Teoria Grafów - Sylabus - Najważniejsze Informacje

Autor: Ricko

Egzamin Magisterski 2017

Spis Treści

Rozdział 1

Sylabus - Opisy punktów

1.1 Podstawowe definicje i własności teorii grafów

Definicja 1.1.1. GRAFEM PROSTYM *G nazywamy parę (V, E), gdzie poprzez V oznaczamy dowolny (nawet niepusty) zbiór wierzchołków, a przez E oznaczamy zbiór krawędzi.*

Definicja 1.1.2. KRAWĘDZIĄ *w grafie $G = (V, E)$ nazywamy parę $\{x, y\}$, gdzie $x, y \in G$. Mówimy wtedy, że wierzchołki x i y* SĄSIADUJĄ *ze sobą lub też gdy przyjmiemy oznaczenie $e = \{x, y\}$ możemy mówić, że wierzchołki x i y są* INCYDENTNE *z krawędzią e*

Oznaczenie 1.1.1. *Zbiór wierzchołków konkretnego grafu G oznaczać będziemy poprzez $V(G)$, a zbiór krawędzi poprzez $E(G)$*

Oznaczenie 1.1.2. *Stosować będziemy różne tożsame oznaczenia na zawieranie się krawędzi w zbiorze wszystkich krawędzi: $\{x, y\} \in E(G)$, $xy \in G$, $xy \in E$. Oznaczają one to samo i mogą być stosowane zamiennie. Podobnie na różne sposoby oznaczać będziemy należenie wierzchołka x do grafu G:*
$x \in V(G)$, $x \in G$.

Umowa 1.1.1. *Od tej pory wszystkie rozważane grafy będą grafami prostymi.*

Definicja 1.1.3. *Niech X będzie dowolnym zbiorem, wtedy*

$$[X]^k = \{S \subseteq X : |S| = k\}$$

czyli opisując słowami $[X]^k$ jest rodziną wszystkich k-elementowych podzbiorów zbioru X.

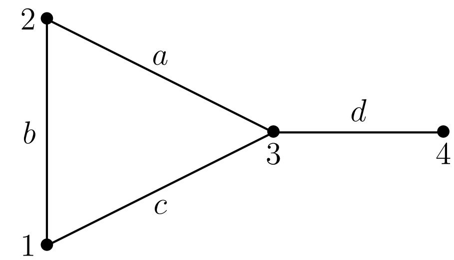
Uwaga 1.1.1. *Stosując powyższą definicję możemy zauważyć, że $E \subseteq [V]^2$.*

Uwaga 1.1.2. *Mówimy, że dwie krawędzie e i f sąsiadują ze sobą, jeśli $|e \cap f| = 1$*

Definicja 1.1.4. RZĘDEM *grafu nazywamy liczbę $|G| = card\ V$.*

Definicja 1.1.5. ROZMIAREM *grafu nazywamy liczbę $||G|| = card\ E$.*

Przykład 1.1.1. *Graf prosty G, w którym $V = \{1, 2, 3, 4\}$ oraz $E = \{a, b, c, d\}$*



Przykładowo krawędź b możemy zapisać jako $b = \{1, 2\}$ i mówimy wtedy, że wierzchołki 1 i 2 są incydentne z krawędzią b. Ponadto $|G| = 4$ oraz $||G|| = 4$.

Definicja 1.1.6. *Zbiór $S \subseteq V(G)$ nazywamy* NIEZALEŻNYM *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\underset{x,y \in S}{\forall}\ xy \notin G$

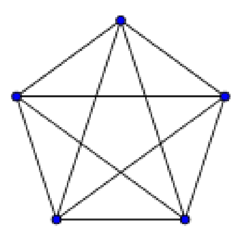
Definicja 1.1.7. *Zbiór $S \subseteq V(G)$ nazywamy* KLIKĄ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\underset{x,y \in S}{\forall}\ xy \in G$

Przykład 1.1.2. *Analizując graf z przykładu pierwszego możemy zauważyć, że zbiór $S_1 = \{2, 4\}$ jest zbiorem niezależnym, a zbiór $S_2 = \{1, 2, 3\}$ jest kliką.*

Uwaga 1.1.3. *Jeżeli $V(G)$ jest kliką to graf G nazywamy grafem* PEŁNYM

Oznaczenie 1.1.3. *Graf pełny rzędu n oznaczamy K_n*

Przykład 1.1.3. *Graf pełny K_5*

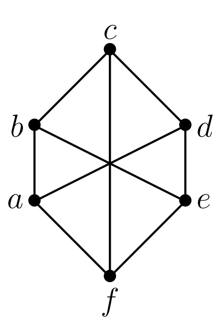


Definicja 1.1.8. *Mówimy, że $G = (V, E)$ i $G' = (V', E')$ są* IZOMORFICZNE *(oznaczamy $G \cong G'$) jeżeli istnieje bijekcja $\varphi \colon V \to V'$ taka, że*

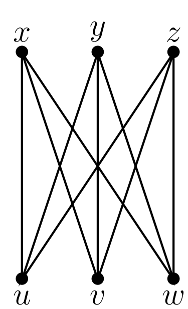
$$\underset{x,y \in V}{\forall}\ xy \in E \Leftrightarrow \varphi(x)\varphi(y) \in E'$$

Umowa 1.1.2. *Grafy izomorficzne będziemy utożsamiać ze sobą.*

Przykład 1.1.4. *Grafy izomorficzne G i G' wraz z opisanymi wartościami izomorfizmu $\varphi \colon G \to G'$*



G

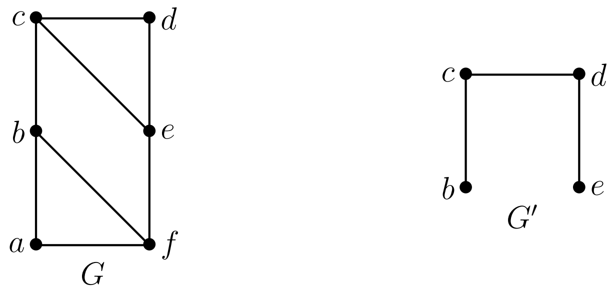


G'

$\varphi(a) = x$ $\quad\varphi(d) = v$
$\varphi(b) = u$ $\quad\varphi(e) = z$
$\varphi(c) = y$ $\quad\varphi(f) = w$

Definicja 1.1.9. *Mówimy, że $G' \subseteq G$ jest* PODGRAFEM *grafu G jeśli $V(G') \subseteq V(G)$ oraz $E(G') \subseteq E(G)$.*

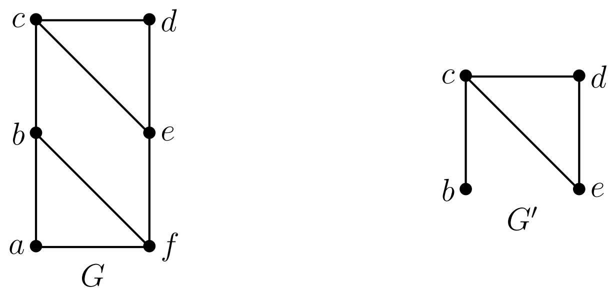
Przykład 1.1.5. *Graf G i jego podgraf G'*



Definicja 1.1.10. *Mówimy, że $G' \subseteq G$ jest grafem* INDUKOWANYM *jeżeli*

$$E(G') = \{xy \in E(G) \colon x, y \in V(G')\}$$

Przykład 1.1.6. *Graf G i graf indukowany z G oznaczony jako G'*

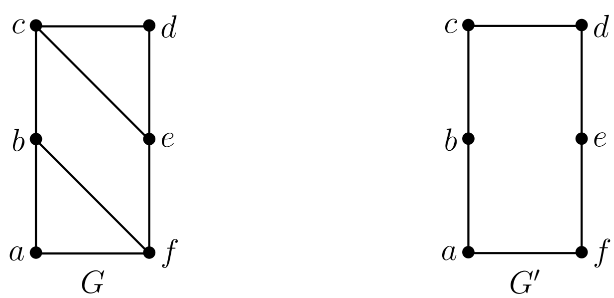


Definicja 1.1.11. *Jeżeli $U \subseteq V(G)$, to $G[U] = (U, \tilde{E})$, gdzie $\tilde{E} = \{xy \in E(G) \colon x, y \in U\}$.*

Definicja 1.1.12. *Mówimy, że $G' \subseteq G$ jest* PODGRAFEM ROZPINAJĄCYM *graf G jeśli*

$$G[G'] = G \quad (V(G') = V(G))$$

Przykład 1.1.7. *Graf G i podgraf rozpinający G'*

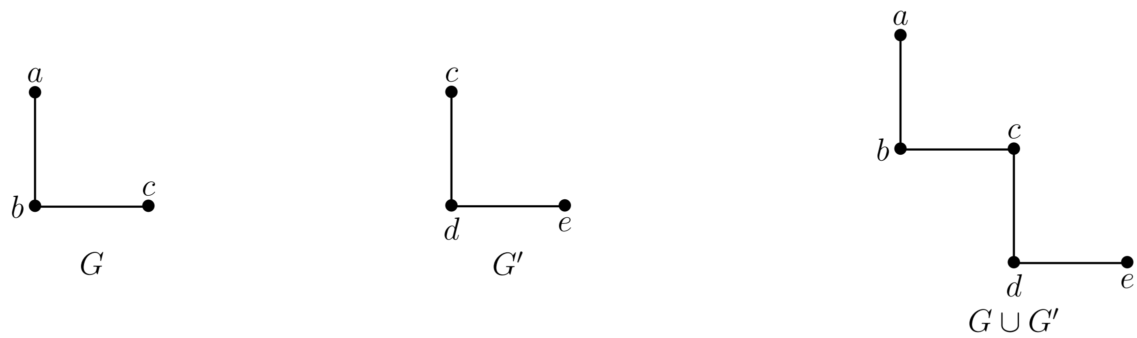


Definicja 1.1.13. *Jeżeli $G = (V, E)$ oraz $G' = (V', E')$, to*

$$G \cup G' = (V \cup V', E \cup E')$$

$$G \cap G' = (V \cup V', E \cap E')$$

Przykład 1.1.8. *Suma dwóch grafów G i G'*



Uwaga 1.1.4. *Jeśli* $V(G \cap G') = \emptyset$, *to mówimy, że grafy* G *i* G' *są* ROZŁĄCZNE.

