Zadanie: Rozwinąć w szereg Laurenta w pierścieniu $P : 1 < |z-2| < 3$ funkcję

$$f(z) = \frac{2}{z^2-1}$$

Krok I

Z postaci pierścienia wyprowadzamy dwie nierówności, w których występuje składnik mniejszy od 1 (będzie nam to służyć do rozwijania)

$$\frac{1}{3} < \frac{1}{|z-2|} < 1$$

$$\frac{1}{3} < \frac{|z-2|}{3} < 1$$

Pierwsza powstaje z odwrotności nierówności pierścienia, a druga po podzieleniu postaci pierścienia przez 3.

Krok II

Rozkładamy naszą funkcję na ułamki proste (tak aby mieć funkcję w postaci sumy dwóch składników)

$$\frac{2}{z^2-1} = \frac{2}{(z-1)(z+1)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+1}$$

Po rozłożeniu uzyskujemy:

$$\frac{2}{z^2-1} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}$$

Krok III

Zacznijmy od rozwinięcia pierwszego składnika:

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z-2+2-1} = \frac{1}{(z-2)+1} = \frac{1}{(z-2)(1+\frac{1}{z-2})} = \frac{1}{z-2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{z-2}}$$

Znany jest wzór:

$$\frac{1}{1+w} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot w^n \text{ dla } |w| < 1 \quad (*)$$

W roli naszego w weźmiemy $\frac{1}{z-2}$, z pierwszej nierówności wyprowadzonej z postaci pierścienia widzimy, że $|w| = \left|\frac{1}{z-2}\right| = \frac{1}{|z-2|} < 1$, stąd spełnia on założenie.

Podstawiając i licząc dalej mamy:

$$\frac{1}{z-2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{1}{z-2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{1}{z-2}\right)^{n+1}$$

Krok IV

Rozwijamy drugi składnik:

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z+2-2+1} = \frac{1}{3+z-2} = \frac{1}{3(1+\frac{z-2}{3})} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{z-2}{3}}\right)$$

Korzystając z drugiej nierówności pierścienia i z tego samego wzoru (*) co w przypadku pierwszego składnika (tym razem dla $w = \frac{z-2}{3}$) uzyskujemy:

$$\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-2}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} (z-2)^n$$

Krok V

Dodajemy obie wyliczone części, zatem:

$$f(z) = \frac{2}{z^2-1} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \left(\frac{1}{z-2}\right)^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}(z-2)^n$$