Elementy Topologii B

Definicja 1.1

Niech X będzie niepustym zbiorem

Rodzinę $\tau \subseteq P(X)$ nazywamy **topologią** na zbiorze X, gdy spełnia 3 warunki:

(1) $\{\emptyset, X\} \subseteq \tau$

(2) $U, V \in \tau \Rightarrow U \cap V \in \tau$

(3) $A \subseteq \tau \Rightarrow \bigcup A \in \tau$

Elementy rodziny τ będziemy nazywać zbiorami otwartymi, zaś ich dopełnienia zbiorami domkniętymi

Przykłady:

a) $X \neq \emptyset \quad \tau = \{\emptyset, X\}$ - **topologia antydyskretna** - jest to taka topologia, w której zbiorami otwartymi są tylko pusty i cała przestrzeń

$X = \mathbb{R} \quad \tau = \{\emptyset, \mathbb{R}\}$

$U = (0, 2)$ - Nie jest to zbiór otwarty w tej topologii!

b) $X \neq \emptyset \quad \tau = P(X)$

W tej topologii każdy podzbiór zbioru X jest otwarty i domknięty jednocześnie

$X = \mathbb{R}$

$(0, 2), [0, 1), [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ - są zbiorami otwartym

Jest to tak zwana **topologia dyskretna** $\{0\}, \{\pi\}, \{\frac{1}{3}\}$ - też są otwarte

Uwaga 1.1

Zbiory jednoelementowe sa otwarte w topologii dyskretnej na dowolnym zbiorze $X \neq \emptyset$

Przykłady cd:

c) **Topologia naturalna na prostej** $\mathbb{R}$

$\tau = \{U \subseteq \mathbb{R} : \forall_{x \in U} \exists_{a<b, a,b \in \mathbb{R}} \quad x \in (a, b) \subseteq U\}$

W tej topologii przedziały otwarte typu (a,b) są zbiorami otwartymi

d) $X = \mathbb{R} \quad \tau = \{U \subseteq \mathbb{R} : |\mathbb{R} \backslash U| < \aleph_0 \vee U = \emptyset$

W tej topologii zbiorami otwartymi sa zbiory mające skończone dopełnienia

$A = (0, 2) \quad |\mathbb{R} \backslash A| = |\mathbb{R}| > \aleph_0$ - A nie jest otwarty w tej topologii

Przestrzeń Topologiczna (X, τ) - Przestrzeń topologiczna, gdzie X jest zbiorem niepustym, a τ jest topologią określoną na tym zbiorze

Uwaga 1.2

Topologia antydyskretna na zbiorze $X \neq \emptyset$ jest topologią najmniejszą, zaś $\tau = P(X)$ jest topologią największą w rodzinie wszystkich topologii na zbiorze X

Określenie 1.1

Jeśli τ_1, τ_2 są topologiami na zbiorze X oraz $\tau_1 \subset \tau_2$ to mówimy, że topologia τ_2 jest bogatsza niż topologia τ_1, zaś τ_1 jest uboższa od topologii τ_2

Twierdzenie 1.1 - o wprowadzaniu topologii przez metrykę

Niech (X, ρ) będzie przestrzenią metryczną. Wtedy rodzina $\tau_\rho = \{U \subseteq X : \forall_{x \in U} \quad \exists_{\varepsilon > 0} \quad K_\rho(x, \varepsilon) \subseteq U\}$ jest topologią na zbiorze X

Dowód

Polega na sprawdzeniu warunków 1-3 z definicji 1.1

$K_\rho(x, \varepsilon) = \{y \in X : \rho(x, y) < \varepsilon\} \subseteq X$

$\bar{K}_\rho(x, \varepsilon) = \{y \in X : \rho(x, y) \leqslant \varepsilon\} \subseteq X$

Ad.1

$\emptyset \in \tau_\rho$ - w oczywisty sposób

$X \in \tau_\rho \quad \forall_{x \in X} \quad \exists_{\varepsilon > 0} \quad K_\rho(x, \varepsilon) \subseteq X$

Ad.2

Ustalmy $U, V \in \tau_\rho$

$U \cap V \in (?) \tau_\rho$

Ustalamy $x \in U \cap V \Leftrightarrow x \in U \wedge x \in V$

Z założenia, że $U, V \in \tau_\rho \Rightarrow \exists_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0} \quad (x, \varepsilon_1) \subseteq U \wedge (x, \varepsilon_2) \subseteq V$

$\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$

Wtedy $K_\rho(x, \varepsilon) \subseteq U \wedge V$

Ad.3

Ustalamy $A \subseteq \tau_\rho$

A to rodzina, nie zbiór $\quad A \; \{V : V \in A\}$

$U := \bigcup A$

Ustalamy $x \in \bigcup A \Leftrightarrow\Leftrightarrow \exists_{V \in A} \quad x \in V, V \in A \subseteq \tau_\rho \Rightarrow \exists_{\varepsilon > 0} \quad K_\rho(x, \varepsilon) \subseteq V$ - Ponieważ $V \subseteq A$ to jest to ten sam ε

Lemat 1.1

Niech (X, ρ) będzie przestrzenią metryczną. Wtedy

a) $K_\rho(x, \varepsilon) \in \tau_\rho, x \in X, \varepsilon > 0$

Każda kula otwarta jest zbiorem otwartym

b) $X \backslash \bar{K_\rho}(x, \varepsilon) \in \tau_\rho$

Każda kula z brzegiem jest zbiorem domkniętym

c) $\forall X \backslash \{x_1, x_2 ... x_n\} \in \tau_\rho$

$x_1 ... x_n \in X$

Każdy zbiór skończony jest zbiorem domkniętym

Definicja 1.2

Niech τ będzie topologią na zbiorze X. Mówimy, że przestrzen topologiczna (X, τ) jest metryzowalna, gdy istnieje metryka $\rho : X^2 \longrightarrow [0, \infty)$ taka, że $\tau = \tau_\rho$

Przykłady:

a) $\mathbb{R}$ z topologią dyskretną $\tau = P(\mathbb{R})$

$\rho : \mathbb{R}^2 \to \{0, 1\} \quad \rho(x, y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$

b) $\mathbb{R}$ z topologią naturalną przedziałów otwartych

ρ - zwykły "moduł"

$\rho(x, y) = |x - y|$

$\tau = \tau_\rho$

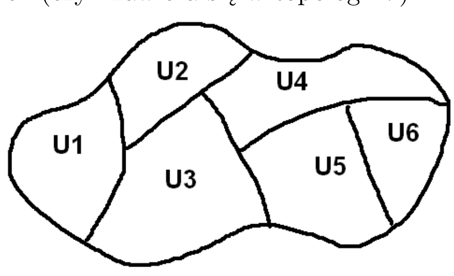
Definicja 2.1

Bazą przestrzeni topologicznej (X, τ) nazywamy taką rodzinę $B \subseteq \tau$, że dla każdego zbioru otwartego U istnieje rodzina $B_U \subseteq B$ taka, że $U = \bigcup B_U$

Innymi slowy baza to rodzina zbiorów otwartych, z których mozna zbudować dowolny zbior otwarty w przestrzeni (X, τ)

Spostrzeżenie

1. Baza składa się ze zbiorów otwartych (czyli zawiera się w topologii τ)



2. Na ogół zbiory bazowe są "małe"

3. Cała topologia jest również bazą

Przykład:

a) W topologii dyskretnej ($\tau = P(X)$) na zbiorze X bazą (nietrywialną) jest rodziną zbiorów 1-elementowych

b) W topologii antydyskretnej ($\tau = \{\emptyset, X\}$) bazą (różna od τ) jest 1-elementowa rodzina $B = \{X\}$

c) W topologii naturalnej na $\mathbb{R}$ baza stanowią (np.) przedziały otwarte o końcach wymiernych $B = \{(p, q) : p < q \quad p, g \in \mathbb{Q}\}$

Twierdzenie 2.1 (o wprowadzaniu topologii za pomocą bazy)

Rozważmy $X \neq \emptyset$ oraz rodzinę $B \subseteq P(X)$ spełniająca warunki:

$$(1) \quad \forall_{x \in X} \quad \exists_{U \subseteq B} \quad x \in U$$

Każda baza jest w szczególności pokryciem tzn. $\bigcup B \ X$

$$(2) \quad \forall_{U,V \in B} \quad \forall_{x \in U \cap V} \quad \exists_{W \in B} \quad x \in W \subseteq U \cap V$$

Wtedy rodzina $\tau_B = \{\bigcup \mathcal{C} : \mathcal{C} \subseteq B\}$ jest topologią na zbiorze X

Dowód

Sprawdzamy warunki na topologię

1. $\emptyset \in \tau_B$ bo $\emptyset = \bigcup \emptyset (= \mathcal{C})$

$X \in \tau_B$ bo $X = \bigcup B (= \mathcal{C})$

2. Ustalmy $U, V \in \tau_B \Rightarrow U = \bigcup \mathcal{C}_U \quad V = \bigcup \mathcal{C}_V$

$(?) U \cap V \in \tau_B$

$\mathcal{C}_U, \mathcal{C}_V \subseteq B$

Zauważmy, że

$$(*) \quad \forall_{W_1 \in \mathcal{C}_U} \quad \forall_{W_2 \in \mathcal{C}_V} \quad \exists_{W_3 (\neq \emptyset) \in B} \quad x \in W_3^x \subseteq W_1 \cap W_2 (W_1 \cap W_2 \neq \emptyset)$$

$x \in W_1 \cap W_2$

$$\mathcal{C} = \{W_3^x : \exists_{W_1 \in \mathcal{C}_V} \quad {}_{W_2 \in \mathcal{C}_V} \quad x \in W_1 \cap W_2\}$$

Pozostaje sprawdzić czy $\bigcup \mathcal{C} = U \cap V$

$\supseteq$:

Ustalmy $x \in U \cap V \Leftrightarrow x \in U \wedge x \in V \Rightarrow x \in \bigcup \mathcal{C}_U \wedge x \in \bigcup \mathcal{C}_V \Leftrightarrow \exists_{W_1 \in \mathcal{C}_U, W_2 \in \mathcal{C}_V} \quad x \in W_1 \wedge x \in W_2 \Rightarrow$

$(*) x \in W_3^x \subseteq W_1 \cap W_2 \Leftrightarrow x \in \bigcup \mathcal{C}_U$

$\subseteq$:

Ustalmy $x \in \bigcup \mathcal{C} \Leftrightarrow \exists_{W_3^y}$

Skoro $W_3^y \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \exists_y \in W_3^y \subseteq W_1 \cap W_2$

$W_1 \subseteq \mathcal{C}_U \quad W_1 \subseteq \mathcal{C}_U$

Z dwóch warunków dwie linijki wyżej widać, że $x \in W_1 \cap W_2 \subseteq U \cap V$

Aby τ_B była topologią pozostaje już tylko domkniętość tej rodziny na dowolnych sum (czyli warunek 3)

3. Ustalamy $A \in \tau_B \Rightarrow \forall_{U \in A} \quad \exists_{\mathcal{C}_U \subseteq B} \quad U = \bigcup \mathcal{C}_U$

$(?) \bigcup A \in \tau_B$

$\mathcal{C} := \bigcup \{\mathcal{C}_U : U \in A\} \quad \mathcal{C}_U \subseteq \mathcal{C} : U \in A$

$(?) \bigcup A = \bigcup \mathcal{C}$

$\subseteq$:

