Teoria Grafów - Wykład

Przepisał Ricko

Ostatnia aktualizacja: 05-06-2017

Spis Treści

Rozdział 1

Teoria Grafów - Wykład

Motywacją do tworzenia tego pliku jest chęć uporządkowania wiadomości poznanych na wykładzie przekazanych nam w dość swobodnej formie i opatrzenie ich w przydatne do zrozumienia definicji czy twierdzeń przykłady i opisy. Oznaczenia informacji poprzez definicje, twierdzenia czy też umowy są wykonane przeze mnie autorsko podobnie jak przykłady oraz większość rysunków.
PS. Proszę nie krzyczeć jak w czymś sie machnę ☺.

1.1 Wykład 1 - 21.02.2017

Definicja 1.1.1. GRAFEM PROSTYM *G nazywamy parę (V, E), gdzie poprzez V oznaczamy dowolny (nawet niepusty) zbiór wierzchołków, a przez E oznaczamy zbiór krawędzi.*

Definicja 1.1.2. KRAWĘDZIĄ *w grafie $G = (V, E)$ nazywamy parę $\{x, y\}$, gdzie $x, y \in G$. Mówimy wtedy, że wierzchołki x i y* SĄSIADUJĄ *ze sobą lub też gdy przyjmiemy oznaczenie $e = \{x, y\}$ możemy mówić, że wierzchołki x i y są* INCYDENTNE *z krawędzią e*

Oznaczenie 1.1.1. *Zbiór wierzchołków konkretnego grafu G oznaczać będziemy poprzez $V(G)$, a zbiór krawędzi poprzez $E(G)$*

Oznaczenie 1.1.2. *Stosować będziemy różne tożsame oznaczenia na zawieranie się krawędzi w zbiorze wszystkich krawędzi: $\{x, y\} \in E(G),\ xy \in G,\ xy \in E$. Oznaczają one to samo i mogą być stosowane zamiennie. Podobnie na różne sposoby oznaczać będziemy należenie wierzchołka x do grafu G:*
$x \in V(G),\ x \in G$.

Umowa 1.1.1. *Od tej pory wszystkie rozważane grafy będą grafami prostymi.*

Definicja 1.1.3. *Niech X będzie dowolnym zbiorem, wtedy*

$$[X]^k = \{S \subseteq X : |S| = k\}$$

czyli opisując słowami $[X]^k$ jest rodziną wszystkich k-elementowych podzbiorów zbioru X.

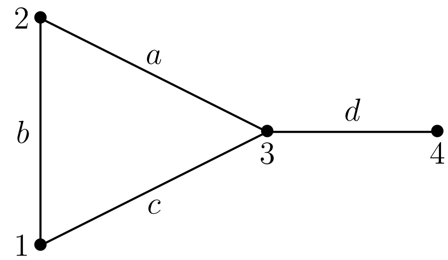
Uwaga 1.1.1. *Stosując powyższą definicję możemy zauważyć, że $E \subseteq [V]^2$.*

Uwaga 1.1.2. *Mówimy, że dwie krawędzie e i f sąsiadują ze sobą, jeśli $|e \cap f| = 1$*

Definicja 1.1.4. RZĘDEM *grafu nazywamy liczbę $|G| = card\ V$.*

Definicja 1.1.5. ROZMIAREM *grafu nazywamy liczbę* $||G|| = card\ E$.

Przykład 1.1.1. *Graf prosty* G*, w którym* $V = \{1, 2, 3, 4\}$ *oraz* $E = \{a, b, c, d\}$



Przykładowo krawędź b *możemy zapisać jako* $b = \{1, 2\}$ *i mówimy wtedy, że wierzchołki* 1 *i* 2 *są incydentne z krawędzią* b*. Ponadto* $|G| = 4$ *oraz* $||G|| = 4$.

Definicja 1.1.6. *Zbiór* $S \subseteq V(G)$ *nazywamy* NIEZALEŻNYM *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\underset{x,y \in S}{\forall}\ xy \notin G$

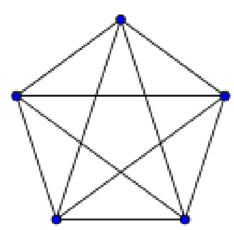
Definicja 1.1.7. *Zbiór* $S \subseteq V(G)$ *nazywamy* KLIKĄ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\underset{x,y \in S}{\forall}\ xy \in G$

Przykład 1.1.2. *Analizując graf z przykładu pierwszego możemy zauważyć, że zbiór* $S_1 = \{2, 4\}$ *jest zbiorem niezależnym, a zbiór* $S_2 = \{1, 2, 3\}$ *jest kliką.*

Uwaga 1.1.3. *Jeżeli* $V(G)$ *jest kliką to graf* G *nazywamy grafem* PEŁNYM

Oznaczenie 1.1.3. *Graf pełny rzędu* n *oznaczamy* K_n

Przykład 1.1.3. *Graf pełny* K_5

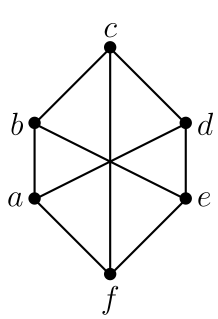


Definicja 1.1.8. *Mówimy, że* $G = (V, E)$ *i* $G' = (V', E')$ *są* IZOMORFICZNE *(oznaczamy* $G \cong G'$*) jeżeli istnieje bijekcja* $\varphi\colon V \to V'$ *taka, że*

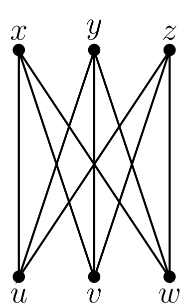
$$\underset{x,y \in V}{\forall}\ xy \in E \Leftrightarrow \varphi(x)\varphi(y) \in E'$$

Umowa 1.1.2. *Grafy izomorficzne będziemy utożsamiać ze sobą.*

Przykład 1.1.4. *Grafy izomorficzne* G *i* G' *wraz z opisanymi wartościami izomorfizmu* $\varphi\colon G \to G'$



G

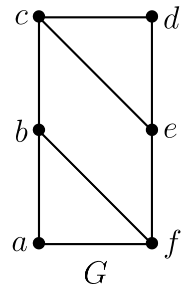


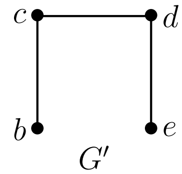
G'

$\varphi(a) = x$ $\quad$ $\varphi(d) = v$
$\varphi(b) = u$ $\quad$ $\varphi(e) = z$
$\varphi(c) = y$ $\quad$ $\varphi(f) = w$

Definicja 1.1.9. *Mówimy, że* $G' \subseteq G$ *jest* PODGRAFEM *grafu* G *jeśli* $V(G') \subseteq V(G)$ *oraz* $E(G') \subseteq E(G)$.

Przykład 1.1.5. *Graf* G *i jego podgraf* G'

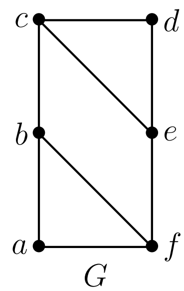


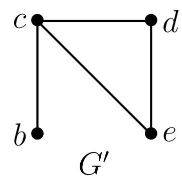


Definicja 1.1.10. *Mówimy, że* $G' \subseteq G$ *jest grafem* INDUKOWANYM *jeżeli*

$$E(G') = \{xy \in E(G) \colon x, y \in V(G')\}$$

Przykład 1.1.6. *Graf* G *i graf indukowany z* G *oznaczony jako* G'



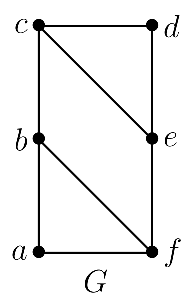


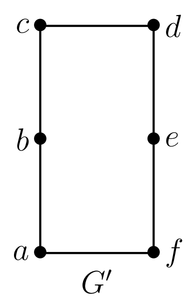
Definicja 1.1.11. *Jeżeli* $U \subseteq V(G)$, *to* $G[U] = (U, \tilde{E})$, *gdzie* $\tilde{E} = \{xy \in E(G) \colon x, y \in U\}$.

Definicja 1.1.12. *Mówimy, że* $G' \subseteq G$ *jest* PODGRAFEM ROZPINAJĄCYM *graf* G *jeśli*

$$G[G'] = G \quad (V(G') = V(G))$$

Przykład 1.1.7. *Graf* G *i podgraf rozpinający* G'



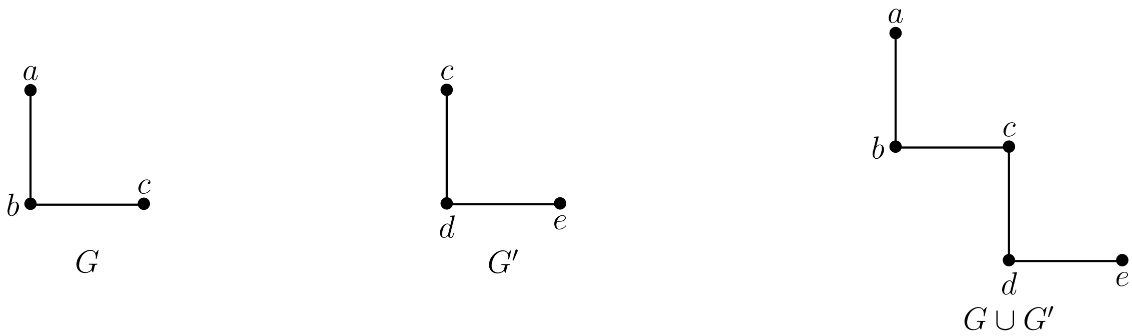


Definicja 1.1.13. *Jeżeli* $G = (V, E)$ *oraz* $G' = (V', E')$, *to*

$$G \cup G' = (V \cup V', E \cup E')$$

$$G \cap G' = (V \cup V', E \cap E')$$

Przykład 1.1.8. *Suma dwóch grafów* G *i* G'



Uwaga 1.1.4. *Jeśli* $V(G \cap G') = \emptyset$*, to mówimy, że grafy* G *i* G' *są* ROZŁĄCZNE.

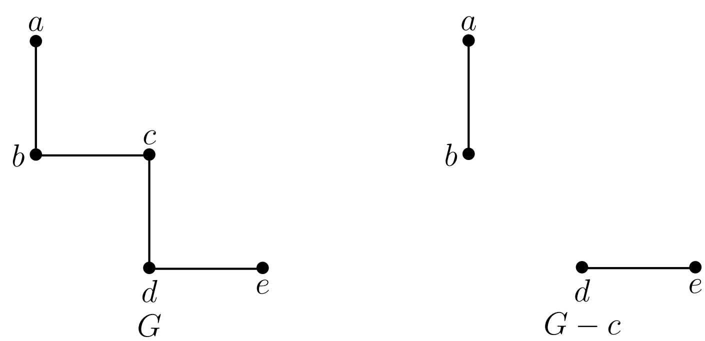
Definicja 1.1.14. *Jeśli* $U \subset V(G)$*, to* $G - U = G[V \setminus U]$.

Definicja 1.1.15. *Jeśli* $x \in V(G)$*, to* $G - x = G - \{x\}$.

Definicja 1.1.16. *Jeśli* $F \subset E$*, to* $G - F = (V, E \setminus F)$

Definicja 1.1.17. *Jeśli* $e \in E$*, to* $G - e = G - \{e\}$.

Przykład 1.1.9. *Usuwanie wierzchołka* c *z grafu* G.



Jak widać grafy $G[\{a, b\}]$ *i* $G[\{d, e\}]$ *są ze sobą rozłączne.*

Przykład 1.1.10. *W przykładzie 1.1.7 graf* $G' = G - \{ce, bf\}$

Uwaga 1.1.5. *Jeśli* $F \subset [V]^2$*, to* $G + F = (V, E \cup F)$.

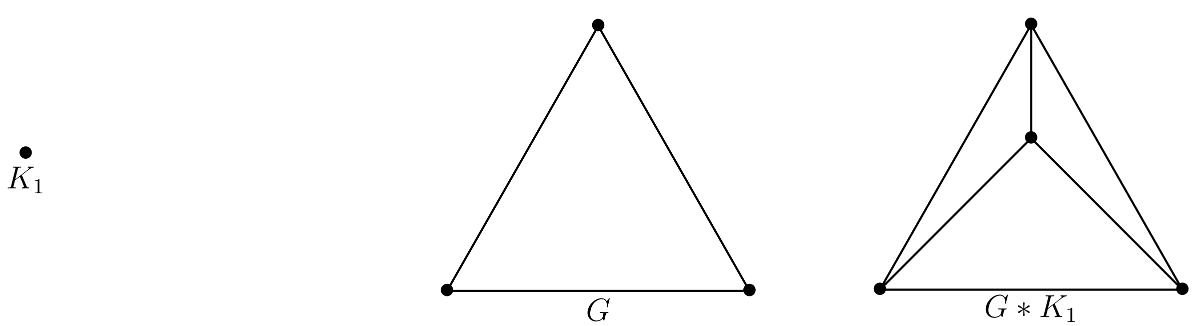
Definicja 1.1.18. *Jeśli grafy* G *i* G' *są rozłączne , to* ZESPOLENIEM *tych grafów nazywamy graf*

$$G * G' = G \cup G' + F,$$

gdzie

$$F = \{xy \in [V(G) \cup V(G')]^2 \colon x \in V(G),\ y \in V(G')\}$$

Przykład 1.1.11. *Zespolenie grafów* G *i* K_1



Definicja 1.1.19. DOPEŁNIENIEM *grafu* G *nazywamy graf* $\overline{G} = (V(G), [V(G)]^2 \setminus E(G))$.

Przykład 1.1.12. *Graf* G *i jego dopełnienie* $\overline{G}$.

G $\overline{G}$

Definicja 1.1.20. SĄSIEDZTWEM *wierzchołka* $v \in V(G)$ *nazywamy zbiór* $N(v) = \{u \in G\colon uv \in E(G)\}$

Definicja 1.1.21. STOPNIEM *wierzchołka* $v \in V(G)$ *nazywamy liczbę* $d(v) = |N(v)|$.