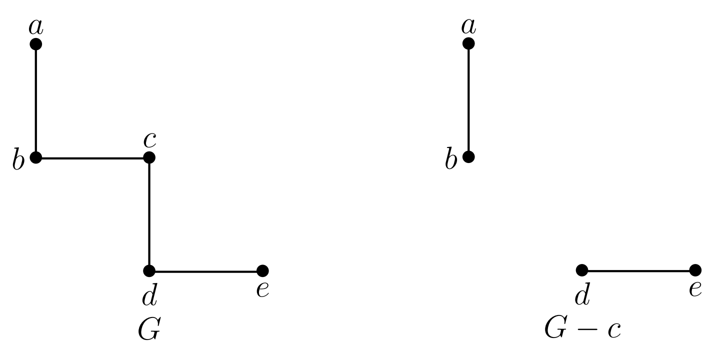
Definicja 1.1.14. *Jeśli* $U \subset V(G)$, *to* $G - U = G[V \setminus U]$.

Definicja 1.1.15. *Jeśli* $x \in V(G)$, *to* $G - x = G - \{x\}$.

Definicja 1.1.16. *Jeśli* $F \subset E$, *to* $G - F = (V, E \setminus F)$

Definicja 1.1.17. *Jeśli* $e \in E$, *to* $G - e = G - \{e\}$.

Przykład 1.1.9. *Usuwanie wierzchołka* c *z grafu* G.



Jak widać grafy $G[\{a, b\}]$ *i* $G[\{d, e\}]$ *są ze sobą rozłączne.*

Przykład 1.1.10. *W przykładzie 1.1.7 graf* $G' = G - \{ce, bf\}$

Uwaga 1.1.5. *Jeśli* $F \subset [V]^2$, *to* $G + F = (V, E \cup F)$.

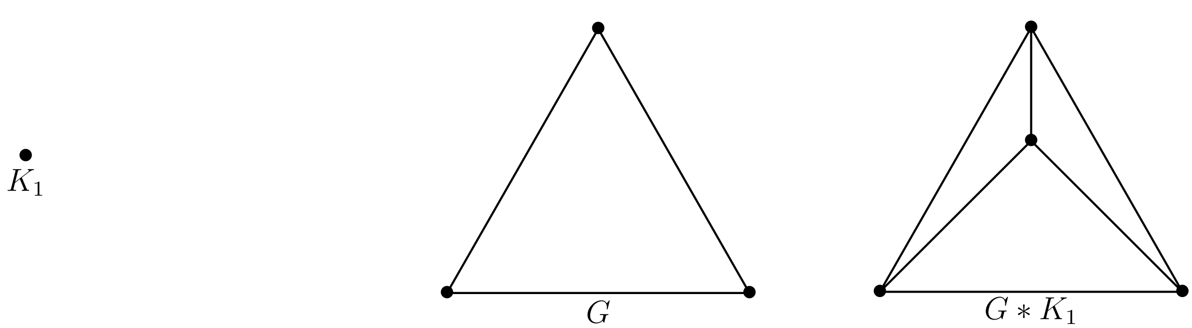
Definicja 1.1.18. *Jeśli grafy* G *i* G' *są rozłączne , to* ZESPOLENIEM *tych grafów nazywamy graf*

$$G * G' = G \cup G' + F,$$

gdzie

$$F = \{xy \in [V(G) \cup V(G')]^2 \colon x \in V(G),\ y \in V(G')\}$$

Przykład 1.1.11. *Zespolenie grafów* G *i* K_1



Definicja 1.1.19. DOPEŁNIENIEM *grafu* G *nazywamy graf* $\overline{G} = (V(G), [V(G)]^2 \setminus E(G))$.

Przykład 1.1.12. *Graf* G *i jego dopełnienie* $\overline{G}$.

G $\overline{G}$

Definicja 1.1.20. SĄSIEDZTWEM *wierzchołka* $v \in V(G)$ *nazywamy zbiór* $N(v) = \{u \in G\colon uv \in E(G)\}$

Definicja 1.1.21. STOPNIEM *wierzchołka* $v \in V(G)$ *nazywamy liczbę* $d(v) = |N(v)|$.

Definicja 1.1.22.

$$\delta(G) = \min_{v \in G} d(v)$$

$$\Delta(G) = \max_{v \in G} d(v)$$

$$d(G) = \frac{1}{|V|} \sum_{v \in G} d(v)$$

Liczbę $\delta(G)$ *nazywamy* MINIMALNYM STOPNIEM WIERZCHOŁKA, *liczbę* $\Delta(G)$ MAKSYMALNYM STOPNIEM WIERZCHOŁKA, *a liczbę* $d(G)$ *nazywamy* ŚREDNIM STOPNIEM WIERZCHOŁKA.

Uwaga 1.1.6.

$$\delta(G) \leqslant d(G) \leqslant \Delta(G)$$

Przykład 1.1.13. *Analizując graf* G *z przykładu 1.1.9 zauważmy, że na przykład* $N(c) = \{b, d\}$ *oraz* $d(c) = 2$. *Ponadto* $\delta(G) = 1,\ \Delta(G) = 2$ *oraz* $d(G) = \frac{8}{5}$.

Lemat 1.1.1 (O uściskach dłoni)**.** *Suma stopni wierzchołków w grafie jest liczbą parzystą.*

Definicja 1.1.23. ŚCIEŻKĄ *nazywamy każdy graf postaci*

$$P = (\{x_0, x_1, \ldots, x_k\}, \{x_0x_1, x_1x_2, \ldots, x_{k-1}x_k\})$$

gdzie $x_i \neq x_j$ *dla* $0 \leqslant i < j \leqslant k$.

Definicja 1.1.24. DŁUGOŚCIĄ ŚCIEŻKI P *nazywamy liczbę jej krawędzi. Ścieżkę długości* k *nazywamy* k-ŚCIEŻKĄ *i stosujemy oznaczenie* P_k

Przykład 1.1.14. *Graf* G *z przykładu 1.1.9 jest ścieżką długości* 4, *możemy zatem zapisać równoważnie*

$$G = P_4 = (\{a, b, c, d, e\}, \{ab, bc, cd, de\})$$

Oznaczenie 1.1.4. *Ścieżkę możemy jednoznacznie zdefiniować przy pomocy ciągu* $x_0x_1 \ldots x_k$, *ponadto wprowadzamy oznaczenie*

$$Px_i = x_0x_1 \ldots x_i$$

oraz

$$x_iP = x_i \ldots x_k$$

a także

$$x_iPx_j = x_i \ldots x_j \qquad dla\ i < j$$

Oznaczenie 1.1.5. *Jeśli suma ścieżek też jest ścieżką, to zamiast pisać* $Px \cup xQy \cup yR$ *będziemy używać oznaczenia* $PxQyR$.

Przykład 1.1.15. *Analizując grafy z przykładu 1.1.8 jeśli* $P = G \cup G' = abcde$, *to* $Pc = G$ *oraz* $cP = G'$.

Definicja 1.1.25. *Jeśli* $P = x_0x_1 \dots x_k$, *to wierzchołki* x_0, x_k *nazywamy* KOŃCAMI *ścieżki* P, *a wierzchołki* $x_1, \dots, x_{k-1}$ *nazywamy* WIERZCHOŁKAMI WEWNĘTRZNYMI *ścieżki* P.

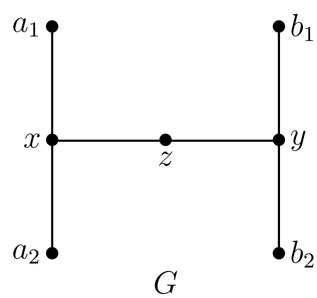
Oznaczenie 1.1.6. *Ścieżkę oznaczoną* $x_0 \dots x_k$ *nazywać możemy także* $x_0 - x_k$-ŚCIEŻKĄ.