Ustalamy $x \in \bigcup A \Leftrightarrow \exists_{U \in A} \quad x \in U \Leftrightarrow \quad \exists_{U \in A} \quad \exists_{\mathcal{C}_U \subseteq B} \quad x \in \mathcal{C}_U, U \in A \Rightarrow \exists_{x \in W} \quad W \in \mathcal{C}_U \subseteq \mathcal{C} \Leftrightarrow x \in \bigcup \mathcal{C}$

$\supseteq$:

Ustalamy $x \in \bigcup \mathcal{C}$

$(?) x \in \bigcup A$

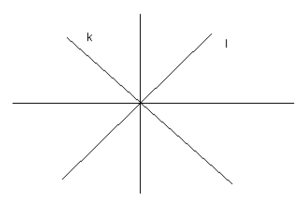
$x \in \bigcup \mathcal{C} \Leftrightarrow x \in \bigcup \bigcup \{\mathcal{C}_U : U \in A\} \Leftrightarrow$

$\exists_{U \in A} \quad \exists_{W \in \mathcal{C}_U} \quad x \in W \Rightarrow (W \subseteq U) \quad x \in U (\in A) \Rightarrow x \in \bigcup A$ bo $U \subseteq \bigcup A$

Podobnie wygląda dowód twierdzenia o wprowadzaniu topologii przez pełen układ otoczeń

Przykład:

$X = \mathbb{R}^2$



$B =$ rodzina (pęk) prostych przechodzących przez punkt (0,0)

Warunek 1

$\forall_{P=(x,y)} \quad \exists_{l_p \in B} \quad P \in l_p$

Oczywiste, mozna nawet podac wzór

Warunek 2

Ustalamy $l, k \in B \quad l \neq k \quad l \cap k = \{\{(0,0)\}\}$

Nie mozna zmieścić żadnej prostej w $l \cap k$

Zatem rodzina B nie wyznacza topologii na $\mathbb{R}^2$

Mozna jednak "poprawić" definicję rodziny B tak, aby generowała topologię $B' = B \cup \{\{(0,0)\}\}$

Definicja 2.1

Niech (X, τ) będzie przestrzenią topologiczną.

(1) Wnętrzem zbioru $A \subseteq X$ nazywamy zbiór postaci:

int A $= \bigcup \{U \in \tau : U \subseteq A\}$ - zbiór otwarty

(2) Domknieciem zbioru $A \subseteq X$ nazywamy zbiór postaci

cl A $= \bigcap\{F \subseteq X : X\setminus F \in \tau \wedge A \subseteq F\}$ - zbiór domknięty

Lemat 2.1 (charakteryzacja int oraz cl)

W przestrzeni topologicznej (X, τ)

(1) $x \in \mathrm{cl} A \Leftrightarrow \forall_{U\in\tau} \quad x \in U \Rightarrow U \cap A \neq \emptyset (**)$

(2) $x \in \mathrm{int} A \Leftrightarrow \exists_{U\in\tau} \quad (x \in U \wedge U \subseteq A)$

dla każdego $x \in X$ oraz $A \subseteq X$

Ad.2

$x \in \text{int } A \Leftrightarrow x \in \bigcup\{U \in \tau : U \subseteq A\} \Leftrightarrow \exists_{U\in\tau} \quad (x \in U \wedge U \subseteq A)$

Wynika wprost z definicji

Ad.1

$x \in \text{cl } A \Leftrightarrow x \in \bigcap\{F \subseteq X : X\setminus F \in \tau \wedge A \subseteq F\} \Leftrightarrow \forall_{F\subseteq X(domkn.)} \quad (A \subseteq F \Rightarrow x \in F)$

Hipoteza nie wprost (**)

$\exists_{U\in\tau} \quad x \in U \wedge U \cap A = \emptyset$

$A \subseteq X\setminus U$

Skoro

$U \in \tau \Rightarrow X\setminus U := F_U$ - domknięty

Zatem z (**) wynika: $x \in F_U = X\setminus U$, sprzeczność, bo $x \in U$

Twierdzenie 2.2 (o wprowadzaniu topologii za pomocą wnętrza)

Niech X będzie zbiorem niepustym, niech ponadto $\phi : P(X) \longrightarrow P(X)$ będzie funkcją spełniającą warunki:

(1 $\quad \phi(A) \subseteq A$

(2) $\quad \phi(A) = \phi(\phi(A))$

(3) $\quad \phi(A \cap B) = \phi(A) \cap \phi(B)$

(4) $\quad \phi(X) = X$

Wtedy rodzina $\tau_\phi = \{A \subseteq X : \phi(A) = A\}$ jest topologią na zbiorze X

Ponadto dla każdego $A \subset X$ zachodzi równość:

$\mathrm{int}_{\tau_\phi} A = \phi(A)$

Dowód

Sprawdzenie warunków na topologię

(1) $\quad \emptyset \in \tau_\phi$, bo $\phi(\emptyset) \subseteq \emptyset \Rightarrow \phi(\emptyset) = \emptyset$

$X \in \tau_\phi$, bo wynika to z warunku (4)

(2) Ustalmy $A, B \in \tau_\phi \Rightarrow \phi(A) = A \quad \phi(B) = B$

$\phi(A \cap B) \in \tau_\phi$

$\phi(A \cap B) = \phi(A) \cap \phi(B) = A \cap B \in \tau_\phi$

Zauważmy, że jeśli $A \subseteq B$ to $\phi(A) \subseteq B$

Istotnie wtedy $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$

Mamy $\phi(A \cap B) = \phi(A)$

Wiemy jednak, że $\phi(A \cap B) = \phi(A) \cap \phi(B)$ na mocy warunku (2)

Z dwóch powyższych wierszy wynika zatem, że $\phi(A) \subseteq \phi(B)$

(3) Ustalmy $A \in \tau_\phi$

$(?) \bigcup A \in \tau_\phi \Leftrightarrow \phi(\bigcup A) = \bigcup A (\subseteq$ z warunku (1)

$\supseteq$: Ustalamy $x \in \bigcup A \Leftrightarrow \exists_{U \in A} \quad x \in U$

$U \in A \subseteq \tau_\phi$

Z tego warunku wiemy, że $\phi(U) = U$

Oczywiście $U \subseteq \bigcup A \quad \phi(U) = U$

$x \in U = \phi(U) \subseteq \phi(\bigcup A)$

Dowód ponadto

Ustalmy $A \subseteq X$

(?) $\text{int } \tau_\phi A = \phi(A)$

$\subseteq$:

$\text{int } \tau_\phi A = \bigcup\{U \in \tau_\phi : U \subseteq A\}$

Z powyższych warunków wynikają dwie rzeczy:

$\phi(U) = U \quad \phi(U) \subseteq \phi(A)$

Stąd $U \subseteq \phi(A) \Rightarrow \text{int } \tau_\phi A \subseteq \phi(A)$

$\supseteq$:(warunek 1) $\Rightarrow \phi(\phi(A)) = \phi(A) \Rightarrow \phi(A) \in \tau_\phi$

(warunek 2)$\Rightarrow \phi(A) \subseteq A$

Ale $\phi(A) := U$

Stąd $\phi(A) \in \{U \in \tau_\phi : U \subseteq A\}$

$\phi(A) \subseteq \bigcup\{U \in \tau_\phi : U \subseteq A\} = \text{int }_{\tau_\phi} A$

Koniec pełnego dowodu

Twierdzenie 2.3 (o wprowadzaniu topologii za pomocą operacji domknięcia)

Niech $X \neq \emptyset$ oraz $\psi : P(X) \longrightarrow P(X)$ spełnia warunki:

(1) $A \subseteq \psi(A)$

(2) $\psi(\psi(A)) = \psi(A)$

(3) $\psi(A) \cup \psi(B) = \psi(A \cup B)$

(4) $\psi(\emptyset) = \emptyset$

Wtedy $\tau_\psi = \{A \subseteq X : \psi(X \backslash A) = X \backslash A\}$ jest topologią na zbiorze X

Ponadto dla każdego zbioru $A \subseteq X$ zachodzi równość $\text{cl }_{\tau_\psi} A = \psi(A)$

Dowód jest analogiczny

Własność operacji wnętrza i domknięcia

Niech (X, τ) będzie przestrzenią topologiczną

Wtedy dla każdego $A, B \subseteq X$ zachodzą warunki

(1) $\quad \text{int } X = X$

(2) $\quad \text{int}(\text{int}A) = \text{int}A$

(3) $\quad \text{int}(A \cap B) = \text{int } A \cap \text{ int } B$

(4) $\quad \text{int}A \subseteq A$

(1) $\quad \text{cl } \emptyset = \emptyset$

(2) $\quad \text{cl}(\text{cl}A) = \text{cl}A$

(3) $\quad \text{cl}(A \cup B) = \text{cl } A \cup \text{ cl } B$

(4) $\quad \text{A} \subseteq \text{cl}A$

Lemat 3.1

Niech (X, τ) będzie przestrzenią topologiczną. Wtedy dla każdego zbioru $A \subseteq X$ zachodzi równość

$\text{int}A = X \setminus \text{ cl}(X \setminus A)$

Dowód

Ustalmy $x \in \text{int}A \Leftrightarrow (lem.2.1) \quad \exists_{V_x} \quad x \in V_x \subseteq A$

(?) $\quad x \notin \text{cl}(X \setminus A)$

Hipoteza

$x \in \text{cl}(X \setminus A) \Leftrightarrow \forall_{U_x \in \tau} \quad U_x \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$

$x \in U_x$

Weźmy $U_x := V_x$ - sprzeczność

$\supseteq$:

$\text{int}A \supseteq X \setminus \text{ cl}(X \setminus A)$

$X \setminus \text{ int}A \subseteq \text{cl}(X \setminus A)$

Ustalmy $x \notin \text{int}A \Leftrightarrow \forall_{U_X \in \tau} \quad U_x \cap (X \setminus A) \neq \emptyset \Leftrightarrow x \in \text{cl}(X \setminus A)$

Definicja 3.1

Niech (X, τ) będzie przestrzenią topologiczną. Mówimy, że ciąg $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ punktów zbioru X jest zbieżny do punktu $x \in X$, gdy każde otoczenie otwarte punktu x zawiera prawie wszystkie (z dokładnością do skończenie wielu) wyrazy ciągu $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$

$x = \lim x_n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \forall_{U_x \in \tau} \quad \exists_{n_o \in \mathbb{N}} \quad \forall_{n \geqslant n_0} \quad x_n \in U_x$

Uwaga 3.1

W przestrzeni (X, ϱ) zbieżność ciągu $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq X$ do punktu $x \in X$ mozna opisać warunkiem:

$x = \lim x_n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \forall_{\varepsilon > 0} \quad \exists_{n_o \in \mathbb{N}} \quad \forall_{n \geqslant n_0} \quad \varrho(x_n, x) < \varepsilon$

$x_n \in K_\varrho(x, \varepsilon)$, gdzie $K_\varrho(x, \varepsilon) = U_x$

Przykład:

Ustalmy $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$

- W topologii naturalnej ten ciąg jest zbieżny do 0

- W topologii dyskretnej ten ciąg nie ma granicy, wszystkie punkty sa izolowane

- W topologii $\tau = \{U \subseteq \mathbb{R} : 0 \notin U \vee U = \mathbb{R}\}$ 0 jest granicą każdego ciągu nawet takich, które w topologii euklidesowej są rozbieżne np. $\{2^n : n \in \mathbb{N}\}$

Twierdzenie 3.1 (ciągowa charakteryzacja "cl" w przestrzenich metrycznych)

Niech (X, ϱ) będzie przestrzenią metryczną oraz niech $A \subseteq X$

Wtedy $\forall_{x \in X} \quad (x \in \mathrm{cl}A \Leftrightarrow \exists_{\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq A} \quad x = \lim A)$

