Definicje do zadań

- **Aksjomaty oddzielania**
  Niech τ będzie topologią na zbiorze X . Powiemy, że przestrzeń topologiczna (X, τ) jest przestrzenią:
  - T_0, jeśli dla dowolnych dwóch różnych punktów $x, y \in X$ istnieje zbiór otwarty w X , który zawiera dokładnie jeden z tych punktów
  - T_1, jeśli dla dowolnych dwóch różnych punktów $x, y \in X$ istnieje zbiór otwarty $U \subseteq X$ taki, że $x \in U$, ale $y \notin U$
  - T_2 **(Hausdorfa)**, jeśli dla dowolnych dwóch różnych punktów $x, y \in X$ istnieją rozłączne zbiory otwarte $U \subseteq X$ i $V \subseteq X$ takie, że $x \in U$ i $y \in V$
  - T_3 **(regularna)**, jeśli X spełnia aksjomat T_1 i dla każdego zbioru domkniętego $F \subseteq X$ i dowolnego punktu $x \in X \setminus F$ można znaleźć rozłączne zbiory otwarte $U, V \subseteq X$ takie, że $x \in U$ i $F \subseteq V$
  - $T_{3,5}$ **(Tichonowa, całkowicie regularna)**, jeśli X spełnia aksjomat T_1 i dla każdego zbioru domkniętego $F \subseteq X$ i dowolnego punktu $x \in X \setminus F$ można znaleźć funkcję ciągłą $f : X \longrightarrow [0, 1]$ taką, że $f(x) = 0$ i $f(y) = 1$ dla wszystkich punktów $y \in F$
  - T_4 **(normalna)**, jeśli X spełnia aksjomat T_1 i dla każdych rozłącznych zbiorów domkniętych $E, F \subseteq X$ (czyli $E \cap F = \emptyset$) można znaleźć rozłączne zbiory otwarte $U, V \subseteq X$ takie, że $E \subseteq U$ i $F \subseteq V$
  - T_5 **(dziedzicznie normalna, całkowicie normalna)**, jeśli każda podprzestrzeń przestrzeni X spełnia aksjomat T_4
  - T_6 **(doskonale normalna)**, jeśli X spełnia aksjomat T_4 i każdy domknięty podzbiór X jest przekrojem przeliczalnej rodziny zbiorów otwartych.

- **Aksjomaty przeliczalności**
  Przestrzeń topologiczna spełnia:
  - **pierwszy aksjomat przeliczalności**, gdy ma przeliczalną bazę otoczeń w każdym punkcie;
  - **drugi aksjomat przeliczalności**, jeżeli ma przeliczalną bazę przestrzeni topologicznej.

  Każda przestrzeń spełniająca drugi aksjomat przeliczalności spełnia również pierwszy. Implikacja przeciwna jest fałszywa dowolna przestrzeń metryczna spełnia pierwszy aksjomat przeliczalności (przykładową przeliczalną bazą lokalną w ustalonym punkcie jest rodzina kul otwartych o środku w tym punkcie i wymiernych promieniach), ale na ogół nie spełnia drugiego aksjomatu przeliczalności. Przykładem przestrzeni metrycznej, która nie spełnia drugiego aksjomatu przeliczalności może być przestrzeń ℓ^∞ wszystkich ograniczonych ciągów liczbowych z metryką supremum (rodzina wszystkich kul otwartych o środkach w punktach będących ciągami zero-jedynkowymi i promieniu mniejszym niż 1 jest nieprzeliczalna i składa się ze parami rozłącznych zbiorów otwartych dowolna baza ℓ^∞ musi zawierać podzbiór każdego elementu tej rodziny, przez co nie może być przeliczalna).

- **Baza przestrzeni topologicznej** - dla danej przestrzeni topologicznej X, rodzina otwartych podzbiorów przestrzeni X o tej własności, że każdy zbiór otwarty w X można przedstawić w postaci sumy pewnej podrodziny zawartej w bazie. Każda przestrzeń topologiczna ma bazę jeżeli τ jest topologią w zbiorze X, to jest ona również (trywialnie) jej bazą. Obrazowo, baza przestrzeni topologicznej to taka rodzina zbiorów otwartych, że każdy niepusty i otwarty podzbiór tej przestrzeni można wysumować przy pomocy pewnych (być może nieskończenie wielu) elementów bazy. W praktyce matematycznej związanej z badaniem własności konkretnych przestrzeni topologicznych, istotnym zagadnieniem jest pytanie o minimalną moc bazy przestrzeni (zob. ciężar przestrzeni poniżej). Tak zdefiniowane pojęcie nosi też czasem nazwę bazy otwartej (zob. też baza domknięta poniżej).