Przykład 1.1.16. *Kolejny raz wracając do przykładu 1.1.9 stwierdzić możemy, że* G *jest* $a - e$-*ścieżką, w której* a *i* e *są końcami ścieżki, a wierzchołki* b, c, d *są wierzchołkami wewnętrznymi.*

Definicja 1.1.26. *Załóżmy, że* $A, B \subset V(G)$. $x - y$-*ścieżkę oznaczoną jako* P, *gdzie* $x, y \in V(G)$, *nazywamy* $A - B$-ŚCIEŻKĄ *jeśli*

$$P \cap A = \{x\} \qquad \text{oraz} \qquad P \cap B = \{y\}$$

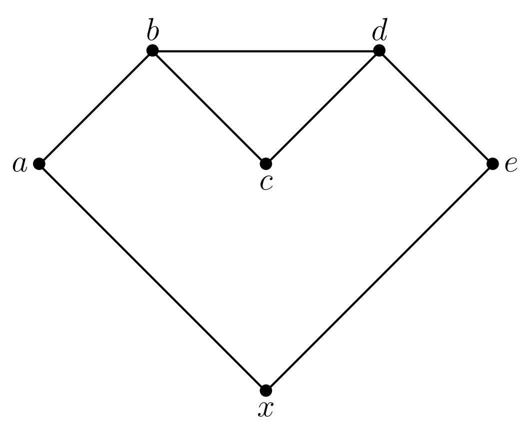
Przykład 1.1.17. *Niech* $A = \{a_1, a_2, x\}$ *oraz* $B = \{b_1, b_2, y\}$, *przykład* $x-y$-*ścieżki będącej* $A-B$-*ścieżką*



Definicja 1.1.27. *Jeśli* H *jest grafem, to* $x-y$-*ścieżkę nazywamy* H-*ścieżką, jeśli wspólnymi wierzchołkami tych grafów są końce ścieżki* P, *ponadto*

$$H \cap P = (\{x, y\}, \emptyset)$$

Przykład 1.1.18. *Niech* $H = (\{a, b, c, d, e\}, \{ab, bc, bd, cd, de\})$ *oraz* $P = axe$. *Wtedy* P *jest* H-*ścieżką.*



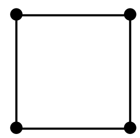
Definicja 1.1.28. CYKLEM *nazywamy każdy graf postaci*

$$x_0x_1 \dots x_{k-1} + x_0x_{k-1} \qquad \text{dla } k \geqslant 3$$

Definicja 1.1.29. DŁUGOŚCIĄ CYKLU *nazywamy liczbę krawędzi tego cyklu.*

Oznaczenie 1.1.7. *Cykl długości k nazywamy k-cyklem i oznaczamy symbolem C_k*

Przykład 1.1.19. *Cykl C_4*



C_4

Definicja 1.1.30. *Liczbę $g(G)$ nazywamy* TALIĄ *grafu G i oznaczamy przez nią długość najkrótszego cyklu zawartego w grafie G.*

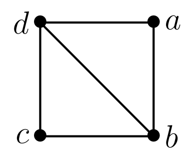
Definicja 1.1.31. *Liczbę $o(G)$ nazywamy* OBWODEM *grafu G i oznaczamy przez nią długość najdłuższego cyklu zawartego w grafie G.*

Przykład 1.1.20. *W grafie z z przykładu 1.1.18 $g(G) = 3$ oraz $o(G) = 6$.*

Uwaga 1.1.7. *Jeśli graf G nie zawiera żadnego cyklu, to $g(G) = \infty$ oraz $o(G) = 0$.*

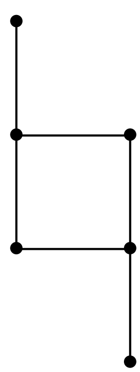
Definicja 1.1.32. CIĘCIWĄ *nazywamy krawędź, która łączy wierzchołki $x, y \in C_k$, ale $xy \notin C_k$.*

Przykład 1.1.21. *Krawędź bd jest przykładem cięciwy dla cyklu abcda*



Definicja 1.1.33. *Cykl $C \subset G$ nazywamy* CYKLEM INDUKOWANYM *jeśli żadna cięciwa tego cyklu nie należy do grafu G*

Przykład 1.1.22. *Przykład grafu z cyklem indukowanym*



Definicja 1.1.34. ODLEGŁOŚCIĄ WIERZCHOŁKÓW *x i y w grafie G nazywamy długość najkrótszej $x - y$-ścieżki zawartej w G i oznaczamy $d_G(x, y)$.*

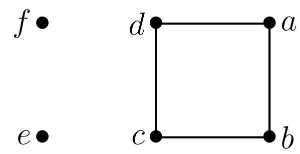
Definicja 1.1.35. ŚREDNICĄ *grafu G nazywamy liczbę $diam(G) = \max_{v \in G} \max_{u \in G} d(u, v)$.*

Definicja 1.1.36. *Jeśli każde dwa wierzchołki grafu G można połączyć ścieżką, to graf G nazywamy* GRAFEM SPÓJNYM.

Przykład 1.1.23. *Analizując graf z przykładu 1.1.21 zauważamy, że np. $d(b,d) = 1$, ale $d(a,c) = 2$. Ponadto $diam(G) = 2$ oraz graf G jest spójny.*

Definicja 1.1.37. *Maksymalny podgraf spójny grafu G nazywamy* SKŁADOWĄ.

Przykład 1.1.24. *Podgrafy $(\{a,b,c,d\},\{ab,bc,cd,da\}),(\{e\},\emptyset)$ oraz $(\{f\},\emptyset)$ są składowymi grafu G.*



G

Lemat 1.1.2. *Jeśli G jest grafem, który zawiera cykl, to*

$$g(G) \leqslant 2\ diam(G) + 1$$

Definicja 1.1.38. *Graf oznaczony jako $G\square G'$ nazywamy* PRODUKTEM KARTEZJAŃSKIM *grafów G i G' jeśli $v(G\square G') = v(G) \times v(G')$ oraz*

$$uu' \sim vv' \Leftrightarrow (u = v \wedge u' \sim_{G'} v')\ lub\ (u \sim_G v \wedge u' = v')$$

Przez $a \sim_G b$ rozumiemy oznaczenie krawędzi między wierzchołkami a i b w grafie G.

Definicja 1.1.39. *Graf oznaczony jako $G \times G'$ nazywamy* ILOCZYNEM TENSOROWYM *grafów G i G' jeśli $v(G \times G') = v(G) \times v(G')$ oraz*

$$uu' \sim vv' \Leftrightarrow u' \sim_{G'} v'\ i\ u \sim_G v$$

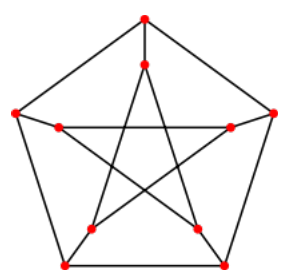
Definicja 1.1.40.

$$G \boxtimes G' = G\square G' \cup G \times G'$$

Definicja 1.1.41. PROMIENIEM *grafu G nazywamy liczbę $rad(G) = \min_{v\in G} \max_{u\in G}\ d(u,v)$.*

Definicja 1.1.42. *Graf G nazywamy grafem* REGULARNYM *jeśli wszystkie wierzchołki mają ten sam stopień.*

Definicja 1.1.43. GRAFEM PETERSENA *nazywamy graf następującej postaci*



Definicja 1.1.44. *Rodzinę zbiorów $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ taką, że $\underset{1\leqslant i\leqslant n}{\forall} A_i \neq \emptyset$ oraz $\underset{1\leqslant i,j\leqslant n}{\forall} A_i \cap A_j = \emptyset$ oraz $\bigcup \mathcal{A} = A$ nazywamy* PODZIAŁEM ZBIORU A.

Definicja 1.1.45. *Graf G nazywamy grafem k-DZIELNYM, jeśli istnieje k-elementowy podział zbioru $V(G)$ składający się ze zbiorów niezależnych. Graf k-dzielny o maksymalnej liczbie wierzchołków nazywamy grafem* PEŁNYM k-DZIELNYM.

Oznaczenie 1.1.8. *Graf pełny dwudzielny $G = (V_1 \cup V_2, E)$, gdzie V_1 i V_2 są niezależne oraz $|V_1| = n$, $|V_2| = m$ oznaczamy $K_{n,m}$.*

Przykład 1.1.25. *Graf G' z przykładu 1.1.4 jest grafem dwudzielnym $K_{3,3}$*

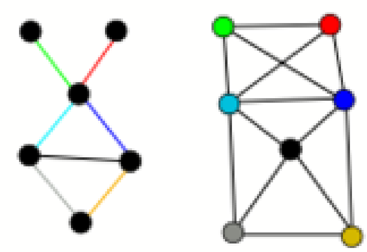
Definicja 1.1.46. *Graf rzędu n rozmiaru 0 nazywamy grafem pustym i oznaczamy N_n.*

Przykład 1.1.26. *Korzystając z przykładu 1.1.24 możemy zauważyć, że graf $G[e, f]$ jest przykładem grafu N_2.*

Uwaga 1.1.8. $K_{n,m} = N_m * N_m$

Definicja 1.1.47. *Jeśli G jest grafem prostym, to* GRAFEM KRAWĘDZIOWYM *tego grafu nazywamy $L(G) = (E(G), F)$, gdzie $ef \in F$ wtedy i tylko wtedy, gdy e i f sąsiadują w grafie G.*

Przykład 1.1.27. *Przykład grafu krawędziowego (dla ułatwienia dodano kolorowanie odpowiednich krawędzi w grafie wejściowym i wierzchołków w grafie krawędziowym)*



Twierdzenie 1.1.1. *Każdy cykl w grafie dwudzielnym ma długość parzystą.*

Definicja 1.1.48. DROGĄ *w grafie G nazywamy taki ciąg wierzchołków, w którym każde 2 wierzchołki występujące bezpośrednio po sobie są sąsiadami.*

Przykład 1.1.28. *Jedną z dróg w przykładzie 1.1.18 jest edcbdex (pamiętajmy, że każda ścieżka jest drogą, ale nie każda droga jest ścieżką).*

1.2 Spójność

Definicja 1.2.1. *Mówimy, że graf G jest spójny, jeśli $\underset{u,v \in V(G)}{\forall}$ istnieje $u - v$-ścieżka.*

Przykład 1.2.1. *Graf G z przykładu 1.1.9 jest grafem spójnym, a graf $G - c$ z tego samego przykładu grafem spójnym nie jest.*

Uwaga 1.2.1. *Graf G jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy $\underset{u,v \in V(G)}{\forall}$ istnieje droga, której pierwszym wierzchołkiem jest u, a ostatnim v.*

Twierdzenie 1.2.1. *Jeśli graf G jest grafem spójnym rzędu n, to jego wierzchołki możemy tak ponumerować, że* $\underset{1\leqslant i\leqslant n}{\forall}\ G_i = G[v_1, \ldots, v_i]$ *jest grafem spójnym.*

Twierdzenie 1.2.2. *Jeśli G jest grafem rzędu n rozmiaru m, ma k składowych, to*

$$n - k \leqslant m \leqslant \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}$$

Definicja 1.2.2. ZBIOREM ROZSPAJAJĄCYM *grafu spójnego nazywamy zbiór krawędzi F grafu G taki, że graf $G - F$ jest niespójny. Minimalny zbiór rozspajający nazywamy* ROZCIĘCIEM, *a jeśli rozcięcie jest 1-elementowe to nazywamy je* MOSTEM.