Dowód

Ustalmy $x \in X$

$(\Rightarrow)$ załózmy, że $x \in \mathrm{cl}A \Leftrightarrow (lemat 2.1) \quad \forall_{n \in \mathbb{N}} \quad K_\varrho(x, \frac{1}{n}) \cap ... \neq \emptyset$

Gdzie można "przyrównać" $K_\varrho(x, \frac{1}{n}) = U_x \ni x_n$

Wtedy ciąg $\{x_n : n \in \mathbb{N}^+\}$ jest zbieżny do x

Istotnie jeśli $\varepsilon > 0$ to biorąc $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $\frac{1}{n_0} < 0$ otrzymujemy, że

$\forall_{n \geqslant n_0} \quad K_\varrho(x, \frac{1}{n}) \subseteq K_\varrho(x, \frac{1}{n_0}) \subseteq K_\varrho(x, \varepsilon)$

Gdzie znowu można "przyrównać" $K_\varrho(x, \frac{1}{n}) = x_n$, a $K_\varrho(x, \varepsilon) = U_x$

Czyli $\forall_{n \geqslant \mathbb{N}} \quad x_n \in K_\varrho(x, \varepsilon)$

$(\Leftarrow)$

Załóżmy, że $\lim_{n \in \mathbb{N}} x_n = x$ oraz $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq A$

(?) $x \in \mathrm{cl}A \Leftrightarrow \forall_{U_x \in \tau_\varrho} \quad U_x \cap A \neq \emptyset$

Ustalmy $U_x \in \tau_\varrho \Leftrightarrow \exists_{\varepsilon > 0} \quad K_\varrho(x, \varepsilon) \subseteq U_x$

Dla ε istnieje n_0 takie, że dla $n \geqslant n_0$ mamy $x_n \in K_\varrho(x, \varepsilon)$

Ale $x_n \in A$ stąd $x_n \in A \cap K_\varrho(x, \varepsilon) \subseteq A \cap U_x$

Definicja 3.2

Niech (X, τ) będzie przestrzenią topologiczną oraz $A \subseteq X$

Mówimy, że:

(1) punkt $x \in X$ jest punktem skupienia zbioru A, gdy

$\forall_{U_x \in \tau} \quad U_x \backslash \{x\} \cap A \neq \emptyset$

(2) Punkt $x \in A$ jest punktem izolowanym zbioru A, gdy nie jest punktem skupienia zbioru A

Zbiór punktów skupienia zbioru A oznaczać będziemy symbolem A^d

Przykłady:

a) W topologii antydyskretnej dla $X \neq \emptyset$, co najmniej 2-elementowego, gdzie $A = X$ każdy punkt jest punktem skupienia zbioru A

Jeśli $\emptyset \neq A \neq X \quad x \notin A (= U_x = X \supseteq A)$ to $x \in A^d$

$x \in A \longrightarrow |A| = 1$ to $x \notin A^d$

$x \in A \longrightarrow |A| > 1$ to $x \in A^d$

b) $X = \mathbb{R} \quad \tau = \{U \subseteq \mathbb{R} : 0 \notin U \vee U = \mathbb{R}\}$

Jedynym punktem skupienia $X = A$ jest $x = 0$

Lemat 3.2 (własności pochodnej zbioru)

W przestrzeni topologicznej (X, τ) dla każdych zbiorów $A, B \subseteq X$ zachodzą

(1) $\mathrm{cl}A = A \cup A^d$

(2) $(A \cup B)^d = A^d \cup B^d$

(3) $A \subseteq B \Rightarrow A^d \subseteq B^d$

Ponadto dla każdej rodziny $\{A_s : s \in S\} \subseteq X$ zachodzi inkluzja:

$\bigcup\{A_s^d : s \in S\} \subseteq (\bigcup\{A_s : s \in S\})^d$

Dowód

Ad.1

Ustalmy $x \in \mathrm{cl}A \quad$ ponadto $x \notin A$

$(?) x \in A^d$

Ustalmy $U_x \in \tau$

Wtedy $(x \in) U_x \cap A \neq \emptyset \quad$ (Lemat 2.1)

Zatem $(U_x \cap X) \backslash \{x\} \neq \emptyset \Leftrightarrow (U_x \backslash \{x\}) \cap A \neq \emptyset$

Czyli $x \in A^d$

$\supseteq$: (oczywiste)

$A \cap A^d \subseteq \mathrm{cl}A$

$A \subseteq \mathrm{cl}A$ (z domknięcia)

A^d (w sąsiedztwie) $\subseteq \mathrm{cl}A$ (w otoczeniu)

Warunek na bycie punktem skupienia jest mocniejszy od warunku z lematu 2.1

Ad.2

$\Longrightarrow$

Ustalmy $x \in (A \cup B)^d \Leftrightarrow \forall_{U_x} \quad (U_x \backslash \{x\}) \cap (A \cup B) \neq \emptyset$

$((U_x \backslash \{x\} \cap A) \cup ((U_x \backslash \{x\}) \cap B) \neq \emptyset$

Hipoteza

$x \notin A^d \wedge x \notin B^d$

Z pierwszej częsci powyższego mamy:

$\exists_{U_x^A \in \tau} \quad (U_x^A \backslash \{x\}) \cap A \neq \emptyset$

A z drugiej:

$\exists_{U_x^B \in \tau} \quad (U_x^B \backslash \{x\}) \cap B \neq \emptyset$

Zdefiniujmy teraz: $U_x := U_x^A \cap U_x^B \ni x$

Wtedy $(U_x \backslash \{x\}) \cap (A \cup B) = \emptyset$ - SPRZECZNOŚĆ

$\supseteq$: - wynika z warunku (3) - ćwiczenia

"Ponadto" również wynika z warunku (3)

Definicja 3.3

Niech (X, τ) będzie przestrzenią topologiczną. Mówimy, że zbiór $A \subseteq X$ jest:

(1) gęsty w (X, τ) ,gdy $\text{cl}A = X$

(2) brzegowy w (X, τ) ,gdy $\text{int}A = \emptyset$

(3) niegdziegesty w (X, τ) ,gdy $\text{intcl}A = \emptyset$

Przykłady:

a) W topologii dyskretnej mocy co najmniej 2 zbiorzem gęstym jest jedynie cała przestrzeń. Jeśli $|X| = 1$ to oczywiście $\{x\} = X$ jest gęsty. Jedynym zbiorem brzegowym jest zbiór pusty. Jeśli $|X| = 1$ to $P(X) = \{\emptyset, X\}$ czyli topologia dyskretna i antydyskretna są równe

b) $X = \mathbb{R}$ - topologia naturalna

$A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$

$\text{cl}A = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$

$\text{intcl}A = \emptyset$

Jest to zbiór nigdziegęsty i brzegowy

Twierdzenie 3.2 (charakteryzacja otoczeniowa zbiorów gęstych, brzegowych i nigdziegęstych)

Niech (X, τ) będzie przestrzenią topologiczną oraz $A \subseteq X$

Wtedy

(1) A jest gęsty $\Leftrightarrow \forall_{\emptyset \neq U \in \tau} \quad U \cap A \neq \emptyset$

(2) A jest brzegowy $\Leftrightarrow \forall_{\emptyset \neq U \in \tau} \quad U \cap (X \backslash A) \neq \emptyset$

Jego dopełnienie jest gęste

(3) A jest nigdzie gęsty $\Leftrightarrow \forall_{\emptyset \neq U \in \tau} \quad \exists_{\emptyset \neq V \subseteq U, V \in \tau} \quad V \cap A = \emptyset$

Dowód

Ad.1

A jest gęsty $\Leftrightarrow$ cl$A = X$ $\Leftrightarrow$(lemat 2.1)

($\Rightarrow$)

$\forall_{x \in X} (\forall_{U_x \in tau} \quad U_x \cap A \neq \emptyset)$

To nam daje:

$\forall_{\emptyset \neq U \in \tau} \quad U \cap A \neq \emptyset$

($\Leftarrow$)

Załóżmy, że $\forall_{\emptyset \neq U \in \tau} \quad U \cap A \neq \emptyset$

Ustalmy $x \in X, U_x \in \tau$

Wtedy $U_x \cap A \neq \emptyset \quad (U := U_x) \quad \Rightarrow x \in \text{cl}A \Rightarrow X \subseteq \text{cl}A$

Ad.2

Wystarczy zauważyć na mocy lematu 3.1, że jeśli A jest brzegowy to $X \backslash A$ jest gęsty i zastosować punkt 1 dowodu

Ad.3 Dowód w załączniku 1 (długi i mało spójny na pierwszy rzut oka)

Definicja 3.4

Niech (X, τ) będzie przestrzenią topologiczną

1) Mówimy, że rodzina $R \subseteq P(X)$ jest pokryciem zbioru X, gdy $\bigcup R = X$

2) Mówimy, że pokrycie R zbioru X jest otwarte, gdy $R \subseteq \tau \quad [\forall_{A \in R} \quad X \backslash A \in \tau]$ jest domknięte

3) Mówimy, że rodzina $S \subseteq P(X)$ jest podpokryciem pokrycia R zbioru X, gdy $S \subseteq R$ oraz $\bigcup S = X$

4) Mówimy, że pokrycie S jest wpisane w pokrycie R zbioru X, gdy zachodzi warunek:

$\forall_{A \in S} \quad \exists_{B \in R} \quad A \subseteq B$

Twierdzenie 3.3 (A.Stone'a)

W przestrzeni metrycznej w każde pokrycie otwarte można wpisać pokrycie otwarte i σ-dyskretne

Definicja 3.5

Mówimy, że rodzina $\{A_s : s \in S\} \subseteq P(X)$ jest lokalnie skończona w przestrzeni (X, τ)

$\forall_{x \in X} \quad \exists_{(x \in) U_x \in \tau} \quad |\{s \in S\} A_s \cap U_x \neq \emptyset| < \aleph_0$

Przykład:

$X = \mathbb{R} \quad R = \{(-n, n) : n \in \mathbb{N}^+\}$

Wtedy $\bigcup R$ jest pokryciem zbioru X (w topologii naturalnej na $\mathbb{R}$ można powiedzieć, że to pokrycie otwarte

$R_1 = \{(-2n, 2n) : n \in \mathbb{N}^+\}$

$\bigcup R_1 = R$ - podpokrycie pokrycia R

$R_2 = \{[z, z+1] : z \in \mathbb{Z}\}$

$\bigcup R_2 = R - R_2$ też jest pokryciem

R_2 jest wpisane w R, bo $\forall_{z\in\mathbb{Z}} \quad [z, z+1] \subseteq [|z|-2, |z|+2]$ i dalej jest to typu $(-n, n)$

Dowód Twierdzenia Stone'a

Niech (X, ϱ) będzie przestrzenią metryczną. Zatem τ_ϱ jest topologią na X

Niech $P \subseteq \tau_\varrho$ będzie pokryciem zbioru X

Stosujemy pewnik wyboru (WO) - każdy zbiór można uporzadkować, a więc możemy zapisać

$P := \{U_s : s \in S\}$ gdzie S jest dobrym porzadkiem z $\prec$

Rodzina jest σ-dyskretna, gdy jest przeliczalną suma rodzin dyskretnych, czyli szukamy nowego pokrycia otwartego postaci $R = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^+} R_n$, gdzie R_n - dyskretna, $n \in \mathbb{N}^+$