Definicja 1.1.22.

$$\delta(G) = \min_{v\in G}\ d(v)$$

$$\Delta(G) = \max_{v\in G}\ d(v)$$

$$d(G) = \frac{1}{|V|}\sum_{v\in G} d(v)$$

Liczbę $\delta(G)$ *nazywamy* MINIMALNYM STOPNIEM WIERZCHOŁKA, *liczbę* $\Delta(G)$ MAKSYMALNYM STOPNIEM WIERZCHOŁKA, *a liczbę* $d(G)$ *nazywamy* ŚREDNIM STOPNIEM WIERZCHOŁKA.

Uwaga 1.1.6.

$$\delta(G) \leqslant d(G) \leqslant \Delta(G)$$

Przykład 1.1.13. *Analizując graf* G *z przykładu 1.1.9 zauważmy, że na przykład* $N(c) = \{b, d\}$ *oraz* $d(c) = 2$. *Ponadto* $\delta(G) = 1,\ \Delta(G) = 2$ *oraz* $d(G) = \frac{8}{5}$.

Lemat 1.1.1 (O uściskach dłoni)**.** *Suma stopni wierzchołków w grafie jest liczbą parzystą.*

Dowód. Wystarczy zauważyć, że

$$2|E(G)| = \sum_{v\in V(G)} d(v)$$

□

Definicja 1.1.23. ŚCIEŻKĄ *nazywamy każdy graf postaci*

$$P = (\{x_0, x_1, \ldots, x_k\}, \{x_0x_1, x_1x_2, \ldots, x_{k-1}x_k\})$$

gdzie $x_i \neq x_j$ *dla* $0 \leqslant i < j \leqslant k$.

Definicja 1.1.24. DŁUGOŚCIĄ ŚCIEŻKI P *nazywamy liczbę jej krawędzi. Ścieżkę długości* k *nazywamy* k-ŚCIEŻKĄ *i stosujemy oznaczenie* P_k

Przykład 1.1.14. *Graf* G *z przykładu 1.1.9 jest ścieżką długości* 4, *możemy zatem zapisać równoważnie*

$$G = P_4 = (\{a, b, c, d, e\}, \{ab, bc, cd, de\})$$

Oznaczenie 1.1.4. *Ścieżkę możemy jednoznacznie zdefiniować przy pomocy ciągu $x_0x_1 \ldots x_k$, ponadto wprowadzamy oznaczenie*

$$Px_i = x_0x_1 \ldots x_i$$

oraz

$$x_iP = x_i \ldots x_k$$

a także

$$x_iPx_j = x_i \ldots x_j \qquad \text{dla } i < j$$

Oznaczenie 1.1.5. *Jeśli suma ścieżek też jest ścieżką, to zamiast pisać $Px \cup xQy \cup yR$ będziemy używać oznaczenia $PxQyR$.*

Przykład 1.1.15. *Analizując grafy z przykładu 1.1.8 jeśli $P = G \cup G' = abcde$, to $Pc = G$ oraz $cP = G'$.*

Definicja 1.1.25. *Jeśli $P = x_0x_1 \ldots x_k$, to wierzchołki x_0, x_k nazywamy* KOŃCAMI *ścieżki P, a wierzchołki $x_1, \ldots, x_{k-1}$ nazywamy* WIERZCHOŁKAMI WEWNĘTRZNYMI *ścieżki P.*

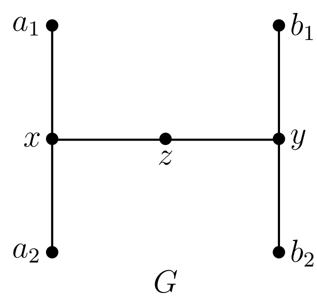
Oznaczenie 1.1.6. *Ścieżkę oznaczoną $x_0 \ldots x_k$ nazywać możemy także $x_0 - x_k$-*ŚCIEŻKĄ.

Przykład 1.1.16. *Kolejny raz wracając do przykładu 1.1.9 stwierdzić możemy, że G jest $a - e$-ścieżką, w której a i e są końcami ścieżki, a wierzchołki b, c, d są wierzchołkami wewnętrznymi.*

Definicja 1.1.26. *Załóżmy, że $A, B \subset V(G)$. $x - y$-ścieżkę oznaczoną jako P, gdzie $x, y \in V(G)$, nazywamy $A - B$-*ŚCIEŻKĄ *jeśli*

$$P \cap A = \{x\} \qquad \text{oraz} \qquad P \cap B = \{y\}$$

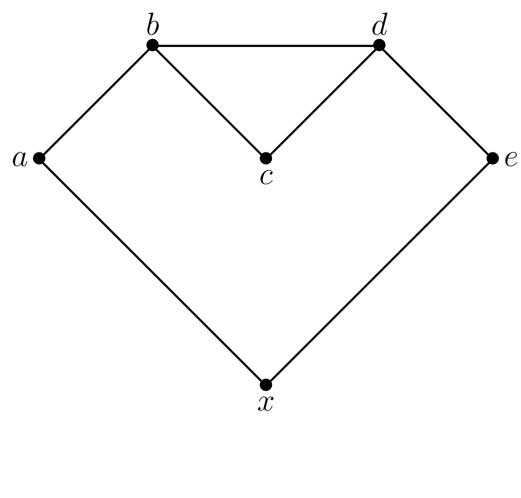
Przykład 1.1.17. *Niech $A = \{a_1, a_2, x\}$ oraz $B = \{b_1, b_2, y\}$, przykład $x-y$-ścieżki będącej $A-B$-ścieżką*



Definicja 1.1.27. *Jeśli H jest grafem, to $x-y$-ścieżkę nazywamy H-ścieżką, jeśli wspólnymi wierzchołkami tych grafów są końce ścieżki P, ponadto*

$$H \cap P = (\{x, y\}, \emptyset)$$

Przykład 1.1.18. *Niech $H = (\{a, b, c, d, e\}, \{ab, bc, bd, cd, de\})$ oraz $P = axe$. Wtedy P jest H-ścieżką.*



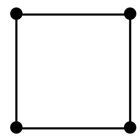
Definicja 1.1.28. CYKLEM *nazywamy każdy graf postaci*

$$x_0x_1 \ldots x_{k-1} + x_0x_{k-1} \qquad dla\ k \geqslant 3$$

Definicja 1.1.29. DŁUGOŚCIĄ CYKLU *nazywamy liczbę krawędzi tego cyklu.*

Oznaczenie 1.1.7. *Cykl długości k nazywamy k-cyklem i oznaczamy symbolem C_k*

Przykład 1.1.19. *Cykl C_4*



C_4

Definicja 1.1.30. *Liczbę $g(G)$ nazywamy* TALIĄ *grafu G i oznaczamy przez nią długość najkrótszego cyklu zawartego w grafie G.*

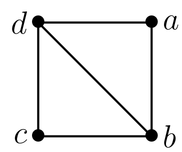
Definicja 1.1.31. *Liczbę $o(G)$ nazywamy* OBWODEM *grafu G i oznaczamy przez nią długość najdłuższego cyklu zawartego w grafie G.*

Przykład 1.1.20. *W grafie z z przykładu 1.1.18 $g(G) = 3$ oraz $o(G) = 6$.*

Uwaga 1.1.7. *Jeśli graf G nie zawiera żadnego cyklu, to $g(G) = \infty$ oraz $o(G) = 0$.*

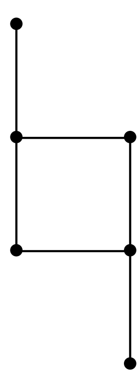
Definicja 1.1.32. CIĘCIWĄ *nazywamy krawędź, która łączy wierzchołki $x, y \in C_k$, ale $xy \notin C_k$.*

Przykład 1.1.21. *Krawędź bd jest przykładem cięciwy dla cyklu abcda*



Definicja 1.1.33. *Cykl $C \subset G$ nazywamy* CYKLEM INDUKOWANYM *jeśli żadna cięciwa tego cyklu nie należy do grafu G*

Przykład 1.1.22. *Przykład grafu z cyklem indukowanym*



Definicja 1.1.34. ODLEGŁOŚCIĄ WIERZCHOŁKÓW *x i y w grafie G nazywamy długość najkrótszej $x - y$-ścieżki zawartej w G i oznaczamy $d_G(x, y)$.*

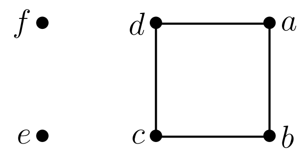
Definicja 1.1.35. ŚREDNICĄ *grafu G nazywamy liczbę* $diam(G) = \max_{v \in G} \max_{u \in G} d(u, v)$.

Definicja 1.1.36. *Jeśli każde dwa wierzchołki grafu G można połączyć ścieżką, to graf G nazywamy* GRAFEM SPÓJNYM.

Przykład 1.1.23. *Analizując graf z przykładu 1.1.21 zauważamy, że np.* $d(b, d) = 1$, *ale* $d(a, c) = 2$. *Ponadto* $diam(G) = 2$ *oraz graf G jest spójny.*

Definicja 1.1.37. *Maksymalny podgraf spójny grafu G nazywamy* SKŁADOWĄ.

Przykład 1.1.24. *Podgrafy* $(\{a, b, c, d\}, \{ab, bc, cd, da\}), (\{e\}, \emptyset)$ *oraz* $(\{f\}, \emptyset)$ *są składowymi grafu G.*



G

Lemat 1.1.2. *Jeśli G jest grafem, który zawiera cykl, to*

$$g(G) \leqslant 2\ diam(G) + 1$$

Dowód. Przypuśćmy, że $g(G) > 2\ diam(G) + 1$. Załóżmy, że $diam(G) = k$ oraz $g(G) \leqslant 2k + 2$. Ponadto niech C będzie najkrótszym cyklem danym następująco:

$$C = v_0 v_1 \dots v_k v_{k+1} \dots v_{2k} v_{2k+1} \dots v_s v_0$$

Wierzchołki v_0 i v_{k+1} są połączone dwoma ścieżkami. Niech P będzie krótszą z tych ścieżek o długości $\leqslant k + 1$, wtedy $d(v_0, v_k) \leqslant k$. Przez Q oznaczmy ścieżkę $v_0 v_{k+1}$ o długości $\leqslant k$. Wtedy jednak $P \cup Q$ zawiera cykl długości co najwyżej $2k + 1$ - sprzeczność. $\square$

Definicja 1.1.38. *Graf oznaczony jako* $G \square G'$ *nazywamy* PRODUKTEM KARTEZJAŃSKIM *grafów G i G′ jeśli* $v(G \square G') = v(G) \times v(G')$ *oraz*

$$uu' \sim vv' \Leftrightarrow (u = v \wedge u' \sim_{G'} v')\ lub\ (u \sim_G v \wedge u' = v')$$

Przez $a \sim_G b$ *rozumiemy oznaczenie krawędzi między wierzchołkami a i b w grafie G.*

Definicja 1.1.39. *Graf oznaczony jako* $G \times G'$ *nazywamy* ILOCZYNEM TENSOROWYM *grafów G i G′ jeśli* $v(G \times G') = v(G) \times v(G')$ *oraz*

$$uu' \sim vv' \Leftrightarrow u' \sim_{G'} v'\ i\ u \sim_G v$$

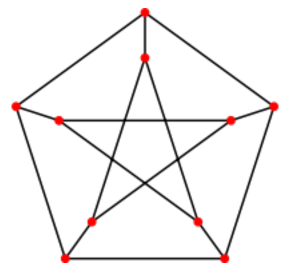
Definicja 1.1.40.

$$G \boxtimes G' = G \square G' \cup G \times G'$$

Definicja 1.1.41. PROMIENIEM *grafu G nazywamy liczbę* $rad(G) = \min_{v \in G} \max_{u \in G} d(u, v)$.

Definicja 1.1.42. *Graf G nazywamy grafem* REGULARNYM *jeśli wszystkie wierzchołki mają ten sam stopień.*

Definicja 1.1.43. GRAFEM PETERSENA *nazywamy graf następującej postaci*



1.2 Wykład 2 - 27.02.2017

Definicja 1.2.1. *Rodzinę zbiorów* $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ *taką, że* $\underset{1 \leqslant i \leqslant n}{\forall} A_i \neq \emptyset$ *oraz* $\underset{1 \leqslant i,j \leqslant n}{\forall} A_i \cap A_j = \emptyset$ *oraz* $\bigcup \mathcal{A} = A$ *nazywamy* PODZIAŁEM ZBIORU A.

Definicja 1.2.2. *Graf* G *nazywamy grafem* k-DZIELNYM, *jeśli istnieje* k*-elementowy podział zbioru* $V(G)$ *składający się ze zbiorów niezależnych. Graf* k*-dzielny o maksymalnej liczbie wierzchołków nazywamy grafem* PEŁNYM k-DZIELNYM.

Oznaczenie 1.2.1. *Graf pełny dwudzielny* $G = (V_1 \cup V_2, E)$, *gdzie* V_1 *i* V_2 *są niezależne oraz* $|V_1| = n,\ |V_2| = m$ *oznaczamy* $K_{n,m}$.

Przykład 1.2.1. *Graf* G' *z przykładu 1.1.4 jest grafem dwudzielnym* $K_{3,3}$

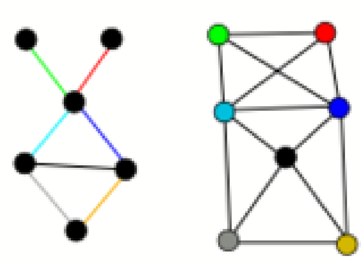
Definicja 1.2.3. *Graf rzędu* n *rozmiaru* 0 *nazywamy grafem pustym i oznaczamy* N_n.

Przykład 1.2.2. *Korzystając z przykładu 1.1.24 możemy zauważyć, że graf* $G[e, f]$ *jest przykładem grafu* N_2.

Uwaga 1.2.1. $K_{n,m} = N_m * N_m$

Definicja 1.2.4. *Jeśli* G *jest grafem prostym, to* GRAFEM KRAWĘDZIOWYM *tego grafu nazywamy* $L(G) = (E(G), F)$, *gdzie* $ef \in F$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* e *i* f *sąsiadują w grafie* G.

