można przedstawić jako

$$\psi_0(x) = \psi(x,0) = e^{-\frac{1}{2\nu}\int_0^x u_0(\alpha)\ d\alpha} \tag{13}$$

Przypomnijmy, że podstawowym rozwiązaniem równania (6) w przypadku wielowymiarowym jest

$$E(x,t) = (4\nu\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{\frac{-|x|^2}{4\nu t}} \tag{14}$$

Ponadto rozwiązanie można podać używając pojęcia splotu dla $n = 1$ w następującej formie

$$\psi(x,t) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}} g(y)E(x-y,t)\ dy & t \geqslant 0 \\ g(x) & t = 0 \end{cases} \tag{15}$$

Analizując warunek początkowy (13) oraz wzór (15) możemy zapisać

$$\psi(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\nu t}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_0(y)e^{\frac{(x-y)^2}{4\nu t}}\ dy \tag{16}$$

Wprowadźmy funkcję pomocniczą $f(y,x,t)$ postaci

$$f(y,x,t) = \int_0^y u_0(\alpha)\ d\alpha + \frac{(x-y)^2}{2t} \tag{17}$$

Wtedy wstawiając do (16) funkcję $f$ daną wzorem (17) otrzymamy

$$\psi(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\nu t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{f}{2\nu}}\ dy \tag{18}$$

Policzmy pochodną względem $x$

$$\psi(x,t)_x = -\frac{1}{4\nu\sqrt{\pi\nu t}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x-y}{t}e^{-\frac{f}{2\nu}}\ dy \tag{19}$$

i podany wynik umieśćmy we wzorze (11)

$$u(x,t) = \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x-y}{t}e^{-\frac{f}{2\nu}}\ dy}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{f}{2\nu}}\ dy} \tag{20}$$