$\{\bigcup R = X\}$

Niech zatem dla każdego $n \in \mathbb{N}^+$ oraz $s \in S$ zbiór $V_{s,n}$ zadany będzie wzorem:

$$V_{s,n} = \bigcup\{K_\varrho(x, \frac{1}{2^n}) : K_\varrho(x, \frac{3}{2^n}) \subseteq U_s \wedge \forall_{t\prec s} \quad x \notin U_t \wedge \forall_{0<k<n} \quad x \notin V_{s,k}$$

$R_n := \{V_{s,n} : s \in S\}$

$R = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^+} \quad R_n$ - to mamy już σ z głowy

Należy sprawdzić:

1) R jest pokryciem

2) R jest wpisane w P

3) $\forall_{n\in\mathbb{N}^+} \quad R_n$ jest rodziną dyskretną

Ad.1

Ustalmy $x \in X$, trzeba mu wskazać $V_{s,n}$

$S_0 = \min_\prec\{s \in S : x \in U_s\}$ - da się, bo mamy dobry porządek

Z tego wynika:

$\forall_{t\prec S_0} \quad x \notin U_t$

Skoro $U_{S_0} \in P \subseteq \tau_\varrho$ to $\exists_{\varepsilon>0} \quad K_\varrho(x, \varepsilon) \subseteq U_{S_0}$

Niech $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N} : K_\varrho(x, \frac{3}{2^n}) \subseteq U_{S_0}\}$

$(?) x \in V_{S_0,n_0} \Leftrightarrow$ kwestia ostatniego warunku

$\forall_{0<k<n} \quad x \notin V_{S_0,k}$, gdyby

$\exists_{0<k<n} \quad x \in V_{S_0,k} \Rightarrow K_\varrho(x, \frac{3}{2^n}) \subseteq U_{S_0}$ to mamy sprzeczność z definicją n_0

Zatem mamy wszystkie warunki spełnione

$x \in V_{s,n}$

Ad.2

$\forall_{n\in\mathbb{N}^+, s\in S} \quad V_{s,n} \subseteq U_s$

Ad.3

Zauważmy, że dla każdego $n \in \mathbb{N}^+$ oraz $s \neq t \quad s,t \in S$ mamy:

$$\forall_{x \in V_{s,n}} \quad \forall_{y \in V_{t,n}} \quad \varrho(x,y) \succeq \frac{1}{2^n} \quad (*)$$

Istotnie przypuśćmy, że taki warunek nie zachodzi

$\varrho(x,y) < \frac{1}{2^n}$ to

ponieważ $\exists_{z \in V_{s,n}} \quad x \in K_\varrho(z, \frac{1}{2^n}) \quad \exists_{w \in V_{t,n}} \quad y \in K_\varrho(w, \frac{1}{2^n})$

otrzymujemy

$\varrho(w,z) \leqslant \varrho(z,x) + \varrho(w,y) < \frac{1}{2^n} \cdot 3$

stąd

$z \in K_\varrho(w, \frac{3}{2^n})$

$w \in K_\varrho(z, \frac{3}{2^n})$

Z dobrego uporządkowania zbioru $S \Rightarrow s \neq t \Rightarrow s \prec t \vee t \prec s$

Jeśli $s \prec t \Rightarrow w \in K_\varrho(z, \frac{3}{2^n}) \subseteq U_s$

$w \in U_s$ - sprzeczność z definicją $V_{t,n}$

W drugim przypadku jest to analogiczne

Ustalmy teraz $x \in X, n \in \mathbb{N}$. Wskażemy $U_x \in \tau_\varrho$ takie, że

$|\{s \in S : V_{s,n} \cap U_x \neq \emptyset| \leqslant 1$

Definiujemy

$U_x = K_\varrho(x, \frac{1}{2^{n+1}})$

Hipoteza

Istnieją co najmniej 2 zbiory z rodziny R_n mianowicie $V_{s,n}, V_{t,n}$ takie, że

$U_x \cap V_{s,n}(\ni z) \neq \emptyset \wedge U_x \cap V_{t,n}(\ni w) \neq \emptyset$

Dla z i w

$\varrho(z,w) \geqslant \frac{1}{2^n}$

Z drugiej strony $z \in U_x, w \in U_x$

$\varrho(z,w) < \frac{1}{2^{n+1}} \quad \varrho(w,x) < \frac{1}{2^{n+1}}$

$\varrho(z,w) \leqslant \varrho(z,x) + \varrho(x,w) < 2 \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n}$

Wniosek 5.1 (z twierdzenia Stone'a)

Każda przestrzeń metryczna (metryzowalna) ma bazę σ-dyskretną

Dowód

Ustalmy (X, ϱ) - przestrzeń metryczna

Rozważmy dla każdego $n \in \mathbb{N}^+$ rodzinę kul otwartych

$P_n = \{K_\varrho(x, \frac{1}{n}) : x \in X\}$

Wtedy P_n jest pokryciem otwartym zbioru X dla każdego $n \in \mathbb{N}^+$

Niech R_n będzie pokryciem otwartym wpisanym w P_n i σ-dyskretnym dla każdego $n \in \mathbb{N}^+$

(Istnienie R_n wynika z twierdzenia Stone'a dla P_n)

$B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^+} R_n$

Skoro R_n jest σ-dyskretna dla każdego $n \in \mathbb{N}^+$ to B równiez jest σ-dyskretna

$R_n = \bigcup_{m\in\mathbb{N}^+} R_n^m$

$B = \bigcup R_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^+} \bigcup_{m\in\mathbb{N}^+} R_n^m$

Pozostaje zauważyć, że B jest bazą przestrzeni (X, τ)

$(?)\forall_{U\in\tau_\varrho} \quad \forall_{x\in U} \quad \exists_{V\in B} \quad x \in V \subseteq U$

Ustalamy zbiór otwarty w U oraz $x \in U$

Przypomnienie: $\tau_\varrho = \{U \subseteq X : \forall_{x\in U} \quad \exists_{\varepsilon>0} \quad K_\varrho(x, \varepsilon) \subseteq U\}$

Istnieje zatem $\varepsilon > 0$ (wynika to z definicji) taki, że $K_\varrho(x, \varepsilon) \subseteq U$

Dobierzmy $n \in \mathbb{N}^+$ takie, aby $\frac{1}{n} < \varepsilon$

Ponieważ P_{2n} jest pokryciem przestrzeni X kulami o promieniach $\frac{1}{2n}$ oraz R_{2n} jest pokryciem wpisanym w P_{2n} to istnieje $V \in R_{2n} \subseteq B$ takie, że $x \in V$

Pozostaje sprawdzić czy $V \subseteq U$

Zauważmy, że istnieje $y \in X$ taki, że $V \subseteq K_\varrho(y, \frac{1}{2n}) \quad$ (a $\frac{1}{2n} \in P_{2n}$)

Ustalmy $z \in V$

Wtedy $\varrho(z, y) < \frac{1}{2n}$

$(?)z \in U \Leftarrow \varrho(z, x) < \frac{1}{n}$

$\varrho(x, z) \leqslant \varrho(x, y)(\leqslant \frac{1}{2n}) + \varrho(y, z)(\leqslant \frac{1}{2n}) \leqslant \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow K_\varrho(x, \varepsilon) \subseteq U$

Wiemy to, bo $x \in V$, a $V \subseteq K_\varrho(y, \frac{1}{2n})$

Definicja 5.1 (Aksjomaty oddzielania)

Niech (X, τ) bedzie przestrzenią topologiczną

Mówimy, że (X, τ) jest

1) T_0-przestrzenią, gdy dla każdej pary różnych punktów $x, y \in X$ istnieje zbiór otwarty U taki, że $|U \cap \{x, y\}| = 1$

2) T_1 - przestrzenią, gdy dla każdej pray dwóch punktów $x, y \in X$ istnieją zbiory otwarte takie, że $U \cap \{x, y\} = \{x\}$ i $V \cap \{x, y\} = \{y\}$

3) T_2 - przestrzenią (lub przestrzenią Hausdorffa), gdy dla pary różnych punktów $x, y \in X$ istnieją rozłączne zbiory otwarte U i V takie, że $x \in U, y \in V$

Przykład:

a) Załóżmy $|X| > 2$ oraz $\tau = P(X)$

Wtedy przestrzeń dyskretna (X, τ) jest T_i-przestrzenią dla każdego $i \in \{0, 1, 2\}$

b) Jeśli $|X| > 2$ to przestrzeń antydyskretna $(X, \{\emptyset, X\})$ nie jest T_i-przestrzenią dla każdego $i \in \{0, 1, 2\}$

Jeśli $|X| > 1$ to w trywialny sposób jest to T_i-przestrzeń (nie ma czego oddzielać)

c) $X = \mathbb{R} \quad \tau = \{(a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$

Spełnia tylko warunek przestrzeni T_0 dla punktu y (dla x nie zadziała w tym przypadku, bo objęło by to też y)

Uwaga 5.1

Każda przestrzeń T_2 jest T_1-przestrzenią, a każda T_1 jest T_0-przestrzenią

Lemat 5.1 (Charakteryzacja T_0 i T_1 przetrzeni)

Przestrzeń topologiczna (X, τ) jest:

1) T_0 - przestrzenią $\Leftrightarrow \forall_{x \neq y, x, y \in X} \quad \mathrm{cl}\{x\} \neq \mathrm{cl}\{y\}$

2) T_1 - przestrzenią $\Leftrightarrow$ zbiory jednoelementowe są domknięte w (X, τ)

Dowód

Ad.1

$(\Rightarrow)$ zakładamy, że (X, τ) jest T_0-przestrzenią

Hipoteza: Przypuszczamy, że $\exists_{x \neq y} \quad \mathrm{cl}\{x\} = \mathrm{cl}\{y\}$ stąd $y \in \mathrm{cl}\{x\}$ oraz $x \in \mathrm{cl}\{y\}$

Z drugiej strony istnieje $U \in \tau$ taki, że $|U \cap \{x, y\}| = 1$

Na przykład: $x \in U \quad y \notin U$

Wtedy $U_x := U$

$U_x \cap \{y\} = \emptyset \Rightarrow x \notin \mathrm{cl}\{y\}$ - Sprzeczność!

$(\Leftarrow)$ - ćwiczenie

Ad.2

Załóżmy, że zbiory 1-elementowe są domknięte

(?)(X, τ) - przestrzeń T_1

Ustalamy $x \neq y$

Stąd $\{x\} \neq \{y\}$

$x \notin \{y\} \quad y \notin \{x\}$

Zbiory $\{x\}, \{y\}$ sa domknięte, a więc skoro $x \notin \{y\} = \mathrm{cl}\{y\}$ to istnieje $U_x \in \tau$ taki, że $U_x \cap \{y\} = \emptyset$, analogicznie skoro $y \notin \{x\} = \mathrm{cl}\{x\}$ to istnieje $U_y \in \tau$ taki, że $U_y \cap \{x\} = \emptyset$

Przyjmijmy:

$U := U_x$

$V := U_y$

$(\Rightarrow)$ - ćwiczenie

Definicja 5.2 (przestrzenie T_3, T_4)

Mówimy, że T_1-przestrzeń (X, τ) jest:

1) przestrzenią REGULARNĄ (T_3 lub $T_3 + T_1$), gdy dla każdego $x \in X$ oraz dla każdego zbioru do-

mkniętego $F \subseteq X$ takiego, że $x \notin F$ istnieją rozłączne zbiory otwarte U, V takie, ze $x \in U$ oraz $F \subseteq V$

2) przestrzenią NORMALNĄ (T_4 lub $T_4 + T_1$), gdy dla każdej pary zbiorów domkniętych A, B rozłącznych istnieją rozłączne zbiory otwarte U, V takie, że $A \subseteq U, B \subseteq V$

Rysunki:

Przykład:

a) Każda przestrzeń dyskretna, zwłaszcza trywialna ($|X| = 1$) jest regularna i normalna

b) $\tau = \{U \subseteq \mathbb{R} : 0 \notin U \vee |R \backslash U| < \aleph_0\}$

$X = \mathbb{R}$

Ta przestrzeń jest T_0, T_1, T_2,regularna i normalna

c) $\tau = \{U \subseteq \mathbb{R} : |R \backslash U| < \aleph_0\} \cup \{\emptyset\}$ nie jest regularna ani normalna (jest tylko T_1)

$U = U_x = \mathbb{R} \backslash \{y\}$ - przestrzeń T_1

$V = U_y = \mathbb{R} \backslash \{x\}$

Nie jest T_2-przestrzenią, gdyby była to istniałyby U, V rozłączne takie, że $x \in U, y \in V$, wtedy

$|\mathbb{R} \backslash U| < \aleph_0 \quad U \subseteq \mathbb{R} \backslash V$ - skończone

$|\mathbb{R} \backslash V| < \aleph_0 \quad V \subseteq \mathbb{R} \backslash U$ - podobnie, Sprzeczność!

