Stabilność rozwiązania zerowego w układach równań różniczkowych

Dany jest układ równań różniczkowych:

$$\begin{cases} x' = x^3 - y \\ y' = x + y^3 \end{cases}$$

Gdzie x i y są funkcja zmiennej $t \quad (x(t), y(t))$

Rozwiązania badać będziemy w pobliżu punktu $(0,0)$

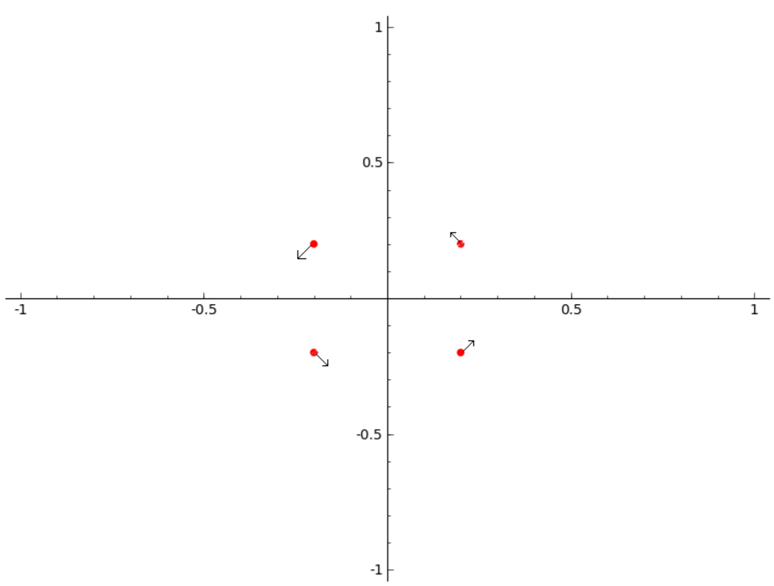
Aby określić dynamikę rozwiązań weźmy punkty blisko $(0,0)$ w każdej z ćwiartek układu współrzędnych

- $x = \frac{1}{5}\ y = \frac{1}{5} \qquad x' = \left(\frac{1}{5}\right)^3 - \frac{1}{5} = -\frac{24}{125} \qquad y' = \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{26}{125}$

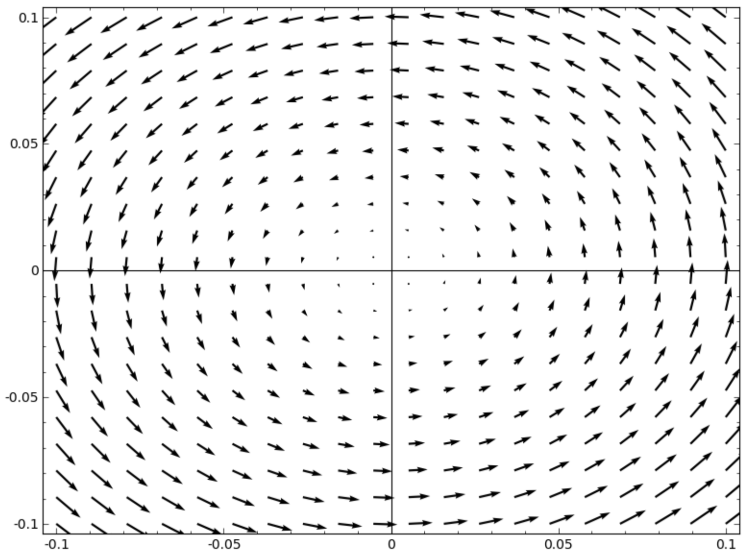
  Zatem widzimy, że na osi y wektor z punktu $(\frac{1}{5}, \frac{1}{5})$ ma zwrot $\leftarrow$, na osi z idzie w górę $\uparrow$, zatem wektor wypadkowy wygląda tak $\nwarrow$

  Analogicznie badamy punkty pozostałe:

- $x = -\frac{1}{5}\ y = \frac{1}{5} \qquad x' = -\frac{26}{125} \qquad y' = -\frac{24}{125} \qquad$ Wektor wypadkowy: $\swarrow$
- $x = -\frac{1}{5}\ y = -\frac{1}{5} \qquad x' = \frac{24}{125} \qquad y' = -\frac{26}{125} \qquad$ Wektor wypadkowy: $\searrow$
- $x = \frac{1}{5}\ y = -\frac{1}{5} \qquad x' = \frac{26}{125} \qquad y' = \frac{24}{125} \qquad$ Wektor wypadkowy: $\nearrow$



Dokładną dynamikę w okolicy zera ilustruje portret fazowy układu równań:



Widzimy, że rozwiązanie nie będzie stabilne, pozostaje nam teraz pokazać czemu.

Skorzystamy teraz z **twierdzenia Lapunowa o niestabilności:**

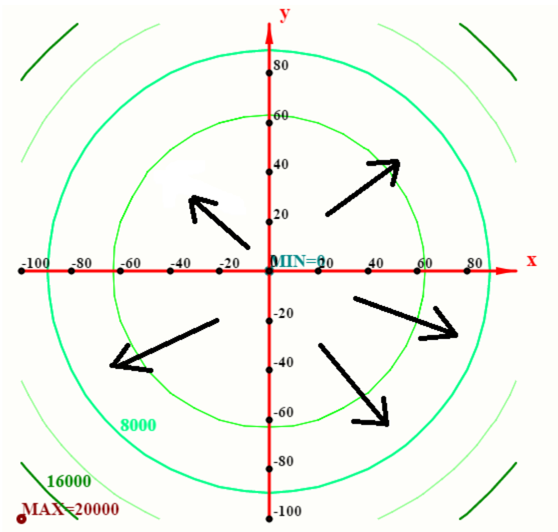
Niech dana będzie funkcja $V(x)$ klasy C^1 w pewnym zbiorze Q, będącym otoczeniem początku układu współrzędnych. Jeśli funkcja $V(x)$ spełnia warunki:

1. $V(0) = 0$
2. *dla każdego* $\varepsilon > 0$ *istnieje* x *taki, że* $|x| < \varepsilon$ *i* $V(x) > 0$
3. *grad* $V \cdot f > 0$ *dla* $x \in Q \setminus \{0\}$

to rozwiązanie zerowe równania autonomicznego $\dot{x} = f(x)$ *nie jest stabilne w sensie Lapunowa*

Zatem poszukuje takiej funkcji $V(x)$ spełniającej te założenia, by wykazać niestabilność

Ogólnie funkcja ta powinna mieć argumenty oddalające się w obszarze bliskim zera od niego:



.

Najbardziej naturalnym kandydatem jest funkcja $z(x, y) = x^2 + y^2$

Sprawdźmy czy spełnia ona założenia

1. $z(0, 0) = 0^2 + 0^2 = 0 + 0 = 0$ - Zgadza się $\checkmark$
2. Też jest spełnione, bo $\forall_{x,y}\ z(x, y) > 0$ $\checkmark$
3. $[2x, 2y] \cdot \begin{bmatrix} x^3 - y \\ x + y^3 \end{bmatrix} = 2x^4 - 2xy + 2xy + 2y^4 = 2x^4 + 2y^4$ $\checkmark$

   Widać od razu, że ten iloczyn jest większy od zera dla każdego x, y zatem funkcja $z(x, y)$ jest właściwym kandydatem na funkcję V co implikuje fakt, że rozwiązanie zerowe nie jest stabilne