- **Ciąg uogólniony**
  Niech X będzie niepustym zbiorem, $(\Sigma, \leqslant)$ zbiorem skierowanym. Ciągiem uogólnionym nazywamy zbiór $S = \{x_\sigma \colon\ \sigma \in \Sigma\}$, gdzie x_σ jest elementem zbioru X przyporządkowanym elementowi $\sigma \in \Sigma$.

- **Ciężar przestrzeni** - (albo waga, rzadziej ciężkość) przestrzeni topologicznej X nazywamy najmniejszą liczbę kardynalną $w(X)$ o tej własności, że istnieje w tej przestrzeni baza przestrzeni X mocy $w(X)$. Innymi słowy,

$$w(X) = \min\{|\mathcal{B}| \colon \mathcal{B} \ \text{ baza przestrzeni } X\}$$

  - Ciężar przestrzeni dyskretnej jest równy jej mocy.
  - Ciężar każdej przestrzeni euklidesowej wynosi $\aleph_0$.
  - Ciężar prostej Sorgenfreya wynosi continuum.
  - Jeżeli X jest przestrzenią regularną, to $w(X) \leqslant 2^{d(X)}$, gdzie $d(X)$ oznacza gęstość przestrzeni X.

- **Funkcja domknięta**
  Pojęcie funkcji domkniętej jest wprowadzane podobnie, zastępując zbiory otwarte przez podzbiory domknięte. Czyli f jest odwzorowaniem domkniętym wtedy i tylko wtedy, gdy obraz każdego zbioru domkniętego jest domknięty, który to warunek można zapisać jako

$$\Big(\forall A \in \tau_X\Big)\Big(Y \setminus f(X \setminus A) \in \tau_Y\Big).$$

- **Funkcja otwarta**
  Niech (X, τ_X) i (Y, τ_Y) będą przestrzeniami topologicznymi. Powiemy, że funkcja $f \colon X \longrightarrow Y$ jest otwarta, jeśli obraz każdego otwartego podzbioru X jest otwarty w Y . Tak więc f jest odwzorowaniem otwartym wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\Big(\forall A \in \tau_X\Big)\Big(f(A) \in \tau_Y\Big).$$

- **Gęstość przestrzeni**
  Dla każdego zbioru A, $|A|$ oznacza moc zbioru A. Dla każdej przestrzeni X, jej gęstość oznaczana przez $d(X)$ jest minimalną mocą zbioru gęstego, $d(X)$ jest najmniejsza liczbą kardynalną κ taką, że jeśli Y jest gęstym podzbiorem X, to $\kappa \leqslant |Y|$. Jeśli X jest ośrodkowa, wtedy $d(X) = \omega$.

- **Liczba Lebesque'a**
  Jeśli podzbiór A przestrzeni metrycznej (X, d) jest zwarty, to dla każdego pokrycia $\mathcal{U}$ zbioru A

istnieje taka liczba $\lambda > 0$, że dla każdego $a \in A$ istnieje taki $U \in \mathcal{U}$, że $B(a, \lambda) \subseteq U$. Taką liczbę λ nazywa się liczbą Lebesgue'a pokrycia $\mathcal{U}$.
Czyli inaczej: jeśli λ jest liczbą Lebesgue'a pokrycia $\mathcal{U}$, to każdy punkt $a \in A$ siedzi w pewnym elemencie $U \in \mathcal{U}$ wraz z kulą o promieniu λ i środku a.

- **Przestrzeń ciągowo zwarta** - każdy ciąg (x_n) w tej przestrzeni zawiera podciąg (x_{n_k}) zbieżny, tzn. istnieje element $x \in X$ taki, że każde otwarte otoczenie U punktu x zawiera wszystkie elementy ciągu (x_{n_k}) poza co najwyżej skończoną ich liczbą.

- **Przetrzeń funcjonalnie Hausdorffa**
  Przestrzeń topologiczna jest określany zupełnie Hausdorffa lub funkcjonalnie Hausdorffa, jeżeli spełnia następujące warunki:
  - Dla dowolnych dwóch punktów w niej, istnieje funkcją ciągłą z całej przestrzeni do $[0, 1]$ i przyjmuje wartość 0 w jednym punkcie i 1 w drugim.
  - Dla dowolnych dwóch punktów w niej, istnieje funkcją ciągłą z całej przestrzeni do liczb rzeczywistych i przyjmuje wartość 0 w jednym punkcie i 1 w drugim.
  - Dla dowolnych dwóch punktów w niej, istnieje funkcją ciągłą z całej przestrzeni do liczb rzeczywistych i przyjmuje różne wartości w dwóch punktach.
  - Dla dowolnych dwóch punktów w niej i dla dwóch różnych liczb rzeczywistych, istnieje funkcją ciągłą z całej przestrzeni do liczb rzeczywistych i przyjmuje te wartości w dwóch punktach.