Lemat 5.2 (charakteryzacja przestrzeni normalnych i regularnych

T_1-przestrzeń (X, τ) jest

1) regularna $\Leftrightarrow \forall_{x \in X} \quad \forall_{U_x \in \tau} \quad \exists_{V_0 \in \tau} \quad x \in V_0 \subseteq \mathrm{cl} V_0 \subseteq U_x (*)$

2) normalna $\Leftrightarrow \forall_{A \subseteq X (domkn.)} \quad \forall_{U_A \in \tau} \quad \exists_{V_0 \in \tau} \quad A \subseteq V_0 \subseteq \mathrm{cl} V_0 \subseteq U_A (**)$

Dowód

Ad.1

$(\Leftarrow)$

Zakładamy, że $(*)$ zachodzi

$(?) (X, \tau)$ - przestrzeń regularna

Ustalamy $x \in X \quad F$ (domkn.)$\subseteq X \quad x \notin F$

$x \in U_x = X \backslash F$ - otwarty

$(*) \Rightarrow \exists_{V_0 \in \tau} \quad x \in V_0 \subseteq \mathrm{cl} V_0 \subseteq U_x$

Podstawmy $U := V_0 \quad U \cap V = \emptyset$

$V = X \backslash \ \mathrm{cl} V_0$

$x \in U$

Pozostaje sprawdzić czy $F \subseteq V$

$F = X \backslash U_x \quad \mathrm{cl} V_0 \subseteq U_x \Rightarrow X \backslash \ \mathrm{cl} V_0 \supseteq X \backslash U_x$

$(\Rightarrow)$ - ćwiczenie

Ad.2

Zakładamy, że (X, τ) jest normalna

(?) czy $(**)$ zachodzi

Ustalamy A (domkn.) $\subseteq X \quad U_A \in \tau$

Szukamy $V_0 \in \tau$ takiego, że $A \subseteq V_0 \subseteq \mathrm{cl}V_0 \subseteq U_A$

Podstawiamy $B := X \backslash U_A$ - domknięty $\quad B \cap A = \emptyset$ (bo $A \subseteq U_A$)

Z normalności $\Rightarrow \exists_{U,V \in \tau} \quad U \cap V = \emptyset \wedge A \subseteq U \wedge B \subseteq V$

Bierzemy $V_0 := U$

Sprawdzimy, że $\mathrm{cl}V_0 \subseteq U_A$

Mamy $V_0 = U \cap V = \emptyset \Rightarrow V_0 \subseteq X \backslash V$

$\mathrm{cl}V_0 \subseteq X \backslash V$ czyli $\mathrm{cl}V_0 \cap V = \emptyset$

$B \subseteq V$

Stąd $\mathrm{cl}V_0 \cap B = \emptyset$

$\mathrm{cl}V_0 \subseteq X \backslash B = U_A$

$(\Leftarrow)$ - ćwiczenie

Uwaga 5.2

Każda przestrzeń normalna jest regularna, a każda regularna jest T_2 - przestrzenią

$T_4 + T_1 \subset T_3 + T_1 \subset T_2 \subset T_1 \subset T_0$

Definicja 5.3

Niech (X, ϱ) będzie przestrzenią metryczną oraz $\emptyset \neq A \subseteq X, x \in X$

Wtedy $dist(x, A) = \inf\{\varrho(x, y) : y \in A\}$

Własność $dist(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in \mathrm{cl}A$ - ćwiczenie

Twierdzenie 5.1

Każda przestrzeń metryczna (metryzowlana) jest normalna

Dowód

Ustalmy (X, ϱ) - przestrzeń metryczna

Niech ponadto A, B(domkn.) $\subseteq X \quad A \cap B = \emptyset$

Zauważmy, że $\forall_{x \in A} \quad dist(x, B) > 0$

$\forall_{y \in B} \quad dist(y, A) > 0$

Definiujemy

$U := \bigcup_{x \in A} K_\varrho(x, S_x)$, gdzie $S_x = \frac{1}{2} dist(x, B)$

$V := \bigcup_{y \in B} K_\varrho(y, R_y)$, gdzie $R_y = \frac{1}{2} dist(y, A)$

Ponieważ $A \subseteq U, B \subseteq V$ oraz $U, V \in \tau_\varrho$ (jako sumy kul) to wystarczy sprawdzić rozłączność $U \cap V = \emptyset$

Hipoteza:

$\exists_{z\in U\cap V}$

Wtedy $\exists_{x\in A, y\in B} \quad z \in K_\varrho(x, S_x) \cap K_\varrho(y, R_y)$

Wtedy $\varrho(x,y) \leqslant \varrho(x,z) + \varrho(z,y) < S_x + R_y = \frac{1}{2}dist(x,B)(y \in B) + \frac{1}{2}dist(y,A)(x \in A) \leqslant \frac{1}{2}\varrho(x,y) + \frac{1}{2}\varrho(x,y) = \varrho(x,y)$ - Sprzeczność!

Twierdzenie 6.1

Każda przestrzeń regularna z baza przeliczalną jest normalna

$T_3 + T_1 +$ baza przeliczalna $= T_4 + T - 1$

Dowód

Niech (X,τ) będzie przestrzenią regularną oraz $B \subseteq \tau$ jej bazą przeliczalną

Niech ponadto $A, B \subseteq X$ będą parą zbiorów domkniętych oraz rozłącznych

$(?)\exists_{U,V\in\tau} \quad A \subseteq U \wedge B \subseteq V \wedge U \cap V = \emptyset$

Wiemy, że na mocy lematu 5.2 (charakteryzacja regularności)

$\forall_{x\in A} \quad \exists_{U_x\in\tau} \quad x \in U_x \subseteq \mathrm{cl}U_x \subseteq X\backslash B$ - otwarte otoczenie B

$\forall_{y\in B} \quad \exists_{V_y\in\tau} \quad y \in V_y \subseteq \mathrm{cl}V_y \subseteq X\backslash A$ - otwarte otoczenie A

Bez straty ogólności możemy założyć, że

$\forall_{x\in A} \quad U_x \in B \qquad \forall_{y\in B} \quad V_y \in B$

(w razie potrzeby zmniejszamy U_x lub V_y

Rozważmy rodziny $P = \{U_x : x \in A\} \subseteq B$

$R = \{V_y : y \in B\} \subseteq B$

Na mocy przeliczalności mozna elementy rodzin P i R ustawić w ciągi:

$P = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$

$R = \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$

$U := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \quad (U_n \backslash \bigcup_{k\leqslant n} \quad \mathrm{cl}V_k)$ - domknięty zbiór (zatem cała suma domkniętych jest domknięta)

$V := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \quad (V_n \backslash \bigcup_{k\leqslant n} \quad \mathrm{cl}U_k)$ - otwarty zbiór (zatem cała suma otwartych jest domknięta)

$U, V \in \tau$

$(?)A \subseteq U$

$x \in A \Rightarrow x \in U_x = U_{n_0}$ dla pewnego $n_0 \in \mathbb{N}$

Z drugiej strony $\mathrm{cl}V_m \cap A = \emptyset$ stąd X nie może nalezeć do żadnego z domknięć

Zatem $A \subseteq U$

Analogicznie $B \subseteq U$

Pozostaje sprawdzić, że $U \cap V = \emptyset$

Hipoteza:

$\exists_{z\in U\cap V} \quad \Leftrightarrow \exists_{n_1,n_2\in\mathbb{N}} \quad z \in U_{n_1} \backslash \bigcup_{k<n_1} \quad \mathrm{cl}V_k \wedge z \in V_{n_2} \backslash \bigcup_{k<n_2} \quad \mathrm{cl}U_k$

Niech $n_1 < n_2$

Wtedy: $z \in V_{n_2} \land z \notin \mathrm{cl}U_{n_1} \quad (k := n_1)$

Z drugiej strony $z \in U_{n_1}$

Sprzeczność

Definicja 6.1

Niech (X, τ_x) oraz (Y, τ_y) będą przestrzeniami topologicznymi

Mówimy, że funkcja $f : X \to Y$

1) jest ciągła w punkcie $x \in X$, gdy $\forall_{V \in \tau_y} \quad (f(x) \in V \Rightarrow \exists_{U \in \tau_x} \quad (x \in U \land f(U) \subseteq V))$

2) jest ciągła, gdy jest ciągła w każdym punkcie

Lemat 6.1

Funkcja $f : (X, \tau_x) \to (Y, \tau_y)$ jest funkcją ciągłą witw, gdy przeciwobrazy zbiorów otwartych poprzez f są otwarte

Dowód

$(\Rightarrow)$

Załóżmy, że f jest ciągła $\iff$ f jest ciągła w każdym punkcie

$(?)\forall_{V \in \tau_y} \quad f^{-1}(V) \in \tau_x \quad (*)$

Ustalmy $V \in \tau_y$

Załóżmy $V \neq \emptyset$ (gdyby byłby pusty to przeciwobraz też byłby pusty)

Jeśli $f^{-1}(V) = \emptyset \in \tau_x$ - jest w porządku

Niech $x \in f^{-1}(V) \quad (f(x) \in V)$ (przypadek, gdy $f^{-1}(V) \neq \emptyset$)

Z definicji 6.1 $\Rightarrow \exists_{U_x \in \tau_x} \quad x \in U_x \land f(U_x) \subseteq V$

Jeśli $x \in U_x$ to $U_x \subseteq f^{-1}(V) \Rightarrow f^{-1}(V) \in \tau_x$

$(\Leftarrow)$ Załóżmy, że $(*)$ zachodzi

Pokażemy, że f jest ciągła w każdym punkcie

Uslamy $x \in X$

$V_{f(x)} \in \tau_y$

$(*)$ dla $V_{f(x)}: \quad f^{-1}(V_{f(x)}) \in \tau_x$

Mamy $f^{-1}(V_{f(x)}) = U_x \in \tau_x$

Wtedy $x \in U_x \quad f(U_x) \subseteq V_{f(x)}$

Przykłady:

1) Jeśli (Y, τ_y) jest przestrzenią antydyskretną, to każda funkcja $f : (X, \tau_x) \to (Y, \tau_y)$ jest ciągła

2) Jeśli (X, τ_x) jest przestrzenią dyskretną, to każda funkcja $f : (X, \tau_x) \to (Y, \tau_y)$ jest ciągła