Przykład 1.2.2. *Przykładowym zbiorem rozspajającym jest zbiór $F = \{ab, de\}$ z przykładu 1.1.18, a przykładem mostu jest krawędź xz z przykładu 1.1.17.*

Definicja 1.2.3. *Liczbę $\lambda(G)$ nazywamy* SPÓJNOŚCIĄ KRAWĘDZIOWĄ *i oznaczamy przez nią moc najmniej licznego rozcięcia*

Przykład 1.2.3. *Dla cyklu C_4 z przykładu 1.1.19 mamy $\lambda(C_4) = 2$.*

Definicja 1.2.4. ZBIOREM ROZDZIELAJĄCYM *grafu spójnego nazywamy zbiór wierzchołków $U \subset V(G)$ taki, że $G - U$ nie jest spójny (lub $G - U = K_1$). Jeśli istnieje 1-elementowy zbiór rozdzielający, to jedyny jego element nazywamy* WIERZCHOŁKIEM ROZDZIELAJĄCYM

Definicja 1.2.5. *Liczbę $\kappa(G)$ nazywamy* SPÓJNOŚCIĄ WIERZCHOŁKOWĄ *i oznaczamy przez nią minimalną liczbę wierzchołków jaką należy usunąć, aby rozspoić graf.*

Przykład 1.2.4. *Dla grafu z przykładu 1.1.17 wierzchołkiem rozdzielającym jest wierzchołek z, a zatem $\kappa(G) = 1$.*

Twierdzenie 1.2.3. *Jeżeli graf G jest spójny, to*

$$\delta(G) \geqslant \lambda(G) \geqslant \kappa(G)$$

Definicja 1.2.6. *Graf G nazywamy k-spójnym jeśli $\kappa(G) \geqslant k$*

Uwaga 1.2.2.

a) Graf jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy jest 1-spójny

b) Jeśli G jest k-spójny ($k > 1$) to jest również $(k-1)$-spójny

Lemat 1.2.1. *Jeśli graf G jest spójny, to krawędź $e \in G$ jest mostem wtedy i tylko wtedy, gdy nie należy ona do żadnego cyklu.*

Twierdzenie 1.2.4. *Graf G jest grafem 2-spójnym wtedy i tylko wtedy, gdy można go otrzymać z cyklu poprzez dodawanie H-ścieżek do wcześniej utworzonych grafów H*

Definicja 1.2.7. *Niech $G = (V, E)$ będzie grafem spójnym oraz niech $X \subset V \cup E$, a $A, B \subseteq V$ będa zbiorami niekoniecznie rozłącznymi. Mówimy, że* ZBIÓR X ROZDZIELA *jeśli dla każdej $A - B$-ścieżki należy pewien element zbioru X.*

Przykład 1.2.5. *W przykładzie 1.1.17 zbiór* $\{z, xz, zy\}$ *oddziela zbiory* $A = \{a_1, x, a_2\}$ *i* $B = \{b_1, y, b_2\}$.

Twierdzenie 1.2.5. *[**Mengera**]*
Minimalna liczba wierzchołków oddzielających zbiory A *i* B*, gdzie* $A, B \subset V$ *w grafie* $G = (V, E)$ *jest równa maksymalnej liczbie rozłącznych* $A - B$*-ścieżek.*

Wniosek 1.2.1. *Jeśli w grafie spójnym* $a, b \in V(G)$ *oraz* $ab \notin E(G)$ *to minimalna liczba wierzchołków rozdzielających wierzchołek* a *od* b *oraz różnych od* a *oraz* b *jest równa maksymalnej liczbie niezależnych* $a - b$*-ścieżek.*

Twierdzenie 1.2.6. *[**Uogólnione Twierdzenie Mengera**]*
Graf G *jest* k*-spójny wtedy i tylko wtedy, gdy każde jego dwa wierzchołki są połączone* k*-niezależnymi ścieżkami.*

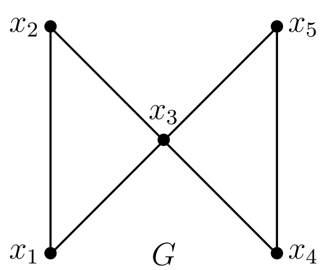
1.3 Grafy Eulera

Definicja 1.3.1. DROGĄ ZAMKNIĘTĄ *nazywamy drogę, w której pierwszy i ostatni wierzchołek sa sobie równe.*

Definicja 1.3.2. CYKLEM EULERA *(w grafie spójnym* G*) nazywamy drogę zamkniętą, która zawiera wszystkie krawędzie danego grafu i każda krawędź występuje tam dokładnie raz.*

Definicja 1.3.3. GRAFEM EULERA *nazywamy graf, który zawiera cykl Eulera.*

Przykład 1.3.1. *Przykładem drogi zamkniętej oraz cyklu Eulera jest droga* $x_1x_2x_3x_4x_5x_3x_1$ *z poniższego grafu* G.



Definicja 1.3.4. ŚCIEŻKĄ EULERA *nazywamy drogę, która zawiera wszystkie krawędzie danego grafu i każda krawędź występuje tam dokładnie raz.*

Przykład 1.3.2. *Przykładem ścieżki Eulera jest ścieżka dabc z przykładu 1.1.1.*

Definicja 1.3.5. *Graf nazywamy* PÓLEULEROWSKIM*, jeśli zawiera on ścieżkę Eulera.*

Lemat 1.3.1. *Jeśli* $\delta(G) \geqslant 2$, $|G| \geqslant 3$*, to w grafie istnieje cykl.*

Twierdzenie 1.3.1. *[**Eulera**]*
Załóżmy, że G *jest grafem spójnym.* G *jest grafem Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy stopień każdego wierzchołka jest liczbą parzystą.*

Algorytm 1.3.1. *[**Fleurego**]*
Algorytm wyznaczania cyklu Eulera

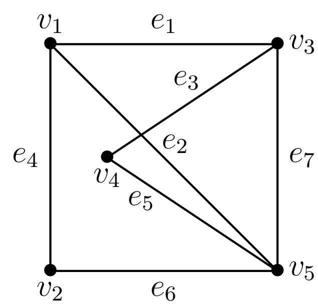
1. *Cykl zaczynamy w dowolnym wierzchołku.*
2. *Do kolejnego wierzchołka przechodzimy krawędzią, która nie jest mostem, ale jeśli jest to możliwe.*
3. *Z grafu usuwamy "przechodzone" krawędzie i izolowane wierzchołki.*

1.4 Grafy Hamiltona

Definicja 1.4.1. CYKLEM HAMILTONA *w grafie spójnym G nazywamy cykl, do którego należą wszystkie wierzchołki G.*

Definicja 1.4.2. GRAFEM HAMILTONA *nazywamy graf zawierający cykl Hamiltona.*

Przykład 1.4.1. *Cyklem Hamiltona jest graf $v_1v_2v_5v_4v_3v_1$ z poniższego grafu G.*



G

Definicja 1.4.3. ŚCIEŻKĄ HAMILTONA *w grafie spójnym G nazywamy ścieżkę, która przechodzi przez wszystkie wierzchołki grafu G dokładnie raz.*

Definicja 1.4.4. *Graf nazywamy* PÓŁHAMILTONOWSKIM*, gdy zawiera on ścieżkę Hamiltona.*

Definicja 1.4.5. *Graf G nazywamy* PRAWIE HAMILTONOWSKIM*, jeśli dodanie jednej krawędzi spowoduje powstanie cyklu Hamiltona.*

Przykład 1.4.2. *Graf z przykładu 1.1.1 jest grafem prawie hamiltonowskim oraz zawiera ścieżkę Hamiltona dabc.*

Twierdzenie 1.4.1. *[**Diraca**]*
Jeżeli w grafie prostym rzedu n, $n \geqslant 3$ dla każdego wierzchołka $v \in G$ spełniona jest nierówność $deg(v) \geqslant \frac{n}{2}$, to G jest grafem Hamiltona.

Twierdzenie 1.4.2. *[**Orego**]*
Jeśli w grafie prostym rzędu n, $n \geqslant 3$ dla każdych dwóch takich wierzchołków $u, v \in V(G)$, że $uv \notin E(G)$ spełniona jest nierówność $deg(u) + deg(v) \geqslant n$, to G jest grafem Hamiltona.