Przykład 1.2.3. *Przykład grafu krawędziowego (dla ułatwienia dodano kolorowanie odpowiednich krawędzi w grafie wejściowym i wierzchołków w grafie krawędziowym)*



Twierdzenie 1.2.1. *Każdy cykl w grafie dwudzielnym ma długość parzystą.*

Dowód. Ustalmy cykl $v_1 v_2 \dots v_n v_1 \subset G$, gdzie G jest grafem dwudzielnym. Niech V_1, V_2 będą zbiorami niezależnymi takimi, że $V_1 \cup V_2 = V(G)$ oraz

$$\underset{i<n}{\forall} (v_i \in V_1 \Rightarrow v_{i+1} \in V_2,\ v_i \in V_2 \Rightarrow v_{i+1} \in V_1,\ v_n \in V_1 \Rightarrow v_1 \in V_2,\ v_n \in V_2 \Rightarrow v_1 \in V_1)$$

Możemy założyć, że tylko wierzchołki o indeksach nieparzystych (parzystych) należą V_1 (V_2), zatem $v_n \in V_2$, stąd n jest parzyste. □

Przypomnienie 1.2.1. *Mówimy, że graf G jest spójny, jeśli $\underset{u,v \in V(G)}{\forall}$ istnieje $u - v$-ścieżka.*

Definicja 1.2.5. Drogą *w grafie G nazywamy taki ciąg wierzchołków, w którym każde 2 wierzchołki występujące bezpośrednio po sobie są sąsiadami.*

Przykład 1.2.4. *Jedną z dróg w przykładzie 1.1.18 jest edcbde (pamiętajmy, że każda ścieżka jest drogą, ale nie każda droga jest ścieżką).*

Uwaga 1.2.2. *Graf G jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy $\underset{u,v \in V(G)}{\forall}$ istnieje droga, której pierwszym wierzchołkiem jest u, a ostatnim v.*

Twierdzenie 1.2.2. *Jeśli graf G jest grafem spójnym rzędu n, to jego wierzchołki możemy tak ponumerować, że $\underset{1 \leqslant i \leqslant n}{\forall}$ $G_i = G[v_1, \dots, v_i]$ jest grafem spójnym.*

Dowód.

1. Niech V_1 będzie dowolnym wierzchołkiem.
2. Załóżmy, że ponumerowaliśmy i wierzchołków ($G_i = G[v_1, \dots, v_i]$ jest spójny)
3. Jeśli $G_i \neq G$ to niech $u \in G \setminus G_i$. Skoro G jest spójny, to na pewno istnieje $u - G_i$-ścieżka oznaczmy ją P. Niech v_{i+1} będzie ostatnim wierzchołkiem ścieżki P, $v_{i+1} \notin G_i$. G_{i+1} będzie spójny, bo v_{i+1} jest sąsiadem wierzchołka z grafu G_i.

□

Twierdzenie 1.2.3. *Jeśli G jest grafem rzędu n rozmiaru m, ma k składowych, to*

$$n - k \leqslant m \leqslant \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}$$

Dowód.

I) Przeprowadzimy indukcję względem m. Jeśli $m = 0$, to $n - k = 0$. Ustalmy graf o rozmiarze m, o minimalnej liczbie krawędzi. Wówczas $G - e$, gdzie e jest dowolną krawędzią, ma $k+1$ składowych oraz rozmiar $m - 1$. Z założenie indukcyjnego $n - (k+1) \leqslant m - 1$, a zatem $n - k \leqslant m$.

II) 1) Graf ma maksymalną liczbę krawędzi, gdy wszystkie jego składowe są grafami pełnymi.

2) Pokażemy, że dla $1 < i < j$

$$||k_i|| + ||k_j|| < ||k_{i+1}|| + ||k_{j+1}||$$

3) Z podpunktu 2) wynika, że $G = K_{n-(k-1)} \cup (k-1) \cdot K_1$ $(=\ N_{k-1})$, zatem

$$\frac{(j+1)j}{2} + \frac{(i-1)(i-2)}{2} - \frac{i(i-1)}{2} - \frac{j(j-1)}{2} = \frac{j[(j+1)-(j-1)]}{2} + \frac{(i-1)[i-2-i]}{2} = j-(i-1) > 0$$

Stąd

$$||K_{n-(k-1)}|| = \frac{[n-(k-1)][n-(k-1)-1]}{2}$$

□

Definicja 1.2.6. ZBIOREM ROZSPAJAJĄCYM *grafu spójnego nazywamy zbiór krawędzi F grafu G taki, że graf $G - F$ jest niespójny. Minimalny zbiór rozspajający nazywamy* ROZCIĘCIEM, *a jeśli rozcięcie jest* 1*-elementowe to nazywamy je* MOSTEM.

Przykład 1.2.5. *Przykładowym zbiorem rozspajającym jest zbiór $F = \{ab, de\}$ z przykładu 1.1.18, a przykładem mostu jest krawędź xz z przykładu 1.1.17.*

Definicja 1.2.7. *Liczbę $\lambda(G)$ nazywamy* SPÓJNOŚCIĄ KRAWĘDZIOWĄ *i oznaczamy przez nią moc najmniej licznego rozcięcia*

Przykład 1.2.6. *Dla cyklu C_4 z przykładu 1.1.19 mamy $\lambda(C_4) = 2$.*

Definicja 1.2.8. ZBIOREM ROZDZIELAJĄCYM *grafu spójnego nazywamy zbiór wierzchołków $U \subset V(G)$ taki, że $G - U$ nie jest spójny (lub $G - U = K_1$). Jeśli istnieje* 1*-elementowy zbiór rozdzielający, to jedyny jego element nazywamy* WIERZCHOŁKIEM ROZDZIELAJĄCYM

Definicja 1.2.9. *Liczbę $\kappa(G)$ nazywamy* SPÓJNOŚCIĄ WIERZCHOŁKOWĄ *i oznaczamy przez nią minimalną liczbę wierzchołków jaką należy usunąć, aby rozspoić graf.*

Przykład 1.2.7. *Dla grafu z przykładu 1.1.17 wierzchołkiem rozdzielającym jest wierzchołek z, a zatem $\kappa(G) = 1$.*

Twierdzenie 1.2.4. *Jeżeli graf G jest spójny, to*

$$\delta(G) \geqslant \lambda(G) \geqslant \kappa(G)$$

Dowód. [nierówności $\lambda(G) \geqslant \kappa(G)$] Przeprowadzimy indukcję względem $\lambda(G)$

1. $\lambda(G) = 1$, wówczas istnieje most $e \in E(G)$. Wystarczy wtedy usunąć e i otrzymujemy graf niespójny lub K_1

2. Krok indukcyjny: Załóżmy, że dla każdego grafu G, w którym $\lambda(G) = k$ spełniona jest nierówność $\lambda(G) \geqslant \kappa(G)$. Rozważmy graf G, którego rozcięcie ma moc $k+1$. Niech e należy do rozcięcia grafu G, wtedy $\lambda(G-e) = k$. Z założenia indukcyjnego $\kappa(G-e) \leqslant k$, zatem istnieje zbiór rozdzielający U taki, że $|U| \leqslant k$ tzn. $G - e - U$ jest niespójny, lub jest grafem K_1. $G - e - U = G - U - e$ lub $G - U$ w przypadku, gdy $e \notin G - U$. Wtedy $\lambda(G-U) \leqslant 1$ oraz $\kappa(G-U) \leqslant 1$. Istnieje wtedy pewien wierzchołek x, że $G - U - x$ nie jest spójny oraz $|U \cup \{x\}| \leqslant k+1$.

□

1.3 Wykład 3 - 06.03.2017

Definicja 1.3.1. *Graf G nazywamy k-spójnym jeśli $\kappa(G) \geqslant k$*

Uwaga 1.3.1.

a) Graf jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy jest 1-spójny

b) Jeśli G jest k-spójny ($k > 1$) to jest również $(k-1)$-spójny

Lemat 1.3.1. *Jeśli graf G jest spójny, to krawędź $e \in G$ jest mostem wtedy i tylko wtedy, gdy nie należy ona do żadnego cyklu.*

Dowód. ($\Longrightarrow$)

1. Załózmy, że krawędź $e = xy$ należy do każdej ścieżki łączącej dwa wierzchołki różnych składowych (oznaczmy je jako u i v)
2. Przypuśćmy, że $C = P \cup xy$ jest cyklem w grafie G.
3. Niech Q będzie $u - v$-ścieżką w grafie G.
4. Wtedy $Qx \cup P \cup yQ$ zawiera $u - v$ ścieżkę (i nie zawiera krawędzi e) - sprzeczność z założeniem z punktu 1.

($\Longleftarrow$)

1. Załóżmy, że w grafie G nie ma żadnego cyklu.
2. Przypuśćmy, że $e = xy$ nie jest mostem, $G - e$ jest grafem spójnym. W grafie $G - e$ niech P będzie $x - y$-ścieżką.
3. $P \cup xy$ jest cyklem w grafie G - sprzeczność z założeniem z punktu 1.

□

Twierdzenie 1.3.1. *Graf G jest grafem 2-spójnym wtedy i tylko wtedy, gdy można go otrzymać z cyklu poprzez dodawanie H-ścieżek do wcześniej utworzonych grafów H*

Dowód. ($\Longleftarrow$)

1. Cykl jest grafem 2-spójnym.
2. Załóżmy, że graf H jest skonstruowany zgodnie z treścią twierdzenia.
3. Niech $H_1 = H \cup P$, gdzie P jest H-ścieżką.
4. Niech ponadto $v \in H_1$.
5. Pokażemy, że $H_1 - v$ jest spójny.

   1° Niech $v \in H \setminus P$, graf $H - v$ jest spójny (bo H jest 2-spójny). Zatem graf $H - v \cup P = H \cup P - v$ jest spójny.

2° Niech $v \in P$. Wtedy $H_1 - v = H \cup P_{v_-} \cup P_{v_+}$ jest spójny (wyjaśnienie tego oznaczenia: $P = v_0 \ldots, v_i \ldots v_- v v_+ \ldots v_k$

($\Longrightarrow$)

1. Skoro G jest 2-spójny, to zawiera cykl.
2. Niech $H \subset G$ będzie maksymalnym grafem indukowanym (stworzonym zgodnie z tezą twierdzenia).
3. H jest indukowanym podgrafem, $u, v \in H$ oraz $uv \in E(G)$. Gdyby $uv \notin E(H)$, to uv byłoby H-ścieżką - sprzeczność z maksymalnością grafu H.
4. Jeśli $H \subset G$, to istnieje wierzchołek $v \in G - H$ i istnieje wierzchołek $u \in H$, że $uv \in E(G)$.
5. $G - u$ jest spójny.
6. Istnieje $v - H$ ścieżka oznaczmy ją przez P w $G - u$.
7. $uvP - H$-ścieżka - sprzeczność z maksymalnością grafu H, zatem $H = G$.

□

Definicja 1.3.2. *Niech $G = (V, E)$ będzie grafem spójnym oraz niech $X \subset V \cup E$, a $A, B \subseteq V$ będa zbiorami niekoniecznie rozłącznymi. Mówimy, że* ZBIÓR X ROZDZIELA *jeśli dla każdej $A - B$-ścieżki należy pewien element zbioru X.*

Twierdzenie 1.3.2. *[**Mengera**]*
Minimalna liczba wierzchołków oddzielających zbiory A i B, gdzie $A, B \subset V$ w grafie $G = (V, E)$ jest równa maksymalnej liczbie rozłącznych $A - B$-ścieżek.

Oznaczenie 1.3.1. $\kappa(G, A, B) = k$ *- minimalna liczba wierzchołków oddzielających zbiory A i B*

Komentarz 1.3.1. *Jeśli w grafie G występuje l rozłącznych $A - B$-ścieżek, to $\kappa(G, A, B) \geqslant l$*

Komentarz 1.3.2. *Jeśli G jest l-spójny, to liczba rozłącznych $A - B$-ścieżek jest ograniczona przez $\kappa(G, A, B)$. Zakładamy, że G jest k-spójny. Pokażemy, że jeśli w grafie G istnieje rodzina $A - B$-ścieżek rozłącznych $\mathcal{P}$, gdzie $|\mathcal{P}| < k$, to istnieje rodzina $\mathcal{Q}$ rozłącznych $A - B$-ścieżek, że końce ścieżek z $\mathcal{Q}$ to końce ścieżek z $\mathcal{P}$ i $|\mathcal{Q}| = k + 1$.*

Dowód. Przeprowadzimy indukcję po $|G - B|$. Załóżmy, że $\mathcal{P}$ jest rodziną rozłącznych $A - B$-ścieżek, $|\mathcal{P} < k|$ oraz $|G| > k$.

1. Niech R będzie $A - B$-ścieżką, która omija wierzchołki, które należą do B i są końcami ścieżek z $\mathcal{P}$. Jeśli R jest rozłączna ze ścieżkami z $\mathcal{P}$, to $P \cup \{R\}$ jest żądaną rodziną.
2. Jeśli R ma wierzchołki wspólne z pewnymi ścieżkami z $\mathcal{P}$ to niech x będzie ostatnim wierzchołkiem ścieżki $P \in \mathcal{P}$
$$B' = B \cup V(xP \cup xR)$$
$$\mathcal{P}' = \mathcal{P} \setminus \{P\} \cup \{xP\} - \text{ rodzina } A - B' - \text{ścieżek}$$
$$|G - B'| < |G - B|$$

Stosujemy założenie indukcyjne. Istnieje rodzina $A-B'$-ścieżek rozłącznych, oznaczmy ją jako $\mathcal{Q}$ taka, że $|\mathcal{Q}| = |\mathcal{P}|+1$. Końce ścieżek z $\mathcal{Q}$ zawierają końce ścieżek z P'. W $\mathcal{Q}$ jest jedna ścieżka Q, której końcem jest wierzchołek x oraz jedna ścieżka, której końcem jest wierzchołek y, gdzie y jest różny od końców ścieżek z $\mathcal{P}$

1° $y \in xP \quad Q \cup xR \quad Q' \cup xP$

2° $y \notin xP \quad Q \cup xP$ (o ile $y \notin B$).