3) $X = Y \quad \tau_1 = \{\emptyset, X\} \quad \tau_2 = P(X) \quad |X| > 1$

Wtedy funkcja $f : (X, \tau_1) \to (X, \tau_2)$ jest ciągła witw, gdy jest stała

Istotnie przypuśćmy $\exists_{x_1 \neq x_2} \quad x_1, x_2 \in f(X)$

Wtedy $\{x_1\} = v_1 \in \tau_2 \quad \{x_2\} = v_2 \in \tau_2$

Z ciągłości $f^{-1}(v_1) \neq x \quad f^{-1}(v_2) \neq x$ sprzeczność

Lemat 6.2

Niech (X, τ_x) oraz (Y, τ_y) bedą przestrzeniami topologicznymi oraz niech $f : X \longrightarrow Y$ będzie funkcją ciągłą. Wtedy $f(\mathrm{cl}A) \subseteq \mathrm{cl}f(A)$ dla każdego $A \subseteq X$

Dowód

Ustalmy $A \subseteq X$ oraz $y \in f(\mathrm{cl}A) \Leftrightarrow \exists_{x \in clA} \quad f(x) = y$

Skoro $x \in \mathrm{cl}A$ to $\forall_{U_x \in \tau_x} \quad U_x \cap A \neq \emptyset \quad (*)$

$(?) y \in \mathrm{cl}f(A) \Leftrightarrow \forall_{V_y \in \tau_y} \quad V_y \cap f(A) \neq \emptyset$

Ustalmy $V_y \in \tau_y$

Z ciagłości w punkcie x mamy

$\exists_{U_x \in \tau_x} \quad x \in U_x \wedge f(x) \subseteq V_y$

Wykorzystajmy $(*) \Rightarrow U_x \cap A \neq \emptyset \Leftarrow f(U_x \cap A) \neq \emptyset$

Ale $f(U_x \cap A) \subseteq f(U_x) \cap f(A) \subseteq V_y \cap f(A)$

Stąd $V_y \cap f(A) \neq \emptyset$ Udowodnione

Uwaga 6.1

Funkcja $f : (X, \tau_x) \longrightarrow (Y, \tau_y)$ jest ciągła witw, gdy przeciwobrazy zbiorów domkniętych poprzez funkcję f są domknięte

Dowód - ćwiczenia - lemat 6.1

Twierdzenie 6.2

Jeśli $f : (X, \tau_x) \longrightarrow (Y, \tau_y)$ jest ciągła to dla każdego ciągu $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq X$ zbieżnego do pewnego punktu $x \in X$

$\lim_{n \in \mathbb{N}} f(x_n) = f(x)$

Dowód

Ustalmy $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq X \qquad x = \lim_{n \to \infty} x_n$

Niech $V_{f(x)} \in \tau_y \quad f(x) \in V_{f(x)}$

$(?) \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \quad \forall_{n \geqslant n_0} \quad f(x_n) \in V_{f(x)}$

Z ciągłości f mamy $f^{-1}(V_{f(x)}) \in \tau_x$

Skoro $x_n \to x$ to istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $\forall_{n \geqslant n_0} \quad x_n \in U_x$

Stąd $\forall_{n \geqslant n_0} \quad f(x_n) \in f(U_x) \subseteq V_{f(x)}$

Twierdzenie 6.3

Niech $(X, \varrho), (Y, \mu)$ będą przestrzeniami metrycznymi. Wtedy $f : (X, \varrho) \to (Y, \mu)$ jest ciągła $\Leftrightarrow$ gdy $\forall_{x_n : n \in \mathbb{N}} \subseteq X \quad ((\exists_{x \in X} \quad \lim_{x_n} = x) \Rightarrow \lim f(x_n) = f(\lim_{n \to \infty} x_n) \quad (**)$

Dowód

$(\Rightarrow)$

Wynika z twierdzenia 6.2

$(\Leftarrow)$

Zakładamy, że $(**)$ zachodzą

Ustalmy $\varepsilon > 0 \quad k\mu(f(x), \varepsilon)$

$(?) \quad \exists_{\delta > 0} \quad f(K_\varrho(x, \delta)) \subseteq k\mu(f(x), \varepsilon)$

Hipoteza (?) nie zachodzi

Niech $f(x_n) \in f(k\varrho(x, \frac{1}{n})) \setminus k\mu(f(x), \varepsilon) \quad n \in \mathbb{N}$

Zatem skoro $x_n \in k\varrho(x, \frac{1}{n})$ to $x_n \longrightarrow x$

Z drugiej strony $f(x_n) \not\longrightarrow f(x)$, sprzeczność z $(**)$

Twierdzenie 7.1 (Lemat Urysohna)

Niech (X, τ) będzie przestrzenią normalną oraz $A, B \subseteq X$ niech beda parą podzbiorów domkniętych, rozłącznych .

Wtedy istnieje funkcja $f : X \longrightarrow [0, 1]$ taka, że $f(x) = 0, x \in A$ oraz $f(x) = 1, x \in B$

Dowód

$[0, 1] \cap \mathbb{Q} = \{r_n : n \in \mathbb{N}\}$ przy czym $r_0 = 0$ oraz $r_1 = 1$

Dla każdego n znajdziemy zbiór otwarty $V_n \subseteq X$ taki, aby spełnione były warunki:

1) $\quad V_0 \supseteq A \quad V_1 = X \setminus B$

2) $\quad \forall_{r_n < r_k} \quad V_n \subseteq \mathrm{cl} V_n \subseteq V_k$

Krok 1

Przestrzeń (X, τ) jest normalna oraz $A \subseteq X \setminus B = V_1$

Z odpowiedniego lematu (5.2) istnieje zbiór $V_o \subseteq X$ otwarty i taki, że $A \subseteq V_0 \subseteq \mathrm{cl} V_0 \subseteq V_1$

Krok 2

Załóżmy, że wybrane zostały zbiory $V_0, ..., V_n$ tak, aby warunki (1) i (2) były spełnione

Czym jest $V_{n+1} \quad (?)$

$r_L = \max\{r_i : r_i < r_{n+1} \quad i = 0, 1...n\}$

$r_P = \min\{r_i : r_i > r_{n+1} \quad i = 0, 1...n\}$

Zauważmy, że $V_L, V_P \in \{V_0, ..., V_n\}$ (odpowiednio r_L, r_P)

Stąd spełniają one warunek (2) czyli $\mathrm{cl}V_L \subseteq V_P$

Znowu wykorzystujemy normalność (X,τ) + lemat 5.2

$\exists_{V_{n+1}\subseteq X-otw.} \quad \mathrm{cl}V_L \subseteq V_{n+1} \subseteq \mathrm{cl}V_{n+1} \subseteq V_P$

Tak znaleziony zbiór V_{n+1} spełnia wraz ze zbiorami $V_0, ..., V_n$ warunki (1) i (2)

Definiujemy teraz docelowo funkcję $f : X \longrightarrow [0,1]$ (na zbiorze $[0,1]$ rozważamy topologię naturalną dziedziczoną z prostej $\tau_{[0,1]} =< \{(a,b)\cap[0,1] : (a,b)\subseteq \mathbb{R}\} >$ - oznaczenie topologii generowanej przez zbiór "w środku")

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in B \\ \inf\{r_n : x \in V_n\} & x \notin B \end{cases}$$

Oczywiście zauważmy

$\forall_{x\in B} \quad f(x) = 1$

$\forall_{x\in A} \quad x \in r_0 \Rightarrow f(x) = r_0 = 0$

Ciągłość f

Ponieważ zbiory bazowe sa postaci $[0,b), (a,1], (a,b)$, gdzie $a,b \in [0,1] \quad b \neq 0 \quad a \neq 1$

Wystarczy sprawdzić ciągłość f na tych zbiorach tzn. należy sprawdzić czy przeciwobrazy tych obrazów są otwarte w X

1) $\quad x \in f^{-1}([0,b))$

$(?)\exists_{U_x\in\tau} \quad f(U_x) \subseteq [0,b)$

Mamy $f(x) \in [0,b)$

czyli $0 \leqslant f(x) \leqslant b$

z gęstości $\mathbb{Q}$ w $[0,1]$ istnieje takie $n \in \mathbb{N}$, że $f(x) < r_n < b$

Skoro $f(x) = \inf\{r_k : x \in V_k\}$

to na mocy warunku (2) otrzymujemy $x \in V_n$

$U_x := V_n$

Sprawdźmy czy $f(U_x) \subseteq [0,b)$

Ustalmy $z \in U_x \Leftrightarrow z \in V_n \Rightarrow \forall_{r_L > r_n} \quad z \in V_l \Rightarrow f(x) \leqslant r_n < b \Rightarrow f(x) \in [0,b)$

2) $\quad x \in f^{-1}((a,1])$

$(?)\exists_{U_x\in\tau} \quad f(U_x) \subseteq (a,1]$

Mamy $a < f(x) \leqslant 1$

z gęstości $\mathbb{Q}$ istnieje $r_n \in \mathbb{Q}\cap[0,1]$ takie, że

$a < r_n < f(x)$

Jeśli $f(x) = 1 \Leftrightarrow x \in B \Rightarrow x \notin V_1 \Rightarrow x \notin V_n$

Jeśli $f(x) = \inf\{... \quad \Rightarrow x \notin V_n$

Ponownie z gęstości $\mathbb{Q}$ istnieje $r_k \in Q \cap [0,1]$ takie, że

$a < r_k < r_n$

(Konstrukcja V)

Z warunku (2) $\Rightarrow r_k < r_n \Rightarrow \mathrm{cl}V_k \subseteq V_n$

Zatem $x \notin V_n \Rightarrow x \notin \mathrm{cl} V_k \Rightarrow x \in X \backslash V_k$ - otwarte

Sprawdzamy czy $f(U_x) \subseteq (a, 1]$

Ustalmy $z \in U_x \Leftrightarrow z \notin \mathrm{cl} V_k \Rightarrow z \notin V_k$

Stąd $f(z) \geqslant r_k > a$ czyli $f(z) \in (a, 1]$

3) $f^{-1}((a, b)) = f^{-1}((a, 1] \cap [0, b)) = f^{-1}((a, 1]) \cap f^{-1}([0, b)) \in \tau$ - jako częśc wspólna dwóch zbiorow otwartych

Definicja 7.1

Mówimy, że T_1-przestrzeń jest przestrzenią całkowicie regularną (lub przestrzenią Tichonowa), gdy dla każdego $x \in X$ oraz dla każdego zbioru domkniętego F takie, ze $x \in F$ istnieje funkcja ciągła $f : X \longrightarrow [0, 1]$ taka, że $f(x) = 0, f(\{F\}) = \{1\}$

Oznaczamy tę przestrzen jako $T_{3,5}(+T_1)$

Uwaga 7.1

Oczywiście każda przestrzeń Tichonowa jest przestrzenią regularną. Istotnie jeśli $x \in X, F \subseteq X$ - domknięty $x \notin F$ to

$U_x = f^{-1}([0, \frac{1}{2}))$

$U_F = f^{-1}((\frac{1}{2}, 1])$ - otwarte jako obrazy zbiorów otwartych poprzez funkcję ciągłą

$x \in U_x$, bo $f(x) = 0$

$F \subseteq U_F$, bo $f(F) = \{1\}$

Wniosek 7.1

Przestrzenie normalne sa całkowicie regularne

Istotnie wystarczy wziąć parę:

$A := \{x\}$

$B := F$

$(x \notin F)$ - domknięty

i zastosować twierdzenie 7.1

Lemat 7.1

Niech (X, τ) będzie przestrzenią normalną oraz niech $M \subseteq X$ bedzie jej podzbiorem domkniętym. Niech ponadto $f : M \longrightarrow [-c, c] \subseteq \mathbb{R}(c > 0)$ bedzie funkcją ciągłą. Wtedy istnieje funkcjna ciagła $g : X \longrightarrow [-\frac{1}{3}c, \frac{1}{3}c]$ taka, że $\forall_{x \in M} \quad |f(x) - g(x)| \leqslant \frac{2}{3}c \quad (*)$

Dowód

Niech $A = f^{-1}([-c, -\frac{1}{3}c]) \quad B = f^{-1}([\frac{1}{3}c, c])$

Oczywiście A i B sa domknięte w M

Fakt

$M \subseteq X$ - domknięty $\quad F \subseteq M$ - domknięty $\Rightarrow F$ - domkniety w X

ćwiczenie!