1.5 Drzewa

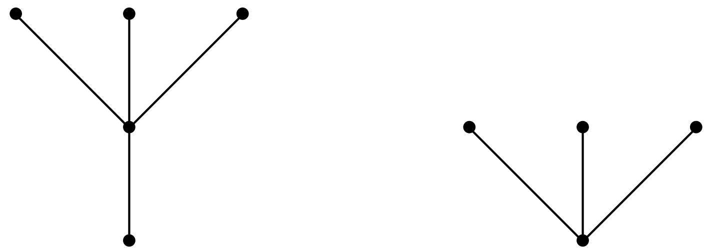
Definicja 1.5.1. DRZEWEM *nazywamy każdy graf prosty, acykliczny i spójny.*

Przykład 1.5.1. *Graf G z przykładu 1.1.17 jest drzewem.*

Definicja 1.5.2. LASEM *nazywamy graf prosty i acykliczny.*

Komentarz 1.5.1. *Każda składowa lasu jest drzewem.*

Przykład 1.5.2. *Przykład lasu L zawierającego dwa drzewa.*



L

Twierdzenie 1.5.1. *Załóżmy, że T jest grafem prostym rzędu n. Wówczas następujące warunki są równoważne*

i) T jest drzewem.

ii) T jest acykliczny i ma $n-1$ krawędzi.

iii) T jest spójny i ma $n-1$ krawędzi.

iv) T jest spójny i każda krawędź jest mostem.

v) Każde dwa wierzchołki sa połączone dokładnie jedną ścieżką

vi) T jest acykliczny i po dodaniu jednej krawędzi będzie zawierał dokładnie jeden cykl.

Definicja 1.5.3. *Załóżmy, że $r \in V(T)$. W drzewie T wprowadzimy porządek*

$$\underset{v \in V(T)}{\forall} \quad r \leqslant v$$

Natomiast dla $u, v \in V(T)$

$$u \leqslant v \iff u \in rTv$$

Drzewo z tak zdefiniowanym porządkiem nazywamy DRZEWEM UKORZENIONYM

Uwaga 1.5.1. *Poprzez uTv oznaczamy jedyną $u-v$-ścieżkę w drzewie T*

Definicja 1.5.4. *Jeśli mamy drzewo ukorzenione $T \subseteq G$, to T nazywamy* DRZEWEM NORMALNYM *(w G), jeśli końce każdej T-ścieżki (zawartej w G są porównywalne).*

Definicja 1.5.5.

$$N(C) = \{v \in G \colon v \notin C, \ \textit{istnieje } u \in C, \ uv \in E(G)\}$$

Przykład 1.5.3. *W przykładzie 1.4.1 niech $C = \{v_4, v_5\}$. Wtedy $N(C) = \{v_2, v_3\}$.*

Twierdzenie 1.5.2. *Każdy graf spójny zawiera drzewo normalne rozpinające ten graf.*

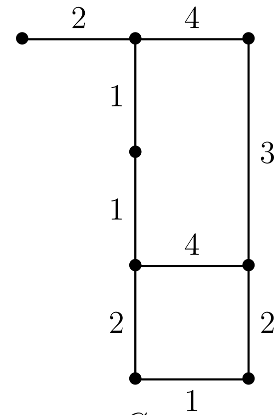
Definicja 1.5.6. *Niech $G = (V, E)$ będzie grafem. Funkcję $w \colon E \to \mathbb{R}_+$ nazywamy* WAGĄ.

Definicja 1.5.7. *Parę (G, w), gdzie G jest grafem, a w wagą, nazywamy* GRAFEM WAŻONYM

Definicja 1.5.8. WAGĄ GRAFU *G nazywamy liczbę*

$$w(G) = \sum_{e \in E(G)} w(e)$$

Przykład 1.5.4. *Przykład grafu ważonego, w którym $w(G) = 20$.*



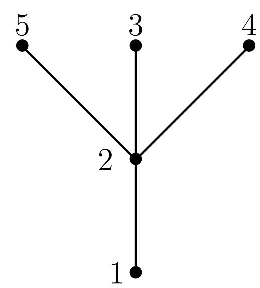
G

Algorytm 1.5.1. *[**Kruskala**]*
W każdym kroku wybieramy krawędź o minimalnej wadze tak, aby nie stworzyć cyklu.

Twierdzenie 1.5.3. *W wyniku algorytmu Kruskala otrzymujemy drzewo o minimalnej wadze.*

Definicja 1.5.9. *Drzewo T nazywamy* DRZEWEM OZNAKOWANYM *jeśli $V(T) = \{1, \ldots, n\}$ oraz $E(T) \subseteq [V(T)]^2$.*

Przykład 1.5.5. *Przykład drzewa oznakowanego.*

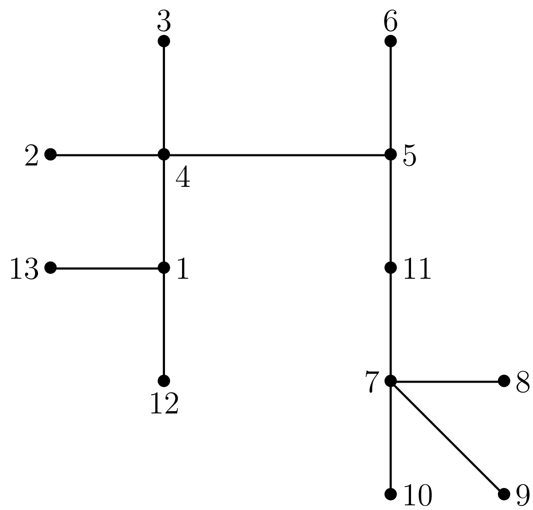


T

Twierdzenie 1.5.4. *[**Cayleya**]*
Istnieje dokładnie n^{n-2} drzew oznakowanych.

Dowód. Istnieje bijekcja między zbiorem drzew oznakowanych rzedu n, a zbiorem wszystkich ciągów $(n-2)$-elementowych o wyrazach ze zbioru n-elementowego. Tworzymy dwa ciągi (a_n) i (b_n) długości $n-2$. Na początek niech $T_1 = T$, jako b_1 bierzemy liść (wierzchołek stopnia 1) drzewa T_1 o najmniejszym numerze, a jako a_1 bierzemy jego sąsiada. Następnie tworzymy drzewo $T_2 = T_1 - b_1$ i powtarzamy procedurę: jako b_2 bierzemy liść T_2 o najmniejszym numerze, a jako a_2 jego sąsiada, itd ($T_i = T_{i-1} - b_{i-1}$). aż otrzymamy wyrazy b_{n-2} oraz a_{n-2}. Nas interesuje ciąg (a_n) (nazywamy go KODEM PRÜFERA) Procedurę tę można odwrócić: niech $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2})$ będzie ciągiem o wyrazach ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$. Jako b_1 wybieramy najmniejszą liczbę ze zbioru $\{1, \ldots, n\}$, która nie występuje w ciągu $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2})$. Tworzymy krawędź $a_1 b_1$. Następnie jako b_2 wybieramy najmniejszą liczbę ze zbioru $\{1, \ldots, n\}$ różną od b_1, która nie występuje w ciągu $(a_2, \ldots, a_{n-2})$ i tworzymy krawędź $a_2 b_2$, itd. aż otrzymamy b_{n-2} oraz krawędź $a_{n-2} b_{n-2}$. Na koniec tworzymy krawędź między wierzchołkami, których wartości nie wystąpiły w ciągu b_n □

Przykład 1.5.6. *Tworzenie kodu Prüfera*



Uzyskane ciągi:
$(a_n) = (4, 4, 5, 7, 7, 7, 11, 5, 4, 1, 1,)$ - *kod Prüfera oraz pomocniczy* $(b_n) = (2, 3, 6, 8, 9, 10, 7, 11, 5, 4, 12)$.

1.6 Macierzowy opis grafów

Definicja 1.6.1. *Jeśli G jest grafem prostym rzędu n, rozmiaru m, to*

- MACIERZĄ SĄSIEDZTWA *tego grafu nazywamy macierz rozmiaru $n \times n$ postaci*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & v_i v_j \in E(G) \\ 0 & \textit{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

- MACIERZĄ INCYDENCJI *tego grafu nazywamy macierz rozmiaru $n \times m$ postaci*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & v_i \textit{ jest incydentny z krawędzią } e_j \\ 0 & \textit{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Uwaga 1.6.1. *W każdej kolumnie macierzy incydencji grafu prostego występują dokładnie dwie jedynki.*

Uwaga 1.6.2. *W każdym wierszu macierzy incydencji liczba jedynek odpowiada stopniowi wierzchołka, któremu odpowiada ten wiersz.*

Uwaga 1.6.3. *Diagonalna macierz stopni wierzchołków grafu G jest macierzą rozmiaru $n \times n$ postaci*

$$d_{ij} = \begin{cases} d(v_i) & \textit{jeżeli } i = j \\ 0 & \textit{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Przykład 1.6.1. *W przykładzie 1.4.1 macierzą sąsiedztwa grafu G jest*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

macierzą incydencji jest

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

a macierzą stopni wierzchołków jest

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Definicja 1.6.2. DOPEŁNIENIEM ALGEBRAICZNYM *macierzy M nazywamy każda liczbę postaci*

$$(-1)^{i+j} det(M(i|j))$$

gdzie dla $1 \leqslant i, j \leqslant n$ $M(i|j)$ jest macierzą powstałą z macierzy M przez wykreślenie i-tego wiersza i j-tej kolumny.

Twierdzenie 1.6.1. *[**macierzowe o drzewach (Kirchoffa)**]*
Liczba drzew rozpinających oznakowanego grafu prostego jest równa dowolnemu dopełnieniu algebricznemu macierzy $D - A$, gdzie D jest macierzą diagonalną stopni wierzchołków grafu G, a A jest jego macierzą sąsiedztwa.

Definicja 1.6.3. WYZNACZNIKIEM GRAFU *nazywamy wyznacznik macierzy sąsiedztwa tego grafu.*

Przykład 1.6.2. *Wyznacznik grafu G z przykład 1.4.1 wynosi -2.*

Definicja 1.6.4. *Jeśli $det(G) = 0$, to graf G nazywamy* GRAFEM SINGULARNYM.