□

1.4 Wykład 4 - 13.03.2017

Wniosek 1.4.1. *Jeśli w grafie spójnym $a, b \in V(G)$ oraz $ab \notin E(G)$ to minimalna liczba wierzchołków rozdzielających wierzchołek a od b oraz różnych od a oraz b jest równa maksymalnej liczbie niezależnych $a-b$-ścieżek.*

Dowód. Korzystamy z twierdzenia Mengera dla zbiorów $N(a)$ i $N(b)$. Istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między rozłącznymi $N(a)-N(b)$-ścieżkami oraz niezależnymi $a-b$-ścieżkami. Jeśli U jest zbiorem wierzchołków rozdzielających zbiory $N(a), N(b)$. U jest zbiorem wierzchołków rozdzielających a od b i różnych od a i b. □

Twierdzenie 1.4.1. ***[Uogólnione Twierdzenie Mengera]***
Graf G jest k-spójny wtedy i tylko wtedy, gdy każde jego dwa wierzchołki są połączone k-niezależnymi ścieżkami.

Dowód. ($\Longleftarrow$)
Jeśli usuniemy mniej niż k-wierzchołków to każde dwa wierzchołki w grafie będą połączone przynajmniej jedną ścieżką.
($\Longrightarrow$)

1. $|G| > k$ (na mocy k-spójności)

2. Przypuśćmy, że wierzchołki $a, b \in V$ nie są połączone k niezależnymi ścieżkami. Nie może istnieć mniej niż k wierzchołków rozdzielających a, b, bo graf jest k-spójny. Zatem $ab \in E(G)$ (porównaj z twierdzeniem Mengera).

3. $G - ab$ - w tym grafie istnieje co najwyżej $k-2$ niezależnych $a-b$-ścieżek.

4. Z wniosku w grafie $G - ab$ istnieje zbiór rozdzielający wierzchołki a i b mocy co najwyżej $k-2$ (oznaczmy go jako U).

5. Z punktu 1 w grafie $G-U$ istnieje $x \in V(G-U)$ taki, że $x \neq a$, $x \neq b$. x jest w jednej ze składowych grafu $G-U$. Możemy założyć, że x jest w tej samej składowej co wierzchołek b. Zbiór U oddziela a od x (w $G-ab$). $U \cup \{b\}$ rozdziela wierzchołki a i x w grafie G, ale $|U \cup \{b\}| \leqslant k-1$ - sprzeczność z k-spójnością grafu.

□

Definicja 1.4.1. DROGĄ ZAMKNIĘTĄ *nazywamy drogę, w której pierwszy i ostatni wierzchołek sa sobie równe.*

Definicja 1.4.2. CYKLEM EULERA *(w grafie spójnym G) nazywamy drogę zamkniętą, która zawiera wszystkie krawędzie danego grafu i każda krawędź występuje tam dokładnie raz.*

Definicja 1.4.3. GRAFEM EULERA *nazywamy graf, który zawiera cykl Eulera.*

Definicja 1.4.4. ŚCIEŻKĄ EULERA *nazywamy drogę, która zawiera wszystkie krawędzie danego grafu i każda krawędź występuje tam dokładnie raz.*

Definicja 1.4.5. *Graf nazywamy* PÓLEULEROWSKIM, *jeśli zawiera on ścieżkę Eulera.*

Lemat 1.4.1. *Jeśli $\delta(G) \geqslant 2$, $|G| \geqslant 3$, to w grafie istnieje cykl.*

Dowód. Ustalmy dowolny wierzchołek $v_1 \in G$. Tworzymy różnowartościowy ciąg wierzchołków, w którym sąsiednie wierzchołki sąsiadują w grafie. Ciąg jest skończony i ostatni wierzchołek sąsiaduje z pewnym wierzchołkiem występującym wcześniej. □

Twierdzenie 1.4.2. *[**Eulera**]*
Załóżmy, że G jest grafem spójnym. G jest grafem Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy stopień każdego wierzchołka jest liczbą parzystą.

Dowód. ($\Longrightarrow$) W grafie istnieje cykl Eulera.

$$v_1 v_2 \dots v_k v_1$$

Możemy wyznaczyć stopnie wierzchołków przechodząc przez cykl Eulera. Gdy przechodzimy przez dany wierzchołek to jego stopień zwiększamy o 2.
($\Longleftarrow$)
W grafie G nie ma wierzchołków izolowanych zatem $\delta \geqslant 2$. Z lematu 1.4.1 w grafie G istnieje cykl C. Jeśli cykl jest cyklem Eulera to mamy koniec dowodu. Jeśli nie, to rozważmy $G - E(C)$. W grafie $G - E(C)$ dalej wierzchołki mają stopnie parzyste. Niech v będzie wierzchołkiem z C oraz wierzchołkiem z $G - E(C)$, którego stopień jest większy lub równy 2. Dla wierzchołka v konstruujemy, tak jak w dowodzie lematu 1.4.1 droge zamkniętą. Przechodząc najpierw po jednym cyklu, a potem po drugim uzyskujemy droge zamkniętą. Procedurę powtarzamy tak długo, aż wyczepiemy krawędzie. □

Algorytm 1.4.1. *[**Fleurego**]*
Algorytm wyznaczania cyklu Eulera

1. *Cykl zaczynamy w dowolnym wierzchołku.*
2. *Do kolejnego wierzchołka przechodzimy krawędzią, która nie jest mostem, ale jeśli jest to możliwe.*
3. *Z grafu usuwamy "przechodzone" krawędzie i izolowane wierzchołki.*

Dowód. Wystarczy pokazać, że w każdym kroku konstrukcji mamy graf spójny. Załóżmy, że utworzyliśmy drogę, której ostatnim wierzchołkiem jest wierzchołek v, otrzymany graf jest spójny. Pokażemy, że w kolejnym kroku konstrukcji również otrzymamy graf spójny.

1° Istnieje krawędź incydentna z v, która nie jest mostem.

2° Jedyne wychodzące krawędzie to mosty, w przypadku jednego mostu usunięcie tej krawędzi nie rozspoi grafu. Przypuśćmy, że istnieją przynajmniej dwa mosty. Rozważmy graf $G - e$ - graf ten nie jest spójny. Pierwszy wierzchołek drogi oraz ostatni mają stopnie nieparzyste. W składowej, do której należy wierzchołek u jest tylko jeden wierzchołek stopnia nieparzystego.

□

Definicja 1.4.6. CYKLEM HAMILTONA *w grafie spójnym G nazywamy cykl, do którego należą wszystkie wierzchołki G.*

Definicja 1.4.7. GRAFEM HAMILTONA *nazywamy graf zawierający cykl Hamiltona.*

Definicja 1.4.8. ŚCIEŻKĄ HAMILTONA *w grafie spójnym G nazywamy ścieżkę, która przechodzi przez wszystkie wierzchołki grafu G dokładnie raz.*

Definicja 1.4.9. *Graf nazywamy* PÓŁHAMILTONOWSKIM, *gdy zawiera on ścieżkę Hamiltona.*

1.5 Wykład 5 - 20.03.2017

Definicja 1.5.1. *Graf G nazywamy* PRAWIE HAMILTONOWSKIM, *jeśli dodanie jednej krawędzi spowoduje powstanie cyklu Hamiltona.*

Twierdzenie 1.5.1. *[**Diraca**]*
Jeżeli w grafie prostym rzedu n, $n \geqslant 3$ dla każdego wierzchołka $v \in G$ spełniona jest nierówność $deg(v) \geqslant \frac{n}{2}$, to G jest grafem Hamiltona.

Twierdzenie 1.5.2. *[**Orego**]*
Jeśli w grafie prostym rzędu n, $n \geqslant 3$ dla każdych dwóch takich wierzchołków $u, v \in V(G)$, że $uv \notin E(G)$ spełniona jest nierówność $deg(u) + deg(v) \geqslant n$, to G jest grafem Hamiltona.

Dowód. Załóżmy, że G spełnia założenia twierdzenia. Przypuśćmy, że G nie jest hamiltonowski. $G' \supseteq G$, gdzie G' jest prawie hamiltonowski, $V(G') \supseteq V(G) - G'$ jest półhamiltonowski. W grafie G' istnieje ścieżka Hamiltona (w grafie G' założenie twierdzenia sa nadal spełnione)

$$P = v_1 v_2 \dots v_n$$

1. $v_1 v_n \notin E(G')$
2. Niech $deg(v_1) = k$. Wówczas $deg(v_n) \geqslant n - k$ (na mocy założenia)
3. Istnieje taki wierzchołek $v_i \in N(v_1)$, że $v_{i-1} \in N(v_n)$. Istotnie, gdyby tak nie było to $deg(v_n) \leqslant n - k - 1$
4. $v_1 P v_{i-1} v_n P v_i v_1$ jest cyklem Hamiltona - sprzeczność z założeniem (G' prawie hamiltonowski).

□

Definicja 1.5.2. DRZEWEM *nazywamy każdy graf prosty, acykliczny i spójny.*

Definicja 1.5.3. LASEM *nazywamy graf prosty i acykliczny.*

Komentarz 1.5.1. *Każda składowa lasu jest drzewem.*

Twierdzenie 1.5.3. *Załóżmy, że T jest grafem prostym rzędu n. Wówczas następujące warunki są równoważne*

i) T jest drzewem.

ii) T jest acykliczny i ma $n-1$ krawędzi.

iii) T jest spójny i ma $n-1$ krawędzi.

iv) T jest spójny i każda krawędź jest mostem.

v) Każde dwa wierzchołki sa połączone dokładnie jedną ścieżką

vi) T jest acykliczny i po dodaniu jednej krawędzi będzie zawierał dokładnie jeden cykl.

Dowód. $i) \Longrightarrow ii)$
Acykliczność jest spełniona. Pokażemy, że T ma $n-1$ krawędzi (indukcyjnie względem n). Usuńmy z drzewa T jedna krawędź $e = xy$. Graf T nie jest spójny, bo x i y nie sa połączone ścieżką P w $T-e$. Gdyby były, to $e \cup P$ byłby cyklem. Do składowych grafu $T-e$ stosujemy założenie indukcyjne. Każda ze składowych (są dwie) ma krawędzi o jedną mniej niż wierzchołków.

$$||T-e|| = n-2 \Longrightarrow ||T|| = n-1$$

$ii) \Longrightarrow iii)$
Skoro T jest acykliczny, to każda jego składowa jest drzewem. Stosujemy punkt $i) \Longrightarrow ii)$ dla każdej składowej. Niech k oznacza liczbę składowych. Wtedy $||T|| = n-k$, z drugiej strony $||T|| = n-1$, a stąd $k = 1$.
$iii) \Longrightarrow iv)$
Niech e będzie dowolną krawędzią. $||T-e|| = n-2$, z twierdzenia 1.2.3 o liczbie krawędzi w grafie $T-e$ wiemy, że graf ten nie jest spójny $(n-1 \leqslant n-2)$
$iv) \Longrightarrow v)$
Przeprowadzimy dowód niewprost. Przypuśćmy, że istnieja dwie $x-y$ ścieżki: $P, \tilde{P}$. Stąd $P \cup \tilde{P}$ zawiera cykl. Przypomnijmy teraz, że krawędź jest mostem wtedy i tylko wtedy, gdy nie należy do żadnego cyklu. Stąd wiemy, że żadna z krawędzi cyklu nie jest mostem. Skoro T zawiera cykl, to zawiera też krawędzie, ktore nie są mostami.
$v) \Longrightarrow vi)$
Gdyby T zawierał cykl, to każda dwa wierzchołki tego cyklu byłyby połączone co najmniej dwoma ścieżkami. T wobec tego jest acykliczny. Niech $e = xy \notin T$, w T istnieje $x-y$-ścieżka P, a zatem $xy \cup P$ jest cyklem. Przypuśćmy, że $T \cup e$ zawiera dwa cykle oznaczmy je $e \cup P$ oraz $e \cup P'$, lecz wtedy $P \cup P'$ zawiera cykl oraz ten cykl zawarty jest w T - sprzeczność.
$vi) \Longrightarrow i)$
Wystarczy pokazać, że T jest spójny. Ustalmy $x, y \in T$. Pokażemy, że x i y są połączone ścieżką.

1. Jeśli $xy \in T$, to xy jest $x-y$-ścieżką.

2. Jeśli $xy \notin T$, to wtedy tworzymy $T \cup xy$, w grafie mamy cykl $C = xy \cup P$, gdzie P jest $x-y$-ścieżką w T.

□

Definicja 1.5.4. *Załóżmy, że $r \in V(T)$. W drzewie T wprowadzimy porządek*

$$\underset{v \in V(T)}{\forall} \quad r \leqslant v$$

Natomiast dla $u, v \in V(T)$

$$u \leqslant v \iff u \in rTv$$

Drzewo z tak zdefiniowanym porządkiem nazywamy DRZEWEM UKORZENIONYM

Uwaga 1.5.1. *Poprzez uTv oznaczamy jedyną $u - v$-ścieżkę w drzewie T*

Definicja 1.5.5. *Jeśli mamy drzewo ukorzenione $T \subseteq G$, to T nazywamy* DRZEWEM NORMALNYM *(w G), jeśli końce każdej T-ścieżki (zawartej w G są porównywalne).*

Definicja 1.5.6.

$$N(C) = \{v \in G\colon v \notin C,\ \textit{istnieje } u \in C,\ uv \in E(G)\}$$

Twierdzenie 1.5.4. *Każdy graf spójny zawiera drzewo normalne rozpinające ten graf.*

Dowód. Niech T będzie maksymalnym drzewem normalnym, jeśli $T \subseteq G$, $V(T) = V(G)$ to mamy koniec dowodu. Jeśli jednak $V(T) \subset V(G)$ to rozważmy $G - T$. Niech C będzie składową grafu $G - T$ oraz $N(C) \subset T$. $N(C)$ jest łańcuchem. Niech $x, y \in N(C)$ oraz P będzie T-ścieżką $(x - v - u - y)$. Niech a będzie największym elementem łańcucha $N(C)$. Ponadto niech $b \in C$ tak, że $ab \in E(G)$. Konstruujemy $T' = T \cup ab$. Wtedy T' jest drzewem normalnym. Ustalmy dowolną T'-ścieżkę

1. Jeżeli T'-ścieżka jest T-ścieżką, to koniec dowodu
2. Jeśli b jest jednym z końców tej ścieżki, a drugi z końców oznaczymy z, to $z \in N(C)$ oraz $z \leqslant a$, a zatem $a \in rTb$.