Zatem A i B są parą zbiorów domknietych i rozłącznych w X

Z normalności przestrzeni i z lematu Urysohna wynika, że istnieje funkcja ciągła $h : X \longrightarrow [0,1]$ taka, że $h(A) = \{0\} \quad h(B) = \{1\}$

Definicja g :

$g(x) = \frac{2}{3}c(h(x) - \frac{1}{2}), x \in X$

1) $\quad |g(x)| = |\frac{2}{3}c||h(x) - \frac{1}{2}|$

$0 \leqslant h(x) \leqslant 1 \quad \backslash - \frac{1}{2}$

$-\frac{1}{2} \leqslant h(x) \leqslant \frac{1}{2} \quad \backslash \cdot \frac{2}{3}c$

$-\frac{1}{3}c \leqslant h(x) \leqslant \frac{1}{3}$

2) $\quad$ Ustalmy $x \in M$

$I \quad x \in A \Rightarrow (*)?$

$h(x) = \{0\}$

$g(x) = \frac{2}{3} \cdot -\frac{1}{2} = -\frac{1}{3}c$

$-c \leqslant f(x) \leqslant -\frac{1}{3} \quad \backslash - g(x)$

$-c + \frac{1}{3}c \leqslant f(x) - g(x) \leqslant -\frac{1}{3}c - (-\frac{1}{3}c)$

$\frac{2}{3}c \leqslant f(x) - g(x) \leqslant 0$

stąd $|f(x) - g(x)| \leqslant \frac{2}{3}c$

$II \quad x \in B \Rightarrow h(x) = 1 \Rightarrow g(x) = \frac{2}{3}c \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}c$

$\frac{1}{3} \leqslant f(x) \leqslant c \backslash - g(x)$

$0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{2}{3}c$

stąd

$|f(x) - g(x)| \leqslant \frac{2}{3}c$

$III \quad x \in M \backslash (A \cup B) \Rightarrow f(x) \in (-\frac{1}{3}c, \frac{1}{3}c)$

$g(x) \in [-\frac{1}{3}c, \frac{1}{3}c]$

$|f(x) - g(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)| = \frac{2}{3}c$

Definicja 7.2

Niech (X, ϱ) bedzie przestrzenią metryczną oraz niech $\emptyset \neq A \subseteq X$.

Odległością punktu $x \in X$ od zbioru A nazywamy liczbę $\mathrm{dist}(x, A) = \inf\{\varrho(x, y) : y \in A\}$

Lemat 7.2

Niech (X, ϱ) będzie przestrzenią metryczną oraz niech $\emptyset \neq A \subseteq X$.

Wtedy $\mathrm{dist}(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in \mathrm{cl}A$

Dowód

$(\Rightarrow)$

Załóżmy, że $(x, A) = 0$

Ponadto załóżmy, ze $x \notin A$

Hipotetycznie przypuszczamy $x \notin \mathrm{cl}A \Rightarrow \exists_{\varepsilon>0} \quad K(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$

dokończenie - ćwiczenia

Lemat 7.3

Niech (X, ϱ) będzie przestrzenią metryczną.

Wtedy dla każdego zbioru niepustego $A \subseteq X$ funkcja

$f_A : X \longrightarrow [0, \infty)$ zadana wzorem

$f_A(x) = \mathrm{dist}(x, A)$ jest funkcja ciągłą

Dowód

Zauważmy

$|\mathrm{dist}(x, A) - \mathrm{dist}(y, A)| \leqslant \varrho(x, y) \quad (*)$

Istotnie mamy ustalone $a \in A$

$\mathrm{dost}(x, A) \leqslant \varrho(x, a) \leqslant \varrho(a, y) + \varrho(y, x)$

czyli

$\mathrm{dist}(x, A) \leqslant \varrho(a, y) + \varrho(y, x)$

$\mathrm{dist}(x, A) - \varrho(y, x) \leqslant \varrho(a, y) \quad a \in A$

Ale wiemy, że $\mathrm{dist}(y, A) = \inf\{\varrho(x, a) : a \in A\}$, stąd:

$\mathrm{dist}(x, A) - \varrho(y, x) \leqslant \mathrm{dist}(y, A)$

$\mathrm{dist}(x, A) -$ $\mathrm{dist}(y, A) \leqslant \varrho(y, x)$

Zamieniając rolami (w powyższym rozumowaniu) x oraz y otrzymujemy analogicznie

$\mathrm{dist}(y, A) -$ $\mathrm{dist}(x, A) \leqslant \varrho(y, x) \backslash \cdot (-1)$

$-\, \varrho(x, y) \leqslant \mathrm{dist}(x, A) -$ $\mathrm{dist}(y, A)$

Udowodnione - $(*)$ zachodzi

Ciągłość f pokażemy używając charakteryzacji ciągowej

Ustalmy $x_n \longrightarrow x$ w przestrzeni $(X, \varrho) \Leftrightarrow \varrho(x_n, x) \longrightarrow 0$

$\lim_{n\in\mathbb{N}} |f_A(x_n) - f_A(x)| \leqslant= \lim_{n\in\mathbb{N}} \varrho(x_n, x) = 0$

Wiedząc przy tym, że $f_A(x_n) =$dist(x_n, A) oraz $f_A(x) =$dist(x, A)

Wniosek 7.2

W przestrzeni metrycznej (X, ϱ) dla każdej pary zbiorów domkniętych i rozłącznych istnieje funkcja ciągła taka jak w lemacie Urysohna

Istotnie

$$f(x) = \frac{dist(x, A)}{dist(x, A) + dist(x, B)}$$

dla A mamy 0, dla B mamy 1

Uwaga 8.1

Funkcja zdefiniowana w uzasadnieniu wniosku 7.2 ma ponadto własność $f^{-1}(\{0\}) = A$ oraz $f^{-1}(\{1\}) = B$ co jest warunkiem istotnie "mocniejszym" niz wymagania co do funkcji w lemacie Urysohna

Twierdzenie 8.1 (Tietzego-Urysohna)

Niech (X, τ) bedzie przestrzenią normalną oraz $M \subseteq X$ niech będzie zbiorem domkniętym. Niech ponadto $f : M \longrightarrow [-1, 1]$ bedzie funkcją ciągłą. Wtedy istnieje taka funkcja ciągła $g : X \longrightarrow [-1, 1]$ taka, że $g(x) = f(x), x \in M$

Dowód

Indukcyjnie wybierzemy ciąg funkcji $g_n : X \longrightarrow [-1, 1]$, tak aby spełnione były warunki

1) $\forall_{n\in\mathbb{N},x\in X} \quad |g_n(x)| \leqslant \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n$

2) $\forall_{n\in\mathbb{N},x\in M} \quad |f(x) - \sum_{k=0}^{n} g_k(x)| \leqslant (\frac{2}{3})^{n+1}$

Krok 1

g_0 znajdujemy na mocy lematu 7.1 zastosowanego dla $c = 1$ oraz dla funkcji f

$g_0 : X \longrightarrow [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$

$\forall_{x\in M} \quad |f(x) - g_0(x)| \leqslant \frac{2}{3}$

Krok 2

Załóżmy, że wybrane zostały funkcje $g_0 ... g_n$ Rozważmy $c = (\frac{2}{3})^{n+1}$

$F(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} g_k(x) \quad x \in M$

$f : M \longrightarrow [-c, c]$ - ciągła jako różnica funkcji ciągłych

Z lematu 7.1 wynika $\exists g_{n+1} : X \longrightarrow [-\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{n+1}, \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{n+1}]$

oraz $\forall_{x\in M} \quad |F(x) - g_{n+1}(x)| \leqslant (\frac{2}{3})^{n+2}$

$|f(x) - \sum_{k=0}^{n+1} g_k(x)|$ - warunki 1 i 2 są spełnione

Zauważmy, że dzięki warunkowi 1 szereg funkcyjny $\sum_{k=0} g_n(x)$ jest jednostajnie zbieżny do pewnej funkcji $g : X \longrightarrow [-1, 1]$

Ponadto g jest ciągła, jako że g_n jest ciągła dla $n \in \mathbb{N}$

Ustalmy $x \in M$

$|f(x)-g(x)| = |f(x)-\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} g_k(x)| = |\lim_{n\to\infty}(f(x)-\sum_{k=0}^{n} g_k(x))| = \lim_{n\to\infty} |f(x)-\sum_{k=0}^{n} g_k(x)| \leqslant \lim_{n\to\infty}(\frac{2}{3})^{n+1} = 0$

Definicja 8.1

Mówimy, że zbiór $A \subseteq (X, \tau)$ jest zbiorem typu $G_\delta(F_\sigma)$, gdy jest przekrojem (sumą) przeliczalnie wielu zbiorów otwartych (domkniętych)

Wniosek 8.1 (z lematu Urysohna)

W przestrzeni normalnej (X, τ) zbiór $A \subseteq (X, \tau)$ jest zbiorem domkniętym (otwartym) typu $G_\delta(F_\sigma)$ witw, gdy istnieje funkcja ciągła $g : X \longrightarrow [0, 1]$ taka, że $f^{-1}(\{0\}) = A \quad (f^{-1}(0, 1] = A)$

Dowód

Niech $A \subseteq X$ bedzie zbiorem domknietym typu G_δ
$A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ gdzie U_n - otwarty
$x \notin A \Leftrightarrow x \notin \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n \Leftrightarrow x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(X\backslash U_n)$
$X\backslash U_n = F_n$ - domknięte
Ponieważ na mocy lematu Urysohna (przestrzenie normalne są całkowicie regularne, to dla każdego $x \in A$) zachodzi dla każdej pary zbiorów (A, F_n)
$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad \exists_{f_n:X\to[0,1]} \quad f(x) = 0 \quad f_n(F_n) \subseteq \{1\}$
Rozważmy szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n(x)$
Na mocy kryterium Weierstrassa szereg ten jest jednostajnie zbieżny do funkcji $f : X \longrightarrow [0, 1]$, oczywiście f jest ciągła
Pozostaje sprawdzić, że $f^{-1}(\{0\}) = A$
Jeśli $x \in A \Leftrightarrow \forall_{n\in\mathbb{N}} \quad f_n(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0$
$x \notin A \Leftrightarrow \exists_{n_0\in\mathbb{N}} \quad x \in F_{n_0} \Rightarrow f_{n_0}(x) = 1 \Rightarrow f(x) \geqslant 1 \cdot \frac{1}{2^n} > 0$

Twierdzenie 8.2

Niech A będzie gęstym podzbiorem przestrzeni topologicznej (X, τ) oraz (Y, τ') będzie przestrzenią Hausdorffa (T_2). Jeśli $f : A \longrightarrow Y$ jest funkcją ciągłą to mozna ją przedłużyć na co najwyżej jeden sposób

Dowód

Przypuścmy, że istnieja dwa różne przedłużenie g_1, g_2 funkcji f, tzn. $g_i : X \longrightarrow Y, i = 1, 2$ oraz $g_1(x) = f(x) = g_2(x), x \in A$
Rozważmy zbiór $T := \{x \in X : g_1(x) = g_2(x)\}$
Zauważmy, że T jest domknięte
Istotnie jeśli $x \notin T$ to $g_1(x) \in Y \neq g_2(x) \in Y$ (przestrzeń Hausdorffa)
Istnieja zatem $V_1, V - 2$ otoczenia rozłączne i otwarte $g_1(x), g_2(x)$, że
$x \in g_1^{-1}(V_1) \cap g_2^{-1}(V_2) = U_x$ (oba otwarte w X)
Zauważmy, że $U_x \cap T = \emptyset$

Gdyby $\exists_{z \in U_x \cap T}$ to $g_1(z) \in V_1 \cap g_2(z) \in V_2 \Rightarrow g_1(z) \neq g_2(z) \quad V_1 \cap V_2 = \emptyset$

Ponadto $A \subseteq T \setminus$ cl

cl$A \subseteq$ cl$T \quad$ cl $A = X$

$T = X$

Sprzeczność!