Lemat 1.6.1.

$$det(G) = \sum_{\Gamma \in S(G)} (-1)^{sg(\Gamma)} 2^{c(\Gamma)}$$

gdzie $S(G)$ jest zbiorem wszystkich podgrafów rozpinających, których składowe są 1-regularne lub 2-regularne, $sg(\Gamma)$ jest liczbą składowych o parzystej liczbie wierzchołków, a $c(\Gamma)$ jest liczbą cykli.

Lemat 1.6.2. *Jeśli $u, v \in V(G), uv \notin E(G)$, $N(u) \subset N(v)$ oraz G' jest grafem otrzymanym z G przez usunięcie wszystkich krawędzi postaci xv, gdzie $x \in N(u)$, to $det(G') = det(G)$.*

Lemat 1.6.3. *Jeśli x jest liściem grafu G, a u jest jego sąsiadem, to*

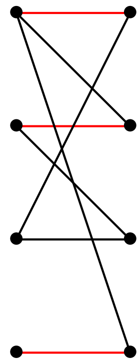
$$det(G - \{x, u\}) = (-1) det(G)$$

Lemat 1.6.4. *Graf jest singularny wtedy i tylko wtedy, gdy przynajmniej jedna z jego składowych jest grafem singularnym*

1.7 Skojarzenia

Definicja 1.7.1. *Niech* $G = (A \cup B, E)$*, gdzie* A *i* B *są zbiorami niezależnymi, będzie grafem dwudzielnym,* $A \cup B = V$*. Zbiór* $F \subset E$ *rozłącznych krawędzi nazywamy* SKOJARZENIEM.

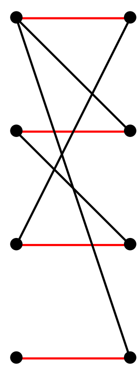
Przykład 1.7.1. *Graf* G *z zaznaczono na czerwono skojarzeniem.*



G

Definicja 1.7.2. *Zbiór* F *nazywamy* SKOJARZENIEM PEŁNYM*, jeśli* $\underset{v \in G}{\forall} \ \underset{e \in F}{\exists} \ v \in e$ *(*v *jest incydentny z krawędzią* e*).*

Przykład 1.7.2. *Graf* G *z zaznaczono na czerwono skojarzeniem pełnym.*

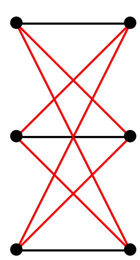


G

Definicja 1.7.3. *Zbiór* $H \subset G$ *nazywamy* k-FAKTOREM *jeśli* H *jest grafem rozpinającym (*$V(H) = V(G)$*) oraz* k*-regularnym.*

Uwaga 1.7.1. 1*-faktor to nic innego jak skojrzenie pełne.*

Przykład 1.7.3. *Graf* G *z zaznaczono na czerwono* 2*-faktorem.*



G

Definicja 1.7.4. *Niech $U \subset V$ oraz $\underset{u \in U}{\forall} \ \underset{e \in M}{\exists} \ u \in e$, to mówimy, że M* JEST SKOJARZENIEM DLA ZBIORU *M, a każdy wierzchołek ze zbioru U nazywamy* SKOJARZONYM. *Każdy wierzchołek, który nie jest incydentny z żadną krawędzią skojarzenia nazywamy* NIESKOJARZONYM. *U.*

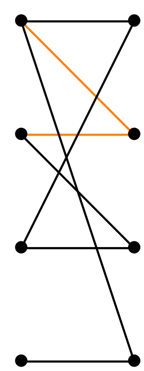
Definicja 1.7.5. *Mówimy, że zbiór $X \subset V$ jest* POKRYCIEM WIERZCHOŁKOWYM *grafu G, jeśli każda krawędź grafu G jest incydentna z pewnym wierzchołkiem zbioru X.*

Przykład 1.7.4. *W grafie G z przykładu 1.1.1 pokryciem wierzchołkowym jest zbiór $\{1, 2, 4\}$.*

Definicja 1.7.6. *Niech $G = (A \cup B, E)$ oraz niech M będzie skojarzeniem.* ŚCIEŻKĄ NAPRZEMIENNĄ *nazywamy taką ścieżkę, której pierwszym wierzchołkiem jest wierzchołek $a \in A$, natomiast krawędzie tej ścieżki należą naprzemiennie do zbiorów $E \setminus M$ i M.*

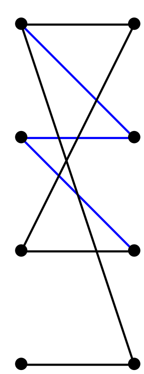
Definicja 1.7.7. SCIEŻKĄ POWIĘKSZAJĄCĄ *nazywamy ścieżkę naprzemienną, której ostatni wierzchołek jest nieskojarzonym wierzchołkiem należącym do zbioru B.*

Przykład 1.7.5. *Przykładem ścieżki naprzemiennej w grafie z przykładu 1.7.1 jest ścieżka oznaczona poniżej kolorem pomarańczonym*



G

a przykładem ścieżki powiększającej jest ścieżka oznaczona poniżej kolorem niebieskim



G

Twierdzenie 1.7.1. ***[Königa]***
W grafie dwudzielnym moc najliczniejszego skojarzenia jest równa mocy najmniej licznego pokrycia.

Twierdzenie 1.7.2. ***[Halla]***
Niech $G = (V_1 \cup V_2, E)$ będzie grafem dwudzielnym. W tym grafie istnieje skojarzeniem zbioru V_1 wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $A \subset V_1$

$$|A| \leqslant |N(A)|$$

1.8 Kolorowanie grafów

Definicja 1.8.1. *k-KOLOROWANIEM grafu G nazywamy podział zbioru $V(G)$ na k zbiorów niezależnych.*

Definicja 1.8.2. *Jeśli dla grafu G istnieje k-kolorowanie, to ten graf nazywamy k-KOLOROWALNYM.*

Definicja 1.8.3. *Jeśli G jest k-kolorowalny, ale nie jest $k-1$-kolorowalny, to G nazywamy k-CHROMATYCZNYM, a liczbę $\chi(G) = k$ nazywamy LICZBĄ CHROMATYCZNĄ.*

Przykład 1.8.1. *Dla grafu G z przykładu 1.1.1 mamy $\chi(G) = 3$.*

Lemat 1.8.1.

$$\chi(G) \leqslant |G|$$

Algorytm 1.8.1. *[**Zachłanny**]*

1. *Etykietujemy wierzchołki $v_1, \ldots, v_n$.*
2. *Kolejne kolory oznaczamy liczbami naturalnymi $1, 2, \ldots$*
3. *v_1 kolorujemy kolorem 1*
4. (a) *v_2 kolorujemy kolorem 1 jeśli $v_1v_2 \notin E(G)$*
   (b) *w przeciwnym przypadku v_2 kolorujemy kolorem 2 .*
5. *v_i kolorujemy pierwszym wolnym kolorem, który nie został przypisany jego sąsiadom.*

Twierdzenie 1.8.1. *W każdym grafie prostym G*

$$\chi(G) \leqslant \Delta(G) + 1$$

Lemat 1.8.2. *W grafie prostym i spójnym G*

$$\chi(G) \leqslant \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 2q}$$

gdzie $q = |E(G)|$.

Twierdzenie 1.8.2. *[**Brooksa**]*
Niech G będzie grafem prostym, spójnym, różnym od grafu pełnego i różnym od cyklu nieparzystego. Wówczas

$$\chi(G) \leqslant \Delta(G)$$

Komentarz 1.8.1.
W przypadku grafu pełnego mielibyśmy sytuację: $\Delta(K_n) = n - 1,\ \chi(K_n) = n,\ \chi(K_n) = \Delta(K_n) + 1$
Z kolei w przypadku cyklu nieparzystego: $\Delta(C_{2n+1}) = 2,\ \chi(C_{2n+1}) = 3$.

1.9 Grafy doskonałe

Definicja 1.9.1. LICZBĄ KLIKOWĄ *nazywamy moc najliczniejszej kliki i oznaczamy ją* $\omega(G)$.

Definicja 1.9.2. LICZBĄ NIEZALEŻNOŚCI *nazywamy moc najliczniejszego zbioru niezależnego i oznaczamy ją* $\alpha(G)$.

Przykład 1.9.1. *Dla grafu z przykładu 1.1.1 mamy* $\omega(G) = 3$ *oraz* $\alpha(G) = 2$.

Lemat 1.9.1. *Dla każdego grafu prostego* G *spełnione są zależności*

$$\omega(G) = \alpha(\overline{G})$$

$$\alpha(G) = \omega(\overline{G})$$

Oznaczenie 1.9.1. *Niech* $v \in V(G)$ *będzie dowolnym wierzchołkiem, wtedy*

$$N[v] = N(v) \cup \{v\}$$

Algorytm 1.9.1. *[**wyznaczania zbioru niezależnego**]*

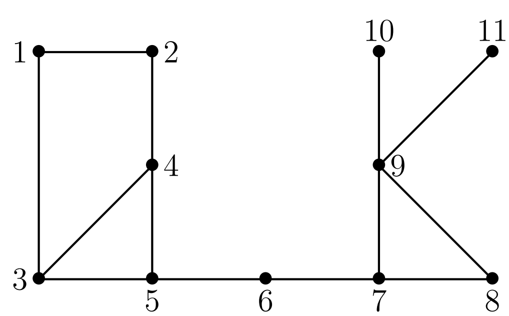
I) Wyznaczanie zbioru niezależnego poprzez dodawanie wierzchołków.