□

1.6 Wykład 6 - 27.03.2017

Definicja 1.6.1. *Niech $G = (V, E)$ będzie grafem. Funkcję $w\colon E \to \mathbb{R}_+$ nazywamy* WAGĄ.

Definicja 1.6.2. *Parę (G, w), gdzie G jest grafem, a w wagą, nazywamy* GRAFEM WAŻONYM

Definicja 1.6.3. WAGĄ GRAFU *G nazywamy liczbę*

$$w(G) = \sum_{e \in E(G)} w(e)$$

Algorytm 1.6.1. ***[Kruskala]***
W każdym kroku wybieramy krawędź o minimalnej wadze tak, aby nie stworzyć cyklu.

Twierdzenie 1.6.1. *W wyniku algorytmu Kruskala otrzymujemy drzewo o minimalnej wadze.*

Dowód. Niech T będzie drzewem uzyskanym w wyniku algorytmu Kruskala. $E(T) = \{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$. Przypuśćmy, że T nie jest drzewem o minimalnej wadze. Niech T' będzie drzewem o minimalnej wadze, które "zgadza się najdłużej z algorytmem" czyli istnieje k, że $e_1, \ldots, e_k \in E(T')$ oraz dla żadnego drzewa o minimalnej wadze $\tilde{T}$ nie jest prawdą, że $e_1, \ldots, e_k, e_{k+1} \in E(\tilde{T})$

1. $e_{k+1} \notin T'$, a zatem $T' + e_{k+1}$ zawiera cykl C oraz istnieje $e \in C \colon e \notin T$.

2. Rozważmy $T' + e_{k+1} - e$. Jest to drzewo rozpinające. Jakie są wagi krawędzi e_{k+1}, e

$$w(e_{k+1}) \leqslant w(e)$$

$$w(T' + e_{k+1} - e) \leqslant w(T') \text{ sprzeczność}$$

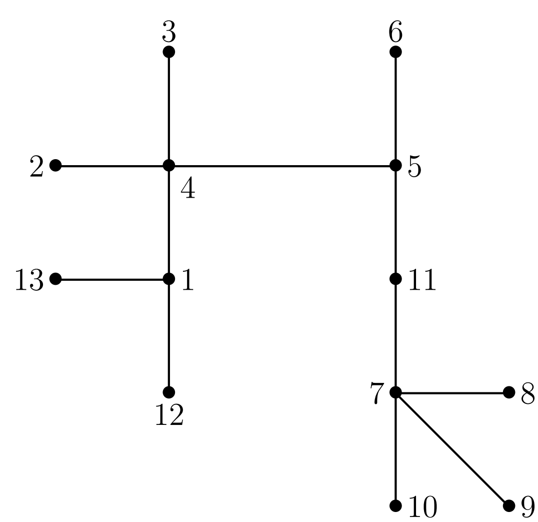
□

Definicja 1.6.4. *Drzewo T nazywamy* DRZEWEM OZNAKOWANYM *jeśli $V(T) = \{1, \ldots, n\}$ oraz $E(T) \subseteq [V(T)]^2$.*

Twierdzenie 1.6.2. *[**Cayleya**]*
Istnieje dokładnie n^{n-2} drzew oznakowanych.

Dowód. Istnieje bijekcja między zbiorem drzew oznakowanych rzedu n, a zbiorem wszystkich ciągów $(n-2)$-elementowych o wyrazach ze zbioru n-elementowego. Tworzymy dwa ciągi (a_n) i (b_n) długości $n-2$. Na początek niech $T_1 = T$, jako b_1 bierzemy liść (wierzchołek stopnia 1) drzewa T_1 o najmniejszym numerze, a jako a_1 bierzemy jego sąsiada. Następnie tworzymy drzewo $T_2 = T_1 - b_1$ i powtarzamy procedurę: jako b_2 bierzemy liść T_2 o najmniejszym numerze, a jako a_2 jego sąsiada, itd ($T_i = T_{i-1} - b_{i-1}$). aż otrzymamy wyrazy b_{n-2} oraz a_{n-2}. Nas interesuje ciąg (a_n) (nazywamy go KODEM PRÜFERA)
Procedurę tę można odwrócić: niech $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2})$ będzie ciągiem o wyrazach ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$. Jako b_1 wybieramy najmniejszą liczbę ze zbioru $\{1, \ldots, n\}$, która nie występuje w ciągu $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2})$. Tworzymy krawędź $a_1 b_1$. Następnie jako b_2 wybieramy najmniejszą liczbę ze zbioru $\{1, \ldots, n\}$ różną od b_1, która nie występuje w ciągu $(a_2, \ldots, a_{n-2})$ i tworzymy krawędź $a_2 b_2$, itd. aż otrzymamy b_{n-2} oraz krawędź $a_{n-2} b_{n-2}$. Na koniec tworzymy krawędź między wierzchołkami, których wartości nie wystąpiły w ciągu b_n □

Przykład 1.6.1. *Tworzenie kodu Prüfera*



Uzyskane ciągi:
$(a_n) = (4, 4, 5, 7, 7, 7, 11, 5, 4, 1, 1,)$ *- kod Prüfera oraz pomocniczy* $(b_n) = (2, 3, 6, 8, 9, 10, 7, 11, 5, 4, 12)$.

Definicja 1.6.5.
Rodzaje grafów:

- Graf prosty - *gdy mamy "tradycyjny" zbiór wierzchołków* V *oraz* $E \subseteq [V]^2$
- Hipergraf - *gdy mamy tą różnicę, że* $E \subseteq [V]^{<\omega}$
- Graf skierowany - *gdy* $V \cap E = \emptyset$ *(wierzchołki i krawędzie "wsadzamy jakby do jednego wora") oraz istnieją funkcje* $init\colon E \to V$ *oraz* $ter\colon E \to V$
- Graf zorientowany - *mówimy, że graf* D *skierowany jest* orientacją *grafu prostego* G*, jeśli* $V(G) = V(D),\ E(G) = E(D)$ *oraz* $\underset{e=xy}{\forall}\ \{init(e), ter(e)\} = \{x, y\}$ *Zatem grafem zorientowanym nazywamy graf skierowany, który jest orientacją grafu prostego.*
- Multigraf - *gdy* $V \cap E = \emptyset$ *oraz istnieje funkcja* $f\colon E \to V \cup [V]^2$*, a także macierz sąsiedztwa rzędu* n*, w której*

  $$a_{ij} = \begin{cases} 1 & v_iv_j \in E(G) \\ 0 & v_iv_j \notin E(G) \end{cases}$$

  Macierz ta jest

  1. *symetryczna*
  2. *binarna*
  3. *na przekątnej posiada zera*

1.7 Wykład 7 - 03.04.2017

Definicja 1.7.1. *Jeśli* G *jest grafem prostym rzędu* n*, rozmiaru* m*, to*

- macierzą sąsiedztwa *tego grafu nazywamy macierz rozmiaru* $n \times n$ *postaci*

  $$a_{ij} = \begin{cases} 1 & v_iv_j \in E(G) \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

- macierzą incydencji *tego grafu nazywamy macierz rozmiaru* $n \times m$ *postaci*

  $$a_{ij} = \begin{cases} 1 & v_i \text{ jest incydentny z krawędzią } e_j \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Uwaga 1.7.1. *W każdej kolumnie macierzy incydencji grafu prostego występują dokładnie dwie jedynki.*

Uwaga 1.7.2. *W każdym wierszu macierzy incydencji liczba jedynek odpowiada stopniowi wierzchołka, któremu odpowiada ten wiersz.*

Uwaga 1.7.3. *Diagonalna macierz stopni wierzchołków grafu* G *jest macierzą rozmiaru* $n \times n$ *postaci*

$$d_{ij} = \begin{cases} d(v_i) & \text{jeżeli } i = j \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Definicja 1.7.2. DOPEŁNIENIEM ALGEBRAICZNYM *macierzy M nazywamy każda liczbę postaci*

$$(-1)^{i+j}det(M(i|j))$$

gdzie dla $1 \leqslant i, j \leqslant n$ $M(i|j)$ jest macierzą powstałą z macierzy M przez wykreślenie i-tego wiersza i j-tej kolumny.

Twierdzenie 1.7.1. ***[macierzowe o drzewach (Kirchoffa)]***
Liczba drzew rozpinających oznakowanego grafu prostego jest równa dowolnemu dopełnieniu algebricznemu macierzy $D - A$, gdzie D jest macierzą diagonalną stopni wierzchołków grafu G, a A jest jego macierzą sąsiedztwa.

Dowód.

$$[D-A]_{ij} = \begin{cases} d(v_i) & i = j \\ -1 & i \neq j,\ v_iv_j \in E(G) \\ 0 & i \neq j,\ v_iv_j \notin E(G) \end{cases}$$

Niech N będzie macierzą incydencji grafu G. Niech M będzie macierzą otrzymaną z macierzy N poprzez zamianę w każdej kolumnie jednej jedynki (tej o indeksie mniejszym) na -1

1) $D - A = MM^T$

$$[MM^T]_{ij} = [M]_{i1} \cdot [M^T]_{1j} + [M]_{i2} \cdot [M^T]_{2j} + \ldots + [M]_{im} \cdot [M^T]_{mj} =$$
$$= [M]_{i1} \cdot [M]_{j1} + [M]_{i2} \cdot [M]_{j2} + \ldots + [M]_{im} \cdot [M]_{jm}$$

$$[MM^T]_{ij} = \begin{cases} d(v_i) & i = j \\ -1 & i \neq j,\ v_iv_j \in E(G) \\ 0 & i \neq j,\ v_iv_j \notin E(G) \end{cases}$$

Niech $H \subseteq G$ będzie podgrafem rozpinającym rozmiaru $n-1$, v_p będzie dowolnym wierzchołkiem, a M^* będzie podmacierzą macierzy M rozmiaru $(n-1) \times (n-1)$, której kolumny odpowiadają krawędziom grafu H, natomiast wierszami z tej macierzy są wszystkie wiersze macierzy M z wyjątkiem wiersza odpowiadającego wierzchołkowi v_p.

2) Jeśli H jest drzewem, to $|det(M^*)| = 1$, w przeciwnym przypadku $det(M^*) = 0$. Jeśli H nie jest drzewem ($|H| = n,\ ||H|| = n-1$), to H nie jest spójny. Wtedy niech H_1 będzie składową, do której nie należy wierzchołek v_p. Niech M' będzie podmacierzą macierzy M^* rozmiaru $|V(H_1)| \times n-1$, której wiersze odpowiadają wierzchołkom grafu H_1. Jeśli zsumujemy wektory odpowiadające wierszon tej macierzy, to otrzymamy wektor zerowy. Wiersze macierzy M' są liniowo zależne, zatem wiersze macierzy M^* też są liniowo zależne, a stąd $det(M^*) = 0$.
Niech H będzie drzewem, v_1 będzie dowolnym liściem drzewa H różnym od v_p, e_1 będzie krawędzią incydentną z wierzchołkiem v_1, v_i będzie dowolnym liściem H_{i-1} (H bez wierzchołka v_1) różnym od v_p, a e_i będzie krawędzią incydentną z v_i. Ponadto niech macierz M'' będzie macierzą powstała z macierzy M^*, w której wiersze i kolumny zostały uporządkowane zgodnie z porządkiem wprowadzonym przez powyższą operację. v_i nie jest incydentny z $e_{i+1}, \ldots, e_{n-1}$. M'' jest macierzą dolnotrójkątną, której wyznacznik jest iloczynem wyrazów na przekątnej, a zatem $|det(M^*)| = 1$.

Jeśli wiersze oraz kolumny macierzy (kwadratowej) sumują się do zera, to wszystkie dopełnienia algebraiczne tej macierzy są sobie równe. Niech $i = 1$ oraz $j = 1$, wtedy

$$(-1)^{1+1}det(MM^T)(1|1) = det(M_1M_1^T)$$

gdzie M_1 jest macierzą powstałą z macierzy M przez usunięcie pierwszego wiersza.
Przypomnijmy wzór Cauchy'ego-Bineta:

$$det(AB) = \sum_{\substack{S\subset\{1,\dots,n\}\\ |S|=m}} det(A_s)det(B_s)$$

dla macierzy A rozmiaru $m \times n$ oraz B rozmiaru $n \times m$, gdzie A_s jest podmacierzą rozmiaru $m \times m$ o kolumnach odpowiadających elementom ze zbioru S, a B_s jest podmacierzą rozmiaru $m \times m$ macierzy B o wierszach odpowiadających elementom ze zbioru S.
Ze wzoru Cauchy'ego-Bineta wynika, że to dopełnienie algebraiczne odpowiada sumie wyrazów postaci

$$det(M^*)det\left(M^{*^T}\right)$$

gdzie M^* jest podmacierzą macierzy M rozmiaru $(n-1)\times(n-1)$. Z punktu 2) wqiemy, że czynniki niezerowe tej sumy $(= 1)$ odpowiadają drzewom rozpinającym □

Definicja 1.7.3. WYZNACZNIKIEM GRAFU *nazywamy wyznacznik macierzy sąsiedztwa tego grafu.*

Definicja 1.7.4. *Jeśli $det(G) = 0$, to graf G nazywamy* GRAFEM SINGULARNYM.

Lemat 1.7.1.

$$det(G) = \sum_{\Gamma\in S(G)} (-1)^{sg(\Gamma)}2^{c(\Gamma)}$$

gdzie $S(G)$ jest zbiorem wszystkich podgrafów rozpinających, których składowe są 1-regularne lub 2-regularne, $sg(\Gamma)$ jest liczbą składowych o parzystej liczbie wierzchołków, a $c(\Gamma)$ jest liczbą cykli.