- **Przestrzeń metryzowalna** - da się w niej wprowadzić topologię generowaną przez jakąś metrykę.

- **Przestrzeń ośrodkowa** - przestrzeń topologiczna (X, τ) zawierająca taki podzbiór, który jest przeliczalny i gęsty. Podzbiór ten nazywany jest ośrodkiem. Własności
  - Przestrzeń topologiczna o bazie przeliczalnej, tzn. przestrzeń spełniająca drugi aksjomat przeliczalności, jest ośrodkowa. Z drugiej strony prosta Sorgenfreya jest przykładem przestrzeni topologicznej ośrodkowej, która nie ma przeliczalnej bazy.
  - Przestrzeń metryzowalna jest ośrodkowa wtedy i tylko wtedy, gdy przestrzeń posiada bazę przeliczalną.
  - Podprzestrzeń przestrzeni metrycznej ośrodkowej jest ośrodkowa. (Założenie metryzowalności jest istotne - produkt dwóch prostych Sorgenfreya jest przestrzenią ośrodkową posiadającą podprzestrzeń dyskretną mocy continuum, a więc nieośrodkową.)
  - Przestrzeń zwarta metryczna jest ośrodkowa.
  - Iloczyn kartezjański maksymalnie $2^{\aleph_0}$ wielu przestrzeni ośrodkowych jest ośrodkowy.
  - Obrazem ciągłym przestrzeni ośrodkowej jest przestrzeń ośrodkowa.
  - Ośrodkowa przestrzeń Hausdorffa ma moc nie większą niż $2^{\mathfrak{c}}$, gdzie $\mathfrak{c}$ to continuum. Fakt ten nie jest prawdziwy dla przestrzeni spełniających aksjomat T_1. Istotnie niech X będzie dowolnym zbiorem nieskończonym, na którym rozważamy topologię składającą się ze zbiorów będących dopełnieniami zbiorów skończonych, tzn. $\tau = \{X \setminus F \colon F \text{ jest skończony } \}$. Wówczas (X, τ) jest przestrzenią T_1, w której ośrodkiem jest dowolny zbiór przeliczalny nieskończony. To pokazuje, że istnieją ośrodkowe przestrzenie T_1 dowolnej mocy.

- **Przestrzen przeliczalnie zwarta** - z każdego przeliczalnego pokrycia otwartego X można wybrać podpokrycie skończone. Każda przestrzeń zwarta jest przeliczalnie zwarta.

- **Przestrzeń przeliczalnych liczb porządkowych**
Dla każdej liczby przeliczalnej λ można rozważyć przestrzenie liczb porządkowych

$$[0, \lambda) = \{\alpha \mid \alpha < \lambda\}$$

$$[0, \lambda] = \{\alpha \mid \alpha \leqslant \lambda\}$$

wyposażone w naturalną topologię porządkową. Gdy $\lambda = \omega$ (pierwsza nieskończona liczba porządkowa), przestrzeń $[0, \omega)$ jest zbiorem $\mathbb{N}$ ze zwykłą (nadal dyskretną) topologią, podczas gdy $[0, \omega]$ jest jednopunktowym uzwarceniem $\mathbb{N}$ (WTF :D). Szczególnie interesujący jest przypadek, gdy $\lambda = \Omega$, zbiór wszystkich przeliczalnych liczb porządkowych z pierwsza nieprzeliczalną liczbą porządkową. Element Ω jest granicą punktową podzbioru $[0, \Omega)$ nawet, gdy nie ma żadnego ciągu w $[0, \Omega)$ mającego granicę Ω. $[0, \Omega]$ nie spełnia pierwszego aksjomatu przeliczalności. Podprzestrzeń $[0, \Omega)$ spełnia pierwszy aksjomatu przeliczalności, ponieważ jedynym punktem bez lokalnej bazy jest Ω. Ponadto zarówno $[0, \Omega)$ jak i $[0, \Omega]$ jest ośrodkowa jak i spełnia drugi aksjomat przeliczalności. $[0, \Omega]$ jest zwarta podczas, gdy $[0, \Omega)$ jest ciągowo i przeliczalnie zwarta, ale nie zwarta i parazwarta. (Nie wiem czy to możliwe :P)

- **Przestrzeń spójna** - przestrzeń topologiczna, której nie można rozłożyć na sumę dwóch niepustych, rozłącznych podzbiorów otwartych.