1. $U = \emptyset$, $X = V(G)$
2. *podczas gdy* $X \neq \emptyset$ *wykonuj:*
   - *weź* $v \in X$, *który ma najmniej sąsiadów w* X.
   - $U := U \cup \{v\}$
   - $X := X \setminus N[v]$
3. *zwróć* U.

II) Wyznaczanie zbioru niezależnego przez usuwanie wierzchołków

1. $U = V(G)$
2. *podczas gdy* U *nie jest niezależny wykonuj:*
   - *weź* $v \in U$, *który ma najwięcej sąsiadów.*
   - $U = U \setminus \{v\}$
3. *zwróc* U.

Przykład 1.9.2.
Wyznaczymy zbiór niezależny w następującym grafie.



I)
- $U = \emptyset \quad X = \{1, \ldots, 11\}$
- $v = 10 \quad U = \{10\} \quad X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 11\}$
- $v = 11 \quad U = \{10, 11\} \quad X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
- $v = 8 \quad U = \{8, 10, 11\} \quad X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $v = 6 \quad U = \{6, 8, 10, 11\} \quad X = \{1, 2, 3, 4\}$
- $v = 1 \quad U = \{1, 6, 8, 10, 11\} \quad X = \{4\}$
- $v = 4 \quad U = \{1, 4, 6, 8, 10, 11\} \quad X = \emptyset$

II)
- $U = \{1, \ldots, 11\}$
- $v = 9 \quad U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11\}$
- $v = 3 \quad U = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11\}$
- $v = 2 \quad U = \{1, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11\}$
- $v = 5 \quad U = \{1, 4, 6, 7, 8, 10, 11\}$
- $v = 7 \quad U = \{1, 4, 6, 8, 10, 11\}$

Lemat 1.9.2. *Dla każdego grafu G (prostego) spełniona jest nierówność*

$$\chi(G) \geqslant \omega(G)$$

Definicja 1.9.3. *Graf G nazywamy* DOSKONAŁYM, *jeśli dla każdego podgrafu indukowanego $H \subset G$ spełniony jest warunek*

$$\chi(H) = \omega(H)$$

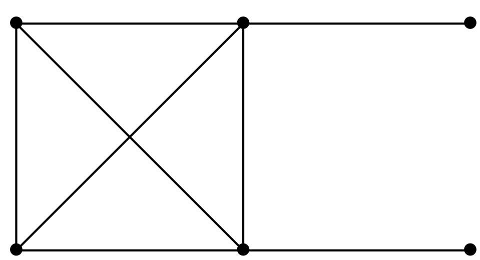
Przykład 1.9.3. *Przykładem grafów doskonałych sa grafy dwudzielne oraz grafy krawędziowe powstałe z grafów dwudzielnych.*

Lemat 1.9.3. *Jeśli $H \subseteq G$ jest indukowanym podgrafem G, $S \subseteq H$ jest indukowanym podgrafem grafu H, to S jest też indukowanym podgrafem grafu G.*

Uwaga 1.9.1. *Indukowany podgraf grafu doskonałego jest grafem doskonałym.*

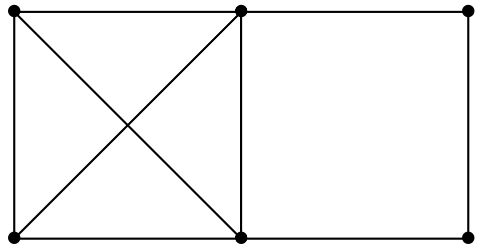
Definicja 1.9.4. *Graf G nazywamy* CIĘCIWOWYM, *jeśli nie zawiera on podgrafu indukowanego, który jest cyklem C_n dla $n > 3$. Innymi słowy jeśli C_n dla $n > 3$ jest podgrafem grafu G, to w tym grafie zawiera się również cięciwa tego cyklu.*

Przykład 1.9.4. *Przykład grafu, który jest cięciwowy*



G_1

i przykład grafu, który cięciwowy nie jest



G_2

Lemat 1.9.4. *Podgraf indukowany grafu cięciwowego jest grafem cięciwowym.*

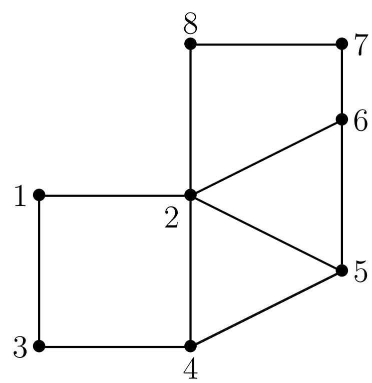
Definicja 1.9.5. *Niech G_1, G_2, S będa podgrafami indukowanymi grafu G takimi, że*

$$G_1 \cup G_2 = G$$

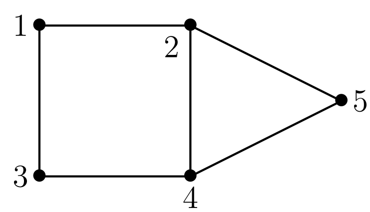
$$G_1 \cap G_2 = S$$

Mówimy wówczas, że graf G powstał przez (ang. pasting along) SKLEJENIE GRAFÓW G_1, G_2 WZDŁUŻ S

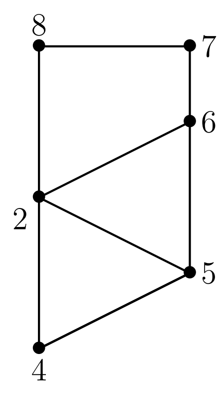
Przykład 1.9.5. *Rozważmy następujące grafy*



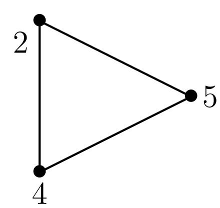
G



G_1



G_2



S

Twierdzenie 1.9.1. *Graf G jest grafem cięciwowym wtedy i tylko wtedy, gdy został otrzymany rekurencyjnie przez sklejenie wzdłuż grafów pełnych.*

Twierdzenie 1.9.2. *Graf cięciwowy jest grafem doskonałym.*

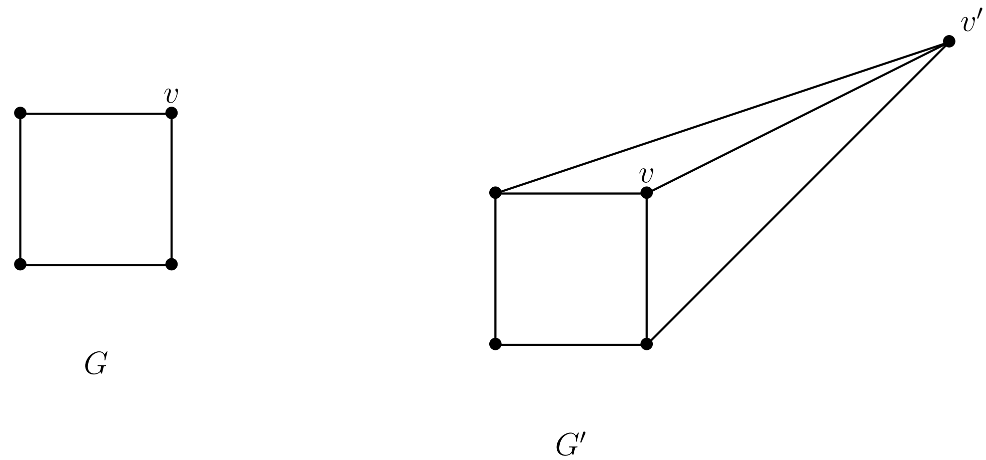
Definicja 1.9.6. *Mówimy, że graf G' powstał z G przez* ROZSZERZENIE WIERZCHOŁKA *v jeśli*

$$V(G') := V(G) \cup \{v'\} \text{ gdzie } v' \notin V(G)$$

oraz

$$E(G') = E(G) \cup \{v'x\colon x \in N(v)\} \cup \{vv'\}$$

Przykład 1.9.6. *Graf G' powstał z grafu G przez rozszerzenie wierzchołka v.*



Lemat 1.9.5. *Jeśli G jest grafem doskonałym, a G' powstał z grafu G przez rozszerzenie wierzchołka, to G' jest również grafem doskonałym.*

Twierdzenie 1.9.3. *[**Laszlo Lovasz**]*
Graf G jest doskonały wtedy i tylko wtedy, gdy jego dopełnienie jest doskonałe.

1.10 Zbiory dominujące

Definicja 1.10.1. *Zbiór wierzchołków $S \subset V$ nazywamy* ZBIOREM DOMINUJĄCYM *w grafie G, jeśli*

$$\underset{v\in V}{\forall} \left(v \in S \vee \underset{u\in S}{\exists}\ uv \in E(G) \right)$$

Przykład 1.10.1. *Przykładem zbioru dominującego jest zbiór $S = \{1, 2, 4\}$ z przykładu 1.1.1.*

Lemat 1.10.1. *Jeśli G jest grafem prostym, $G = (V, E)$, $S \subset V$, to NWSR*

i) S *jest zbiorem dominującym,*

ii) $\underset{v\in V\setminus S}{\forall}\ \underset{u\in S}{\exists}\ uv \in E,$

iii) $\underset{v\in V\setminus S}{\forall}\ N(v) \cap S \neq 0,$

iv) $\underset{v\in V\setminus S}{\forall}\ dist(v, S) \leqslant 1,$

v) $N[S] = V,$

vi) $\underset{v\in V}{\forall}\ |N[v]\cap S|\geqslant 1,$

vii) $\underset{v\in V\setminus S}{\forall}\ N(v)\nsubseteq V\setminus S.$

Definicja 1.10.2. MINIMALNYM ZBIOREM DOMINUJĄCYM *nazywamy taki zbiór dominujący $S\subset V$ (gdzie $G=(V,E)$), że*

$$\underset{v\in S}{\forall}\ S\setminus\{v\} \text{ nie jest zbiorem dominującym}$$

Przykład 1.10.2. *Zbiór dominujący z przykładu 1.10.1 jest minimalnym zbiorem dominującem, gdyż po usunięciu dowolnego wierzchołka nowopowstały zbiór dominujący nie będzie.*

Oznaczenie 1.10.1. *Symbolem $MDS(G)$ nazywamy rodzinę wszystkich minimalnych zbiorów dominujących.*

Definicja 1.10.3. LICZBĄ DOMINUJĄCĄ *grafu G nazywamy moc najmniej licznego zbioru dominującego graf G i oznaczamy $\gamma(G)$. Każdy zbiór mocy $\gamma(G)$ nazywamy γ-*ZBIOREM.