Lemat 1.7.2. *[**(13)**] Jeśli $u, v \in V(G), uv \notin E(G)$, $N(u) \subset N(v)$ oraz G' jest grafem otrzymanym z G przez usunięcie wszystkich krawędzi postaci xv, gdzie $x \in N(u)$, to $det(G') = det(G)$.*

Lemat 1.7.3. *Jeśli x jest liściem grafu G, a u jest jego sąsiadem, to*

$$det(G - \{x, u\}) = (-1)det(G)$$

1.8 Wykład 8 - 10.04.2017

Dowód. [Lem.1.7.1] Niech M będzie macierzą rozmiaru $n \times n$

$$detM = \sum_{\sigma\in P_n} sg(\sigma)\cdot\prod_{i=1}^{n} a_{i_{\sigma(i)}}$$

gdzie σ jest permutacją, a P_n jest zbiorem wszystkich permutacji zbioru n-elementowego.
Permutację można rozłożyć na rozłączne cykle $\sigma = \tau_1\tau_2 \dots \tau_k t_1 \dots t_s$ □

Dowód. [Lem.1.7.3 (13)]

$$
\begin{array}{ccc}
 & & \begin{array}{ccccccccccc} u & v & & & N(u) & & & & & & \end{array} \\
 & & \begin{array}{ccccccccccc} & & & & & N(v) & & & & & \end{array} \\
\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ N(v) \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} &
\begin{array}{c} u \\ v \\ \\ \\ N(u) \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} &
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & & & & & & & & \\
1 & 1 & & 0 & & & & & & & \\
1 & 1 & & & 0 & & & & & & \\
1 & 1 & & & & 0 & & & & & \\
1 & 1 & & & & & 0 & & & & \\
0 & 1 & & & & & & 0 & & & \\
0 & 0 & & & & & & & 0 & & \\
0 & 0 & & & & & & & & 0 & \\
0 & 0 & & & & & & & & & 0
\end{bmatrix} \; \Downarrow -
\end{array}
$$

$$\Rightarrow \quad -$$

□

Lemat 1.8.1. *Graf jest singularny wtedy i tylko wtedy, gdy przynajmniej jedna z jego składowych jest grafem singularnym*

Dowód. Niech $G_1, \ldots, G_k$ będą składowymi grafu G. Wtedy mamy

$$\begin{bmatrix} \boxed{A(G_1)} & & & \\ & \boxed{A(G_2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{A(G_k)} \end{bmatrix}$$

Wyznacznik macierzy klatowo diagonalnej jest równy iloczynowi wyznaczników poszczególnych klatek $A(G_1), \ldots, A(G_k)$

$$det(G) = \prod_{i=1}^{n} (G_i)$$

□

Definicja 1.8.1. *Niech $G = (A \cup B, E)$, gdzie A i B są zbiorami niezależnymi, będzie grafem dwudzielnym, $A \cup B = V$. Zbiór $F \subset E$ rozłącznych krawędzi nazywamy* SKOJARZENIEM.

Definicja 1.8.2. *Zbiór F nazywamy* SKOJARZENIEM PEŁNYM, *jeśli $\underset{v \in G}{\forall} \; \underset{e \in F}{\exists} \; v \in e$ (v jest incydentny z krawędzią e).*

Definicja 1.8.3. *Zbiór $H \subset G$ nazywamy k-*FAKTOREM *jeśli H jest grafem rozpinającym ($V(H) = V(G)$) oraz k-regularnym.*

Uwaga 1.8.1. 1-*faktor to nic innego jak skojrzenie pełne.*

Definicja 1.8.4. *Niech $U \subset V$ oraz $\underset{u \in U}{\forall} \ \underset{e \in M}{\exists} \ u \in e$, to mówimy, że M* JEST SKOJARZENIEM DLA ZBIORU *M, a każdy wierzchołek ze zbioru U nazywamy* SKOJARZONYM. *Każdy wierzchołek, który nie jest incydentny z żadną krawędzią skojarzenia nazywamy* NIESKOJARZONYM. *U.*

Definicja 1.8.5. *Mówimy, że zbiór $X \subset V$ jest* POKRYCIEM WIERZCHOŁKOWYM *grafu G, jeśli każda krawędź grafu G jest incydentna z pewnym wierzchołkiem zbioru X.*

Definicja 1.8.6. *Niech $G = (A \cup B, E)$ oraz niech M będzie skojarzeniem.* ŚCIEŻKĄ NAPRZEMIENNĄ *nazywamy taką ścieżkę, której pierwszym wierzchołkiem jest wierzchołek $a \in A$, natomiast krawędzie tej ścieżki należą naprzemiennie do zbiorów $E \setminus M$ i M.*

Definicja 1.8.7. SCIEŻKĄ POWIĘKSZAJĄCĄ *nazywamy ścieżkę naprzemienną, której ostatni wierzchołek jest nieskojarzonym wierzchołkiem należącym do zbioru B.*

Twierdzenie 1.8.1. *[**Königa**]*
W grafie dwudzielnym moc najliczniejszego skojarzenia jest równa mocy najmniej licznego pokrycia.

Dowód. Niech M będzie najliczniejszym skojarzeniem. Zauważmy, że pokrycie wierzchołkowe nie może mieć mniej elementów, bo krawędzie M są rozłączne.
Oznaczmy $a, a', \ldots$ - wierzchołki z A i $b, b', \ldots$ - wierzchołki z B.
Zdefiniujmy zbiór U następująco: dla każdej krawędzi $ab \in M$ wybieramy a albo b jako element zbioru U.

1) $b \in U$ jeśli istnieje naprzemienna ścieżka o końcu w B.

2) $a \in U$ w przeciwnym przypadku.

Niech $ab \in E$. Pokażemy, że ab jest incydentna z pewnym wierzchołkiem ze zbioru U

1) Jeśli $ab \in M$, to z definicji zbioru U wynika, że ab jest incydentna z elementem zbioru U.

2) Niech $ab \notin M$, wtedy ab nie może być rozłączne ze skojarzeniem, bo M jest maksymalne tzn. ab sąsiaduje z pewną krawędzią $a'b'$ ze skojarzenia. Mamy zatem dwie możliwości albo $a = a'$ albo $b = b'$. Gdyby $b = b'$, to wówczas b jest końcem naprzemiennej ścieżki. Z definicji zbioru U mamy, że $b \in U$. Wówczas ab jest incydentna z elementem zbioru U. Jeśli $a = a'$ to wiemy, że a' albo b' należą do U. Jeśli $a' \in U$ to tym samym $a \in U$ i ab jest incydentna z elementem ze zbioru U. Jeśli $b' \in U$, to b' jest końcem naprzemiennej ścieżki P.

   a) $b \in P$ - wtedy Pb też jest ścieżką naprzemienną.

   b) $b \notin P$ - wtedy $S = Pb'ab$ jest naprzemienną ścieżką. Gdyby b był nieskojarzony to S byłaby ścieżką powiększającą, a wtedy istniałoby skojarzeniem liczniejsze (sytuacja niemożliwa, bo M jest maksymalnym skojarzeniem), stąd b jest skojarzony i $b \in U$.

□

Twierdzenie 1.8.2. *[**Halla**]*
Niech $G = (V_1 \cup V_2, E)$ będzie grafem dwudzielnym. W tym grafie istnieje skojarzeniem zbioru V_1 wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $A \subset V_1$

$$|A| \leqslant |N(A)|$$

1.9 Wykład 9 - 24.04.2017

Dowód. [Tw.Halla]
($\Longrightarrow$)
Załóżmy, że M jest skojarzeniem ze zbioru V_1 i ustalmy $A \subset V_1$ taki, że $\underset{a \in A}{\forall} \ \underset{e \in M}{\exists}$ a jest incydentny z e. Końce tych krawędzi są różne, zatem

$$|A| \leqslant |N(A)|$$

($\Longleftarrow$)
Przypuśćmy, że nie istnieje skojarzenie ze zbioru V_1 tzn. że najliczniejsze skojarzenie jest mocy mniejszej niż $|V_1|$. Wobec tego (na mocy twierdzenia Königa) istnieje pokrycie wierzchołkowe U, takie, że $|U| < |V_1|$ oraz $U = A' \cup B'$, gdzie $A' \subset V_1,\ B' \subset V_2$

$$|U| = |A' \cup B'| = |A'| + |B'| < |V_1|$$

a zatem

$$|B'| < |V_1| - |A'| = |V_1 - A'|$$

Zauważmy, że w grafie G nie istnieje żadna krawędź pomiędzy zbiorami $V_1 \setminus A'$ oraz $V_2 \setminus B'$ (to wynika z faktu, że $U = A' \cup B'$ jest pokryciem) czyli każda krawędź ma jeden koniec w zbiorze A' lub B' czyli

$$|N(V_1 \setminus A)| \leqslant |B'| < |V_1 \setminus A'|$$

Doszliśmy do sprzeczności. □

Definicja 1.9.1. *k-KOLOROWANIEM grafu G nazywamy podział zbioru $V(G)$ na k zbiorów niezależnych.*

Definicja 1.9.2. *Jeśli dla grafu G istnieje k-kolorowanie, to ten graf nazywamy k-KOLOROWALNYM.*

Definicja 1.9.3. *Jeśli G jest k-kolorowalny, ale nie jest $k-1$-kolorowalny, to G nazywamy k-CHROMATYCZNYM, a liczbę $\chi(G) = k$ nazywamy LICZBĄ CHROMATYCZNĄ.*

Lemat 1.9.1.

$$\chi(G) \leqslant |G|$$

Dowód. Podział na zbiory 1-elementowe - n-kolorowanie, $n = |G|$ □

Algorytm 1.9.1. ***[Zachłanny]***

1. *Etykietujemy wierzchołki $v_1, \ldots, v_n$.*
2. *Kolejne kolory oznaczamy liczbami naturalnymi $1, 2, \ldots$*
3. *v_1 kolorujemy kolorem 1*
4. *(a) v_2 kolorujemy kolorem 1 jeśli $v_1v_2 \notin E(G)$*
   (b) w przeciwnym przypadku v_2 kolorujemy kolorem 2 .
5. *v_i kolorujemy pierwszym wolnym kolorem, który nie został przypisany jego sąsiadom.*

Twierdzenie 1.9.1. *W każdym grafie prostym G*

$$\chi(G) \leqslant \Delta(G) + 1$$

Dowód. Wynika z algorytmu zachłannego. □

Lemat 1.9.2. *W grafie prostym i spójnym G*

$$\chi(G) \leqslant \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 2q}$$

gdzie $q = |E(G)|$.

Dowód. Weźmy $\chi(G)$ zbiorów niezależnych i ustalmy $\chi(G)$-kolorowanie. Między dwoma zbiorami niezależnymi istnieje przynamniej jedna krawędź, a stąd

$$q \leqslant \frac{\chi(G)[\chi(G)-1]}{2}$$

Oznaczmy $x = \chi(G)$. Otrzymujemy zatem nierówność

$$2q \leqslant x(x-1)$$

Przerzucając $2q$ na prawą stronę mamy

$$0 \leqslant x^2 - x - 2q$$

Wyliczając wyróżnik otrzymujemy

$$\Delta = 1 + 8q$$

A zatem

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{1+8q}}{2} \qquad x_2 = \frac{1+\sqrt{1+8q}}{2}$$

Stąd

$$x \leqslant \frac{1+\sqrt{1+8q}}{2} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 2q}$$

□

Twierdzenie 1.9.2. *[**Brooksa**]*
Niech G będzie grafem prostym, spójnym, różnym od grafu pełnego i różnym od cyklu nieparzystego. Wówczas

$$\chi(G) \leqslant \Delta(G)$$

Komentarz 1.9.1.
W przypadku grafu pełnego mielibyśmy sytuację: $\Delta(K_n) = n-1,\ \chi(K_n) = n,\ \chi(K_n) = \Delta(K_n)+1$
Z kolei w przypadku cyklu nieparzystego: $\Delta(C_{2n+1}) = 2,\ \chi(C_{2n+1}) = 3$.

Dowód. [Tw.Brooksa]
Niech $k = \Delta(G)$, rozważmy przypadki

1° $k=0$ $G = K_1$ - nie rozważamy tego przypadku.

2° $k=1$ $G = K_2$ - jak wyżej.

3° $k=2$ $G = P_n$ dla $n \geqslant 2$ lub $G = C_{2n}$ - wtedy $\chi(P_n) = 2,\ \chi(C_{2n}) = 2$

Załóżmy zatem, że $k \geqslant 3$.

1° G nie jest k-regularny. Zatem w grafie G istnieje wierzchołek v, taki, że $d(v) < k$. Konstruujemy zbiory następującej postaci:
$S_0 = \{v\}$
$S_1 = N(S_0) - S_0$
$S_2 = N(S_1) - S_1 - S_2$
$S_3 = N(S_2) - S_2 - S_1$
Ponieważ graf jest skończony, więc istnieje takie k, że

$$\forall_{j>k} \; S_j = 0 \wedge S_k \neq 0$$

Oznaczmy: $v_n = v,\; v_{n-1}, \ldots, v_{n-|S_1|} \in S_1,\; v_{n-|S_1|-1}, \ldots, v_{n-|S_1|-|S_2|} \in S_2, \ldots, v_1 \in S_k$. Dla dowolnego wierzchołka $v_i \in S_j,\; j > 0$ istnieje jego sąsiad $u \in S_{j-1}$, zatem w kroku, w którym kolorujemy v_i dotychczas pokolorowaliśmy co najwyżej $\Delta(G) - 1$ jego sąsiadów. Zatem v_i możemy pokolorować na $\{1, 2, \ldots, \Delta(G)\}$ kolorów. Wierzchołek v_n ma stopień mniejszy niż $\Delta(G)$, więc możemy go również pokolorować jednym z $\{1, 2, \ldots, \Delta(G)\}$ kolorów.

2° G jest k-regularny oraz G ma wierzchołek rozcinający v. $G-v$ nie jest zatem spójny. Niech $G_1, \ldots, G_l$ będą składowymi grafu $G-v$, niech ponadto $H_i = G[G_i \cup \{v\}]$ gdzie w H_i mamy $d(v) < k$. H_i można pokorować na k-kolorów. Co więcej, każdy graf H_i może być tak pokolorowany, że wierzchołek v będzie miał przyporządkowany zawsze ten sam kolor. Kolorowania grafów H_i wyznaczają kolorowanie całego grafu.

3° G jest k-regularny i nie ma wierzchołka rozcinającego.

1)
$$\forall_{v \in G} \; G - v \text{ nie ma wierzchołka rozcinającego}$$

Ponieważ G nie jest grafem pełnym, więc istnieją wierzchołki a, b takie, że $dist(a, b) = 2$. Ustalmy v taki, że $a, b \in N(v),\; ab \notin E(G)$. Wówczas $G - \{a, b\}$ jest grafem spójnym.