- **Przestrzeń zwarta** - z dowolnego jej pokrycia zbiorami otwartymi można wybrać podpokrycie skończone

- **Punkt skupienia ciągu uogólnionego**
Niech X będzie przestrzenią topologiczną. Punkt $x \in X$ nazywamy punktem skupienia ciągu uogólnionego $S = \{x_\sigma\colon\ \sigma \in \Sigma\}$, jeśli

$$\bigwedge_{U \subseteq X} \bigwedge_{\sigma_0 \in \Sigma} \bigvee_{\sigma \geqslant \sigma_0} x_\sigma \in U$$

gdzie U oznacza otoczenie punktu x .

- **Topologia porządkowa**
Niech $(X, \sqsubseteq)$ będzie jest porządkiem liniowym. Niech dla $x, y \in X \cup \{-\infty, \infty\}$ symbol $]x, y[$ oznacza przedział otwarty w X , tzn. zbiór postaci $\{z \in X : x \sqsubset z \sqsubset y\}$. Wówczas rodzina

$$\mathcal{B} = \{]x, y[: x \sqsubset y\} \cup \{] - \infty, x[: x \in X\} \cup \{]x, \infty[: x \in X\} \cup \{X\}$$

pokrywa X i jest zamknięta ze względu na branie przekrojów skończonych. Dlatego też $\mathcal{B}$ jest bazą pewnej topologii τ na X . Topologię tę nazywa się topologią porządkową lub topologią przedziałową. Topologia porządkowa zawsze spełnia aksjomat Hausdorffa (T_2) i jest nawet przestrzenią T_5.

Bonusy

- **Przykład Mysiora**

  Przestrzeń Mysiora. W zbiorze X=($\mathbb{R}\times[0;2]) \cup \{z_0\}$, gdzie $z_0 = (0,-1) \in \mathbb{R}^2$ wprowadza się topologię $\mathcal{T}$ przez pełny układ otoczeń, przyjmując, że $\mathcal{B}(z_0) = \{\{z_0\} \cup ([n;+\infty) \times [0;2]) : n \in \omega\}$, $\mathcal{B}(z) = \{\{z\}\}$ dla każdego $z \in \mathbb{R} \times (0;2]$ oraz, dla $x \in \mathbb{R}$,

  $$\mathcal{B}((x,0)) = \{\{(x,0)\} \cup ([(\{x\} \times [0;2]) \cup (P + (x,0))] \setminus K) : K \in K(X)\},$$

  gdzie $K(X)$ jest rodziną wszystkich skończonych podzbiorów zbioru X, natomiast $P = \{(t,t) \in \mathbb{R}^2 : (t,t) \in X\}$. Nie jest trudno uzasadnić, że tak otrzymana przestrzeń topologiczna $(X, \mathcal{T})$, zwana przestrzenią Mysiora, jest regularną przestrzenią Hausdorffa. Można udowodnić, że zbiór A=[0;1]$\times\{0\}$ jest domknięty w tej przestrzeni, natomiast jeśli $f: X \to [0;1]$ jest funkcją ciągłą względem topologii $\mathcal{T}$ w X i topologii naturalnej w [0;1] taką, że $f(A) = \{0\}$, to $f(z_0) = 0$, zatem przestrzeń Mysiora nie jest całkowicie regularna.

- **Prosta Sorgenfreya** (prosta z topologią Sorgenfreya, prosta z topologią strzałki, strzałka Niemyckiego) – zbiór liczb rzeczywistych z topologią wprowadzoną przez bazę:

  $$\mathcal{B} = \{[a,b) : a,b \in \mathbb{R}, a < b\}.$$

  - Topologia strzałki jest mocniejsza od naturalnej topologii (euklidesowej) na prostej. Wynika to stąd, że każdy przedział otwarty można przedstawić jako nieskończoną sumę przedziałów jednostronnie otwartych.
  - Dla dowolnych liczb rzeczywistych $a, b (a < b)$, przedział $[a, b)$ jest zbiorem otwarto-domkniętym w topologii Sorgenfreya. Ponadto, dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$, zbiory

    $$\{x \in \mathbb{R} : x < a\}, \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant a\}$$

    są również otwarto-domknięte. Oznacza to, że prosta Sorgenfreya jest całkowicie niespójna.
  - Prosta Sorgenfreya jest przestrzenią doskonale normalną.
  - Topologia strzałki spełnia pierwszy aksjomat przeliczalności i jest ośrodkowa (na przykład, zbiór liczb wymiernych jest gęsty w $\mathbb{R}$ w topologii Sorgenfreya), ale nie spełnia ona drugiego aksjomatu przeliczalności. Wobec tego nie jest metryzowalna (ponieważ wszystkie ośrodkowe przestrzenie metryczne spełniają drugi aksjomat przeliczalności).
  - Prosta Sorgenfreya jest przestrzenią Baire'a.