Przykład 1.10.3. *W przykładzie 1.10.1 mamy $\gamma(G)=3$.*

Twierdzenie 1.10.1. *Zbiór $S\subset V$, dla $G=(V,E)$, jest minimalnym zbiorem dominującym wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego wierzchołka $v\in S$ spełniony jest jeden z warunków*

1. *$N(v)\cap S=\emptyset$ (v jest izolowany w S)*

2. $\underset{u\in V\setminus S}{\exists}\ N(u)\cap S=\{v\}$

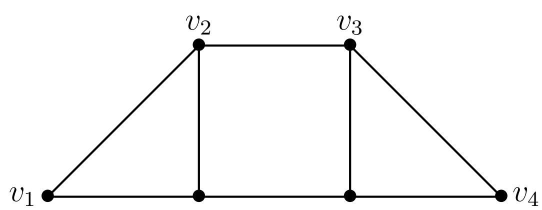
Twierdzenie 1.10.2. *Jeśli G jest grafem spójnym rzędu $n\geqslant 2$, to istnieje w nim taki zbiór dominujący, że jego dopełnienie też będzie zbiorem dominującym.*

Twierdzenie 1.10.3. *Jeśli G nie ma wierzchołków izolowanych, $S\in MDS(G)$, to $V(G)\setminus S$ jest zbiorem dominującym.*

Definicja 1.10.4. *Mówimy, że zbiór S jest* ZBIOREM TOTALNIE DOMINUJĄCYM *w grafie $G=(V,E)$ jeśli*

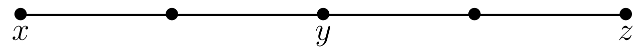
$$\underset{v\in V}{\forall}\ \underset{u\in S}{\exists}\ uv\in E(G)$$

Przykład 1.10.4. *Przykładem zbioru dominującego, który jest totalnie dominujący jest zbiór $S=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ z poniższego grafu G.*



G

Przykład 1.10.5. *Przykładem zbioru dominującego, który nie jest totalnie dominujący jest zbiór $S=\{x,y,z\}$ z poniższego grafu G. Dzieje się tak, gdyż dla wierzchołka y nie istnieje sąsiadujący z nim wierzchołek ze zbioru S.*



G

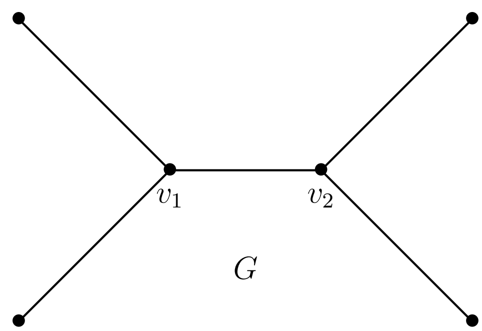
1.11 Bezpieczeństwo w grafach

Definicja 1.11.1. *Ataki* $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_k\}$ *- rodzina zbiorów rozłącznych na zbiór* $S = \{s_1, \ldots, s_n\} \subseteq V$
Obrona $\mathcal{D} = \{D_1, \ldots, D_m\}$ *- rodzina zbiorów rozłącznych na zbiór* $S = \{s_1, \ldots, s_n\} \subseteq V$
Mówimy, że atak $\mathcal{A}$ *jest* MOŻLIWY DO OBRONIENIA*, jeśli istnieje obrona obrona* $\mathcal{D}$: $\forall_i \;\; |D_i| \geqslant |A_i|$
S *nazywamy* ZBIOREM BEZPIECZNYM*, jeśli każdy atak na* S *jest możliwy do obronienia.*

Definicja 1.11.2. *Moc najmniej licznego zbioru bezpiecznego nazywamy* LICZBĄ BEZPIECZEŃSTWA *i oznaczamy* $s(G)$ *.*

Lemat 1.11.1. *Zbiór bezpieczny* $S \subset V$*, gdzie* $G = (V, E)$ *, mocy* $s(G)$ *jest zbiorem spójnym.*

Przykład 1.11.1. *Zbiór* $S = \{v_1, v_2\}$ *jest zbiorem bezpiecznym w poniższym grafie* G*.*



1.12 Grafowe modele sieci

Przykłady Sieci		
Typ sieci	**Wierzchołek**	**Krawędź**
Społeczna	osoba	znajomość
	aktor	udział w tym samym filmie
	naukowiec	wspólna publikacja lub projekt
	osoba	kontakt seksualny
	osoba	twitter
	osoba	przeniesienie choroby zakaźnej
Informacyjna	Internet-domena	połączenie fizyczne
	strona WWW	odnośnik
	publikacja naukowa	cytowalność
Technologiczna	elektrownia	linia przeszyłowa
	lotnisko	połączenie lotnicze
	dworzec kolejowy	tory
	miasto	droga
	router	kable i światłowody
	czujnik	połączenie radiowe
Biologiczna	gatunek	pozywienie
	białko	reakcja fizyczna
	neuron	akson
Sprzedaży	hurtownia	zaopatrzenie sklepu

Przykład 1.12.1.

- *"Świat jest mały" eksperyment przeprowadzony w 1967 przez psychologa Stanleya Milgrama. Doświadczenie miało stanowić test hipotezy, że członkowie jakiejkolwiek dużej społeczności (w jego przypadku, ludność Stanów Zjednoczonych) mogą być pokrewni sobie dzięki krótkim sieciom pośrednich znajomych.*

- *Aby sprawdzić to twierdzenie, Milgram wprowadził nowatorską metodę wysyłania listów do kilkuset losowo wybranych osób w Nebrasce i Kansas prosząc, by przekazali ten list jego przyjacielowi. Gdyby jednak nie znali go, są proszeni o przekazanie listu komuś, kto według ich wiedzy może być bliższy tej osobie. Większość listów Milgrama dotarła do jego przyjaciela po średnio sześciokrotnym przekazaniu kolejnym osobom.*

- *Jego rezultat, ważne twierdzenie socjologii, nazwany został jako „sześć stopni oddalenia później spopularyzowany przez Johna Guare'a i nazwany hipotezą o małym świecie. Wielokrotnie testowano hipotezę o małym świecie w małych społecznościach. Przygotowywany jest projekt, wykorzystujący Internet i pocztę elektroniczną w skali globalnej, celem dalszego badania zjawisk społecznych wynikających z tej hipotezy oraz ją weryfikujących.*

Definicja 1.12.1. GĘSTOŚCIĄ *grafu G nazywamy liczbę $D(G) = \frac{||G||}{||K_n||}$, gdzie n jest rzędem grafu G.*

Definicja 1.12.2. ŚREDNIĄ DŁUGOŚCIĄ ŚCIEŻKI *nazywamy średnią arytmetyczną ogległości między wierzchołkami.*

Definicja 1.12.3. WSPÓŁCZYNNIKIEM GRUPOWANIA WIERZCHOŁKA $v \in V(G)$*, gdzie $G = (V, E)$ nazywamy liczbę $c(v) = \frac{||G[N(v)]||}{||K_n||}$, gdzie n jest stopniem wierzchołka v.*

Definicja 1.12.4. WSPÓŁCZYNNIKIEM GRUPOWANIA GRAFU *nazywamy średnią arytmetyczną współczynników grupowania wierzchołków i oznaczamy ją $C(G)$.*

Definicja 1.12.5. *Niech dla każdej pary różnych wierzchołków $u, w \in V(G)$, gdzie $G = (V, E)$, różnych od $v \in V(G)$ wyznaczony będzie ułamek $\frac{s_{uw}(v)}{s_{uw}}$, gdzie s_{uw} oznacza liczbę najkrótszych ścieżek łączących wierzchołki u, w oraz $s_{uw}(v)$ oznacza liczbę najkrótszych ścieżek łączących wierzchołki u, w przechodzących przez wierzchołek v. Sumę takich ilorazów nazywamy* MIARĄ CENTRALNOŚCI WIERZCHOŁKA *lub* POŚREDNICTWEM *i oznaczamy $b(v)$.*

Przykład 1.12.2. *Dla przykładu 1.1.1 mamy $D(G) = \frac{4}{6}$, gdyż graf G ma 4 krawędzie, a graf K_4 ma 6 krawędzi. Średnia długość ścieżki wynosi $\frac{1+1+2+1+2+1}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$. Z kolei współczynniki grupowania wierzchołków wynoszą: $c(1) = c(2) = 1,\ c(3) = \frac{1}{3}$ oraz $c(4) = 0$. Zatem współczynnik grupowania grafu wynosi $\frac{5}{8}$.*