2) Istnieje v taki, że $G - v$ ma wierzchołek rozcinający w oraz $G - \{v, w\}$ nie jest spójny. Niech $G_1, \ldots, G_s$ będą składowymi $G - \{w, v\}$. W grafie G nie ma żadnych krawędzi między składowymi $G_1, \ldots, G_s$. Skoro $G-w$ jest spójny, to v ma sąsiadów w każdej składowej (W analogicznej sytuacji: wierzchołek w ma sąsiadów w każdej składowej). Niech
$a \in G_1 \quad a \in N(v)$
$b \in G_2 \quad b \in N(v)$
$v_1 = a$
$v_2 = b$
$v_n = v$
v_{n-1} - sąsiad wierzchołka v_n różny od a i od b.
v_{n-2} - sąsiad wierzchołka v_n lub v_{n-1} różny od a, b, v_n, v_{n-1}.
$\vdots$
v_i - sąsiad wierzchołka v_n lub v_{n-1} lub ... v_{i+1} różny od $a, b, v_n, v_{n-1}, \ldots, v_{i+1}$
v_1 i v_2 nie sąsiadują ze sobą, a zatem mają ten sam kolor.

□

Definicja 1.9.4. Liczbą klikową *nazywamy moc najliczniejszej kliki i oznaczamy ją* $\omega(G)$.

Definicja 1.9.5. Liczbą niezależności *nazywamy moc najliczniejszego zbioru niezależnego i oznaczamy ją* $\alpha(G)$.

1.10 Wykład 10 - 08.05.2017

Lemat 1.10.1. *Dla każdego grafu prostego G spełnione są zależności*

$$\omega(G) = \alpha(\overline{G})$$

$$\alpha(G) = \omega(\overline{G})$$

Dowód. Ustalmy graf G, niech $X \subset V(G)$ będzie największą kliką grafu czyli $\omega(G) = |X|$. Wiemy, że

$$\underset{u,v \in X}{\forall} uv \in E(G) \Leftrightarrow \underset{u,v \in X}{\forall} uv \notin E(\overline{G})$$

tzn. X jest zbiorem niezależnym w $\overline{G}$. Ponadto wiemy, że $\alpha(\overline{G}) \geqslant |X| = \omega(G)$. Gdyby X' był zbiorem niezależnym w $\overline{G}$ takim, że $|X'| > |X|$, to X' byłby kliką w grafie G i $|X'| > \omega(G)$ co jest sprzecznością. Zatem $\alpha(\overline{G}) = |X|$ oraz $\alpha(\overline{G}) = \omega(G)$. □

Oznaczenie 1.10.1. *Niech $v \in V(G)$ będzie dowolnym wierzchołkiem, wtedy*

$$N[v] = N(v) \cup \{v\}$$

Algorytm 1.10.1. *[**wyznaczania zbioru niezależnego**]*

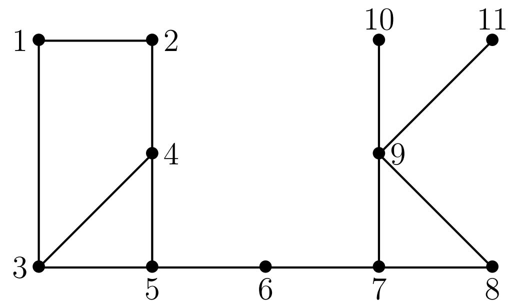
I) *Wyznaczanie zbioru niezależnego poprzez dodawanie wierzchołków.*

1. $U = \emptyset, \; X = V(G)$
2. *podczas gdy* $X \neq \emptyset$ *wykonuj:*
   - *weź* $v \in X$*, który ma najmniej sąsiadów w* X.
   - $U := U \cup \{v\}$
   - $X := X \setminus N[v]$
3. *zwróć* U.

II) *Wyznaczanie zbioru niezależnego przez usuwanie wierzchołków*

1. $U = V(G)$
2. *podczas gdy* U *nie jest niezależny wykonuj:*
   - *weź* $v \in U$*, który ma najwięcej sąsiadów.*
   - $U = U \setminus \{v\}$
3. *zwróc* U.

Przykład 1.10.1.
Wyznaczymy zbiór niezależny w następującym grafie.



I)
- $U = \emptyset \quad X = \{1, \ldots, 11\}$
- $v = 10 \quad U = \{10\} \quad X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 11\}$
- $v = 11 \quad U = \{10, 11\} \quad X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
- $v = 8 \quad U = \{8, 10, 11\} \quad X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $v = 6 \quad U = \{6, 8, 10, 11\} \quad X = \{1, 2, 3, 4\}$
- $v = 1 \quad U = \{1, 6, 8, 10, 11\} \quad X = \{4\}$
- $v = 4 \quad U = \{1, 4, 6, 8, 10, 11\} \quad X = \emptyset$

II)
- $U = \{1, \ldots, 11\}$
- $v = 9 \quad U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11\}$
- $v = 3 \quad U = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11\}$
- $v = 2 \quad U = \{1, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11\}$
- $v = 5 \quad U = \{1, 4, 6, 7, 8, 10, 11\}$
- $v = 7 \quad U = \{1, 4, 6, 8, 10, 11\}$

Lemat 1.10.2. *Dla każdego grafu G (prostego) spełniona jest nierówność*

$$\chi(G) \geqslant \omega(G)$$

Dowód. Oczywiste - patrz definicja $\chi(G)$ oraz $\omega(G)$. □

Definicja 1.10.1. *Graf G nazywamy* DOSKONAŁYM, *jeśli dla każdego podgrafu indukowanego $H \subset G$ spełniony jest warunek*

$$\chi(H) = \omega(H)$$

Lemat 1.10.3. *Jeśli $H \subseteq G$ jest indukowanym podgrafem G, $S \subseteq H$ jest indukowanym podgrafem grafu H, to S jest też indukowanym podgrafem grafu G.*

Dowód. Pokażemy, że $\underset{u,v \in S}{\forall} \; uv \in E(S) \Leftrightarrow uv \in E(G)$

$(\Longrightarrow)$

Zachodzi zawsze

$(\Longleftarrow)$

1. Ustalmy $u, v \in V(S)$.
2. Załóżmy, że $uv \in E(G)$.

3. Zauważmy, że $S \subseteq H$.
4. Z definicji $uv \in E(H)$.
5. Z definicji $uv \in E(S)$.

□

Uwaga 1.10.1. *Indukowany podgraf grafu doskonałego jest grafem doskonałym.*

Dowód. Niech G będzie grafem doskonałym oraz niech $H \subseteq G$ będzie jego podgrafem indukowanym. Trzeba pokazać, że dla każdego infukowanego podgrafu $H' \subseteq H$ mamy $\chi(H') = \omega(H')$. Ale każdy indukowany podgraf grafu H jest indukowanym podgrafem grafu G, a zatem $\chi(H') = \omega(H')$. □

Definicja 1.10.2. *Graf G nazywamy* CIĘCIWOWYM*, jeśli nie zawiera on podgrafu indukowanego, który jest cyklem C_n dla $n > 3$. Innymi słowy jeśli C_n dla $n > 3$ jest podgrafem grafu G, to w tym grafie zawiera się również cięciwa tego cyklu.*

Lemat 1.10.4. *Podgraf indukowany grafu cięciwowego jest grafem cięciwowym.*

Dowód. Niech G będzie grafem cięciwowym oraz niech $H \subset G$ będzie podgrafem indukowanym. Przypuśćmy, że H nie jest cięciwowy. Zatem mamy wtedy $H' = C_n$ dla $n > 3$ i $H' \subset H$ jest podgrafem indukowanym. Ale H' jest także podgrafem indukowanym grafu G stąd mamy sprzeczność. □

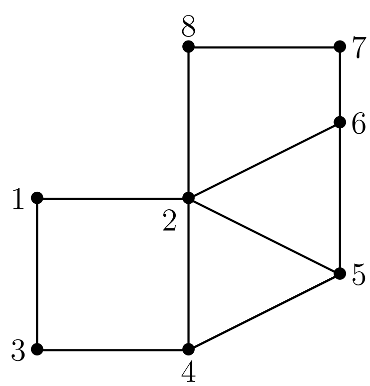
Definicja 1.10.3. *Niech G_1, G_2, S będa podgrafami indukowanymi grafu G takimi, że*

$$G_1 \cup G_2 = G$$

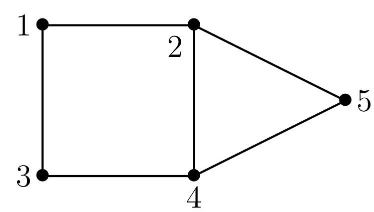
$$G_1 \cap G_2 = S$$

Mówimy wówczas, że graf G powstał przez (ang. pasting along) SKLEJENIE GRAFÓW G_1, G_2 WZDŁUŻ S

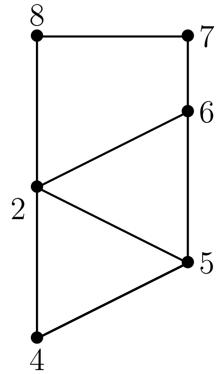
Przykład 1.10.2. *Rozważmy następujące grafy*



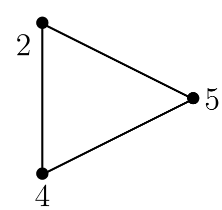
G



G_1



G_2



S

Twierdzenie 1.10.1. *Graf G jest grafem cięciwowym wtedy i tylko wtedy, gdy został otrzymany rekurencyjnie przez sklejenie wzdłuż grafów pełnych.*

Dowód.
($\Longleftarrow$)
Graf pełny jest grafem cięciwowym (bo każdy jego podgraf indukowany jest grafem pełnym). Załóżmy, że $G = G_1 \cup G_2$ oraz $G_1 \cap G_2 = S$ gdzie S jest grafem pełnym. G_1, G_2 są grafami cięciwowymi i powstały w żądany sposób. Ustalmy dowolny cykl $C \subset G$. Zauważmy, że $C \subset G_1$ lub $C \subset G_2$. Przypuśćmy, że tak nie jest. Wówczas istniałyby wierzchołki $x, y \in C$ takie, że $xy \notin E(G)$, bo $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2)$. Istnieją stąd ścieżki P_1, P_2 z x do y takie, że $C = P_1 \cup P_2$. Wtedy też istnieją $v_1, v_2 \in G_1 \cap G_2 = S$, takie, że $v_1 \in P_1$ i $v_2 \in P_2$. S jest pełny, a stąd $v_1v_2 \in E(G)$ i v_1v_2 jest cięciwą. Zatem C jest podgrafem grafu cięciwowego tzn. istnieje cięciwa tego cyklu.
($\Longrightarrow$)
Załóżmy, że G jest grafem cięciwowym. Przeprowadzimy indukcję względem liczby wierzchołków.

1. Możemy założyć, że G nie jest grafem pełnym. Istnieją zatem w tym grafie 2 wierzchołki $a, b \in G$ takie, że $ab \notin E(G)$

2. Niech S będzie minimalnym zbiorem rozdzielającym te wierzchołki. Wtedy $G - S$ nie jest grafem spójnym. Niech C będzie składową, do której należy wierzchołek a. Mamy zatem $G_1 = G(V(C) \cup S)$ oraz $G_2 = G - C$. Ponadto $G_1 \cup G_2 = G$ i $G_1 \cap G_2 = G[S]$. Pokażemy, że graf $G[S]$ jest pełny. Gdyby $G[S]$ nie był pełny, to by istniały $u, v \in S$ takie, że $uv \notin E(G)$. Skoro S rozspaja graf G, to istnieje $u - v$-ścieżka oznaczmy ją P_1 (najkrótsza), której wierzchołki wewnętrzne należą do składowej C oraz ścieżka P_2 (najkrótsza), której wierzchołki wewnętrzne należą do G_2. $P_1 \cup P_2$ jest indukowanym cyklem C_n dla $n > 3$, nie ma cięciw - sprzeczność.

□

1.11 Wykład 11 - 15.05.2017

Na początku wykładu kończony był dowód z ostatniego wykładu, wolałem go jednak dopisać bez niepotrzebnego dzielenia przy poprzednim, aby zachować spójność.

Twierdzenie 1.11.1. *Graf cięciwowy jest grafem doskonałym.*

Dowód. Skorzystamy z poprzedniego twierdzenia. Przeprowadzimy indukcję względem ilości kroków w konstrukcji grafu G.

1. G jest grafem pełnym. Wtedy wiemy, że grafy pełny są doskonałe.

2. Krok indukcyjny: załóżmy, że $G = G_1 \cup G_2$ oraz $G_1 \cap G_2 = S$. Dla grafów G_1, G_2 mamy spełnione - S jest pełny czyli G_1, G_2 sa cięciwowe, a zatem doskonałe. Ustalmy indukowany podgraf $H \subseteq G$. Pokażemy, że $\chi(H) \leqslant \omega(H)$. Niech $H_1 = H \cap G_1$, $H_2 = H \cap G_2$ oraz $T = H \cap S$. Zauważmy, że H_1 jest indukowanym podgrafem H, H_2 jest indukowanym podgrafem H oraz T jest indukowanym podgrafem H (pełnym). $T = H_1 \cap H_2$. Z założenia indukcyjnego $\chi(H_1) = \omega(H_1)$ oraz $\chi(H_2) = \omega(H_2)$. H_1, H_2 można pokolorować tak, że wierzchołki grafu T będa sak samo pokolorowane (w obu kolorowaniach)
$$\chi(H) = \min\{\chi(H_1), \chi(H_2)\}$$

$$\omega(H) = \max\{\omega(H_1), \omega(H_2)\}$$

a stąd

$$\chi(H) = \min\{\chi(H_1), \chi(H_2)\} = \min\{\omega(H_1), \omega(H_2)\} \leqslant \omega(H)$$

□

Definicja 1.11.1. *Mówimy, że graf G' powstał z G przez* ROZSZERZENIE WIERZCHOŁKA *v jeśli*

$$V(G') := V(G) \cup \{v'\} \textit{ gdzie } v' \notin V(G)$$

oraz

$$E(G') = E(G) \cup \{v'x \colon x \in N(v)\} \cup \{vv'\}$$

Lemat 1.11.1. *Jeśli G jest grafem doskonałym, a G' powstał z grafu G przez rozszerzenie wierzchołka, to G' jest również grafem doskonałym.*

Dowód. Ustalmy dowolny indukowany podgraf $H \subset G'$. Przeprowadzimy indukcję względem liczby wierzchołków

1. $|G| = 1$ - spełnione
2. Jeśli $H \subset G'$, to H jest podgrafem indukowanym grafu G oraz $\chi(H) = \omega(G)$ lub też $v' \in H$ i wtedy H powstał przez rozszerzenie wierzchołka indukowanego grafu G. Z założenie indukcyjnego $\chi(H) = \omega(H)$ lub też H jest izomorficzny z podgrafem indukowanym grafu G (poprzednia sytuacja)
3. $H = G'$

   1° $\omega(G') \in \{\omega(G), \omega(G)+1\}$ (ponieważ $|G'| = |G| + 1$ $(*)$)

   2° Jeśli $\omega(G') = \omega(G) + 1$, to

   $$\chi(G') \underbrace{\leqslant}_{(*)} \chi(G) + 1 = \omega(G) + 1 = \omega(G')$$

   (pamiętając, że G był doskonały).

   3° Jeśli $\omega(G') = \omega(G)$ to zauważmy, że v nie należy do żadnej kliki oznaczmy ją $K_{\omega(G)}$. Gdyby należał, to v' należałby także do $K_{\omega(G)}$. Niech X będzie zbiorem wierzchołków grafu G o tym samym kolorze co wierzchołek v. W każdej klice $K_{\omega(G)}$ występuje wierzchołek każdego koloru, a zatem w każdej klice $K_{\omega(G)}$ występuje wierzchołek ze zbioru X (a nawet ze zbioru $X \setminus \{v\}$). Zdefiniujmy $H := G \setminus (X \setminus \{v\})$. Zauważmy, że $\omega(H) < \omega(G)$, bo z każdej kliki usuniemy przynajmniej jeden wierzchołek. Wtedy $X \setminus \{v\} \cup \{v'\}$ jest zbiorem niezależnym oraz $G - H = X \setminus \{v\}$. Ponadto $X \setminus \{v\} \cup \{v'\} = V(G' - H)$ - zbiór niezależny oraz $G' - H = H \setminus \{v\} \cup \{v'\}$ Wtedy

   $$\omega(G') = \omega(G) \geqslant \omega(H) + 1 = \chi(H) + 1 \geqslant \chi(G')$$

   gdyż H był indukowanym podgrafem G, mogliśmy go pokolorować $\chi(H)$ kolorami, a $V(G' - H)$ pokolorować tylko 1 kolorem.

□

Twierdzenie 1.11.2. *[**Laszlo Lovasz**]*
Graf G jest doskonały wtedy i tylko wtedy, gdy jego dopełnienie jest doskonałe.

Dowód. Przeprowadzimy indukcję po $|G|$.

1. $|G| = 1$, wtedy K_1 jest doskonały i $\overline{K_1}$ także.

2. Załóżmy, że G jest doskonały. Pokażemy, że $\overline{G}$ też jest doskonały.

3. Chcemy pokazać, że dla dowolnego $H \subset \overline{G}$ mamy $\chi(H) = \omega(H)$. Dla właściwego podgrafu indukowanego H grafu G jego dopełnienie $\overline{H}$ jest indukowanym podgrafem grafu $\overline{G}$. H jest doskonały, bo jest indukowanym podgrafem G, a z założenia indukcyjnego $\overline{H}$ też jest doskonały. Trzeba pokazać, że $\chi(\overline{G}) = \omega(\overline{G})$.

4. Niech $\mathcal{A}$ będzie rodziną zbiorów niezależnych grafu G mocy $\alpha(G)$ oraz niech $\mathcal{K}$ będzie rodziną klik grafu G.

5. Istnieje taki zbiór $K \in \mathcal{K}$, że
$$\underset{A\in\mathcal{A}}{\forall} A \cap K \neq \emptyset$$
Ustalmy taki zbiór K
$$\omega(\overline{G} - K) = \alpha(G - K) \leqslant \alpha(G) - 1 = \omega(\overline{G}) - 1 < \omega(\overline{G})$$
$$\chi(\overline{G}) \leqslant \chi(\overline{G} - K) + 1 = \omega(G - K) + 1 \leqslant \omega(G)$$

□

1.12 Wykład 12 - 22.05.2017

Definicja 1.12.1. *Zbiór wierzchołków $S \subset V$ nazywamy* ZBIOREM DOMINUJĄCYM *w grafie G, jeśli*
$$\underset{v\in V}{\forall} \Big(v \in S \vee \underset{u\in S}{\exists}\ uv \in E(G) \Big)$$

Lemat 1.12.1. *Jeśli G jest grafem prostym, $G = (V, E)$, $S \subset V$, to NWSR*

i) S *jest zbiorem dominującym,*

ii) $\underset{v\in V\setminus S}{\forall}\ \underset{u\in S}{\exists}\ uv \in E,$

iii) $\underset{v\in V\setminus S}{\forall}\ N(v) \cap S \neq 0,$

iv) $\underset{v\in V\setminus S}{\forall}\ dist(v, S) \leqslant 1,$

v) $N[S] = V,$

vi) $\underset{v\in V}{\forall}\ |N[v] \cap S| \geqslant 1,$

vii) $\underset{v\in V\setminus S}{\forall}\ N(v) \not\subseteq V \setminus S.$

Dowód. $i) \Rightarrow iii)$
Ustalmy $v \in V \setminus S$. Niech $u \in S$ oraz $uv \in E(G)$. Zatem $u \in N(v)$.
$i \Rightarrow iv)$
Ustalmy $v \in V \setminus S$. Wtedy $dist(v,S) = \min\{dist(v,u)\colon u \in S\} \leqslant 1$, gdyż $\underset{u}{\exists}\ uv \in E(G),\ dist(u,v) = 1$.
$i) \Rightarrow v)$
$v \in V$ czyli $v \in S \vee v \in V \setminus S \Rightarrow \underset{u}{\exists}\ uv \in E$. Stąd $N[S] = S \cup \{v \in V : uv \in E,\ u \in S\}$. □

Definicja 1.12.2. MINIMALNYM ZBIOREM DOMINUJĄCYM *nazywamy taki zbiór dominujący* $S \subset V$ *(gdzie* $G = (V,E)$*), że*

$$\underset{v \in S}{\forall}\ S \setminus \{v\} \text{ nie jest zbiorem dominującym}$$

Oznaczenie 1.12.1. *Symbolem* $MDS(G)$ *nazywamy rodzinę wszystkich minimalnych zbiorów dominujących.*

Definicja 1.12.3. LICZBĄ DOMINUJĄCĄ *grafu* G *nazywamy moc najmniej licznego zbioru dominującego graf* G *i oznaczamy* $\gamma(G)$. *Każdy zbiór mocy* $\gamma(G)$ *nazywamy* γ-ZBIOREM.

Twierdzenie 1.12.1. *Zbiór* $S \subset V$*, dla* $G = (V,E)$*, jest minimalnym zbiorem dominującym wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego wierzchołka* $v \in S$ *spełniony jest jeden z warunków*

1. $N(v) \cap S = \emptyset$ *(v jest izolowany w S)*
2. $\underset{u \in V \setminus S}{\exists}\ N(u) \cap S = \{v\}$

Dowód. $(\Longrightarrow)$
Niech $S \in MDS(G)$. Ustalmy $v \in S$, wtedy $S \setminus \{v\}$ nie jest dominujący. Przypuśćmy, że warunki $1-2$ nie zachodzą (skoro $N(v) \cap S \neq \emptyset$, to $u \in N(v)$ dominuje wierzchołek v). Istnieje wierzchołek $u \in V \setminus S$, który nie jest zdominowany przez $S \setminus \{v\}$. u musiał być dominowany przez wierzchołek v tzn. $u = v$ i wtedy $N(u) = N(v)$ lub $uv \in E$. Stąd $N(u) \cap S \setminus \{v\}$. Zatem wierzchołek z $S \setminus \{v\}$ nie jest sąsiadem wierzchołka u. Jeśli $u = v$, to $N(u) \cap S = N(v) \cap S = \emptyset$. Jeśli $v \neq u,\ uv \in E$, to $N(u) \cap S = \{v\}$.
$(\Longleftarrow)$
Przypuśćmy, że S nie jest minimalny, to istnieje wtedy $u \in S$, taki, że zbiór $S \setminus \{u\}$ jest dominujący. Istnieje $v \in S \setminus \{u\}$ taki, że $uv \in E$. $\underbrace{N(u)}_{\in v} \cap \underbrace{S}_{\in v} \ni v$ tzn. warunek 1 nie jest spełniony. Ustalmy $x \in V \setminus S,\ x$ jest dominowany przez $S \setminus \{u\}$. $N(x) \ni v' \in S \setminus \{u\}$. Wtedy $\underset{u' \in V \setminus S}{\exists}\ N(u') \cap S = \{u\}$. Skoro $S \setminus \{u\}$ jest zbiorem dominującym, to dowolny wierzchołek $u' \in V \setminus S$ jest dominowany przez wierzchołek różny od u (oznaczmy go a), ale wówczas $N(v') \cap S \supseteq \{a\} \neq \{u\}$. Sprzeczność. □

Twierdzenie 1.12.2. *Jeśli* G *jest grafem spójnym rzędu* $n \geqslant 2$*, to istnieje w nim taki zbiór dominujący, że jego dopełnienie też będzie zbiorem dominującym.*

Dowód. Każdy graf spójny ma drzewo rozpinające T. Każde drzewo jest grafem dwudzielnym. Niech V_1, V_2 będą zbiorami niezależnymi w drzewie T

$$\underset{v_1 \in V_1}{\forall}\ \underset{v_2 \in V_2}{\exists}\ v_1 v_2 \in E$$

□

Twierdzenie 1.12.3. *Jeśli G nie ma wierzchołków izolowanych, $S \in MDS(G)$, to $V(G) \backslash S$ jest zbiorem dominującym.*

Dowód. Pokażemy, że

$$\underset{u \in S}{\forall} \underset{v \in V(G) \backslash S}{\exists} uv \in E(G)$$

Ustalmy $u \in S$

1° Pokażemy, że $N(u) \cap S = \emptyset$.
Istnieje $v \in V(G) \setminus S$, u nie może być izolowany $\emptyset = N(u) \subseteq V(G) \setminus S$

2° Sprawdzimy, że $\underset{v \in V(G) \backslash S}{\exists} N(v) \cap S = \{u\}$.
Wierzchołek v taki, że $N(v) \cap S = \{u\}$ jest oczywiście sąsiadem u, ponadto $u \in N(v) \Leftrightarrow v \in N(u)$.

□

Definicja 1.12.4. *Mówimy, że zbiór S jest* ZBIOREM TOTALNIE DOMINUJĄCYM *w grafie $G = (V, E)$ jeśli*

$$\underset{v \in V}{\forall} \underset{u \in S}{\exists} uv \in E(G)$$

1.13 Wykład 13 - 29.05.2017

Sojusz Obronny

Definicja 1.13.1. *Ataki $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_k\}$ - rodzina zbiorów rozłącznych na zbiór $S = \{s_1, \ldots, s_n\} \subseteq V$*
Obrona $\mathcal{D} = \{D_1, \ldots, D_m\}$ - rodzina zbiorów rozłącznych na zbiór $S = \{s_1, \ldots, s_n\} \subseteq V$
Mówimy, że atak $\mathcal{A}$ jest MOŻLIWY DO OBRONIENIA, *jeśli istnieje obrona obrona $\mathcal{D}$: $\forall_i \; |D_i| \geqslant |A_i|$*
S nazywamy ZBIOREM BEZPIECZNYM, *jeśli każdy atak na S jest możliwy do obronienia.*

Definicja 1.13.2. *Moc najmniej licznego zbioru bezpiecznego nazywamy* LICZBĄ BEZPIECZEŃSTWA *i oznaczamy $s(G)$.*

Lemat 1.13.1. *Zbiór bezpieczny $S \subset V$, gdzie $G = (V, E)$, mocy $s(G)$ jest zbiorem spójnym.*

1.14 Wykład 14 - 05.06.2017

Definicja 1.14.1. GĘSTOŚCIĄ *grafu G nazywamy liczbę $D(G) = \frac{||G||}{||K_n||}$, gdzie n jest rzędem grafu G.*

Definicja 1.14.2. ŚREDNIĄ DŁUGOŚCIĄ ŚCIEŻKI *nazywamy średnią arytmetyczną ogległości między wierzchołkami.*

Definicja 1.14.3. WSPÓŁCZYNNIKIEM GRUPOWANIA WIERZCHOŁKA *$v \in V(G)$, gdzie $G = (V, E)$ nazywamy liczbę $c(v) = \frac{||G[N(v)]||}{||K_n||}$, gdzie n jest stopniem wierzchołka v.*

Definicja 1.14.4. WSPÓŁCZYNNIKIEM GRUPOWANIA GRAFU *nazywamy średnią arytmetyczną współczynników grupowania wierzchołków i oznaczamy ją $C(G)$.*

Definicja 1.14.5. *Niech dla każdej pary różnych wierzchołków* $u, w \in V(G)$*, gdzie* $G = (V, E)$*, różnych od* $v \in V(G)$ *wyznaczony będzie ułamek* $\frac{s_{uw}(v)}{s_{uw}}$*, gdzie* s_{uw} *oznacza liczbę najkrótszych ścieżek łączących wierzchołki* u, w *oraz* $s_{uw}(v)$ *oznacza liczbę najkrótszych ścieżek łączących wierzchołki* u, w *przechodzących przez wierzchołek* v*. Sumę takich ilorazów nazywamy* MIARĄ CENTRALNOŚCI WIERZCHOŁKA *lub* POŚREDNICTWEM *i oznaczamy* $b(v)$*.*

Dwa ostatnie wykłady były bardziej w formie opowiadania, wynotowałem w pliku tylko rzeczy, które ponoć będą wymagane na egzaminie, za ich dostarczeniem serdecznie dziękuje Paulinie Koniarek ☺.