Przypomnienie

Rodzina $P \subset P(X)$ jest pokryciem zbioru (przestrzeni) (X, τ), gdy $\bigcup P = X$

Definicja 8.2

Mówimy, że przestrzeń Hausdorffa jest zwarta, gdy z każdego pokrycia otwartego można wybrać podpokrycie skończone

Przykład:

$\mathbb{R}$ z topologią naturalną nie jest przestrzenia zwartą

$P = \{(z - \frac{3}{4}, z + \frac{3}{4}) : z \in \mathbb{Z}\}$

Z P nie mozna wybrać podpokrycia skończonego

ćwiczenie $X = \mathbb{R} \quad \tau = \{U \subseteq \mathbb{R} : |\mathbb{R} \setminus U| < \aleph_0 \vee 0 \notin U\}$

Sprawdzić czy jest zwarta

Definicja 8.3

Rodziną $F \subseteq P(X)$ nazywamy scentrowaną gdy

$\forall_{n \in \mathbb{N}^+} \quad \forall_{F_1, \ldots, F_n} \quad F_1 \cap \ldots \cap F_n \neq \emptyset$

Lemat 8.1

Przestrzeń Hausdorffa jest zwarta witw, gdy przekrój każdej rodziny scentrowanej zbiorów domkniętych jest niepusty

Dowód

$(\Rightarrow) \quad$ Załóżmy, że (X, τ) jest zwarta

Niech $\mathcal{F} \subseteq P(X)$ będzie rodziną scentrowaną złożoną ze zbiorów domkniętych

$(?) \quad \bigcup \mathcal{F} \neq \emptyset$

Hipoteza $\bigcup \mathcal{F} \neq \emptyset \Longleftrightarrow X \setminus \bigcup \mathcal{F} = X = \bigcup \{X \setminus F : F \in \mathcal{F}\}$

$\bigcup P = X$, a więc P jest pokryciem otwartym zbioru X

Z założenia istnieje podpokrycie skończone R

$R = \{\bigcup F_1, \ldots, \bigcup F_n\}$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}^+$

$\bigcup R = X$

$\bigcup F_1 \cup ... \cup \bigcup F_n = X$

$X \backslash F_1 \cap ... \cap F_n = X \Rightarrow$

$F_1 \cap ... \cap F_n = \emptyset$ - sprzeczność

$(\Leftarrow)$ - podobnie

Twierdzenie 8.3

Podprzestrzeń domknięta przestrzeni zwartej jest zwarta

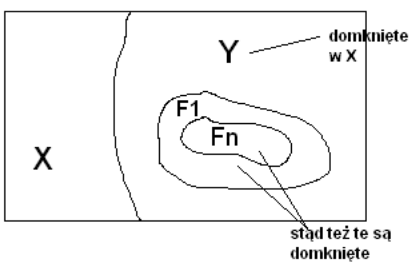
Dowód

Oczywiście jest $Y \subseteq (X, \tau)$ oraz X - zwarta to Y jest T_2-przestrzenią (cwiczenie)

Niech $\mathcal{F} \subseteq P(Y)$ będzie rodziną scentrowaną zbiorów domkniętych w $(Y, \tau_Y) = \{U \cap Y : U \in \tau\}$

$(?) \quad \bigcup \mathcal{F} \neq \emptyset$

Z odpowiedniego faktu (i z domkniętości Y w X) elementy rodziny $\mathcal{F}$ sa domkniete w X, zaś ze zwartości (X, τ) otrzymujemy niepustość zbioru $\bigcap \mathcal{F}$



Lemat 8.2

Obraz ciągły przestrzeni zwartej jest zwarty o ile zbiór wartości jest podprzestrzenią przestrzeni Hausdorffa

Dowód

(X, τ) - zwarta

$(Y, \tau') - T_2$ - przestrzeń

Załóżmy (dla wygody), że $Y = f(x)$

Ustalmy $P \subset P(Y) \cap \tau'$ - pokrycie zbioru Y

$P = \{V_s : s \in S\} \subseteq \tau'$

$\bigcup P = Y$

$P = \{f^{-1}(V_s) : s \in S\}$ - otwarte jako przeciwobrazy zbiorów otwartych poprzez funkcję ciagłą

Twierdzimy, że $\bigcup R = X$

Zatem na mocy założenia (zwartości X) istnieją $S_1 ... S_n \in S$ takie, że $f^{-1}(V_{s_1}) \cup ... \cup f^{-1}(V_{s_n}) = X$

$(?) \quad V_{s_1} \cup ... \cup V_{s_n} = Y$

Istotnie, gdyby $V_{s_1} \cup ... \cup V_{s_n} \neq Y$ to $\exists_{y \in Y} \quad y \notin V_{s_1} \cup ... \cup V_{s_n}$

Ponieważ $y = f(x)$ to istnieje $z \in X$ takie, że $f(z) = y$

Z drugiej strony $z \in X = \bigcup R \Rightarrow \exists_{k\in\{1...n\}} \quad z \in f(V_{s_k}) \Rightarrow f(z) \in V_{s_k}$ - sprzeczność

Twierdzenie 9.1

Niech (X, τ) będzie przestrzenią Hausdorffa oraz A i B bedą parą jej zwartych i rozłącznych podprzestrzeni. Wtedy istnieją zbiory otwarte $U, V \subseteq X$ takie, że $A \subseteq U, B \subseteq V$ oraz $U \cap V = \emptyset$

Dowód

$X - T_2$-przestrzeń

Z warunku T_2

$$\forall_{x\in A} \quad \forall_{y\in B} \quad \exists_{U_x^{(y)}\ni x \quad U_y^{(x)}\ni y \quad \in\tau} \quad U_x^{(y)} \cap U_y^{(x)} = \emptyset$$

Stąd $\forall_{x\in A} \quad B \subseteq \bigcup_{y\in B} U_y^{(x)}$

$P_x = \{U_y^{(x)} : y \in B\}$ - jest pokryciem otwartym zbioru $B, x \in X$

Na mocy zwartości B : $\quad \exists_{y_1...y_n(x)\in B} \quad U_{y_1}^{(x)} \cup ... \cup U_{y_n(x)}^{(x)} \supseteq B$, gdzie $U_B^{(x)} = U_{y_1}^{(x)} \cup ... \cup U_{y_n(x)}^{(x)}$

$R_x = \{U_{y_1}^{(x)} ... U_{y_n(x)}^{(x)}\}$

$\forall_{x\in A} \quad U_x = U_x^{y_1} \cap ... \cap U_x^{y_n} \in \tau$ - otwarte

Wtedy $A \subseteq \bigcup_{x\in A} U_x$

ze zwartości $A \Rightarrow \exists_{x_1...x_n} \quad A \subseteq U_{x_1} \cup ... \cup U_{x_n}$

$V = U_B^{x_1} \cap ... \cap U_B^{x_n}$

$U := U_{x_1} \cup ... \cup U_{x_n}$

Twierdzimy, że $U \cap V = \emptyset \quad A \subseteq U$ (okej) $\quad B \subseteq V$ (okej), bo $B \subseteq U_B^{x_j}, j = 1...n$

Przypuśćmy, że $z \in U \cap V$

Wtedy $\forall_{j=1...n} \quad x \in U_B^{x_j} \Longrightarrow \exists_{i_j\in\{1,...,n(x_j)\}} \quad z \in U_{y_{i_j}}^{(x_j)} \quad (*)$

z drugiej strony $z \in U \Rightarrow \exists_{j_0\in\{1...n\}} \quad z \in U_{x_{j_0}} \Rightarrow \forall_{i\in\{1,...,n(x_{j_0}\}} \quad z \in U_{x_j}^{(y_i)} \quad (**)$

Rozważmy i_{j_0} w $(*) \Rightarrow z \in U_{y_{i_{j_0}}}^{(x_{j_0})} \Rightarrow (**)$ dla $j_0 \quad z \in U_{x_{j_0}}^{y_{i_{j_0}}}$

Sprzeczność, bo $U_{y_{i_{j_0}}}^{x_{j_0}} \cap U_{x_{j_0}}^{y_{i_{j_0}}} = \emptyset$ - sprzeczność z założeniami T_2

Wniosek 9.1

Przestrzenie zwarte (Hausdorffa) sa normalne

Istotnie jeśli A, B są podzbiorami domkniętymi i rozłącznymi przestrzeni zwartej (X, τ) to na mocy twierdzenia 8.3 A i B sa parą podprzestrzeni zwartych, a zatem po zastosowaniu twierdzenia 9.1 otrzymujemy tezę

Wniosek 9.2

Podzbiory zwarte przestrzeni Hausdorffa sa domknięte

Istotnie jeśli $A \subseteq X(T_2) - A$ - zwarty, to

$\forall_{x\in X\backslash A} \quad \{x\}$ i A stanowią pare zbiorów zwartych i rozłącznych - stąd na mocy twierdzenia 9.1 istnieją zbiory otwarte $U_{\{x\}}$ i U_A^x takie, że $U_{\{x\}} \cap U_A^x = \emptyset$

stąd $x \in U_{\{x\}} \subseteq X\backslash A \quad x \in X\backslash A$ czyli A jest zbiorem domkniętym

Wniosek 9.3

Każda wzajemnie jednoznaczna funkcja ciągła określona na przestrzeni zwartej o wartościach w przestrzeni T_2 jest homeomorfizmem (tzn. funkcja odwrotna też jest ciągła)

Istotnie niech (X, τ_x) - zwarta przestrzeń, $(Y, \tau_y) - T_2$

$f : X \longrightarrow Y$ - ciągła, 1-1, na

Zauważmy najpierw, że dla ciągłości $f^{-1} : Y \longrightarrow X$

Wystarczy sprawdzić czy $f(A)$ jest zbiorem domkniętym dla każdego zbioru A domkniętego w X

Zatem ustalmy $A \subseteq X$ - domknięty

Na mocy twierdzenia 8.3 A jest zwarty w X (jako podprzestrzeń)

Na mocy lematu 8.2 obraz zwartego jest zwarty: $f(A)$ jest zwartą podprzestrzenią przestrzeni Y, ktora jest T_2

na mocy wniosku 9.2 $f(A)$ jest domknięty w Y

Wniosek 9.4

Niech $(X, \tau_1), (X, \tau_2)$ będą parą przestrzeni topologicznych takich, że $\tau_1 \supseteq \tau_2$ oraz τ_1 jest topologią zwartą oraz τ_2 jest topologią Hausdorffa, wtedy $\tau_1 = \tau_2$

Istotnie wystarczy rozważyć $id : (X, \tau_1) \longrightarrow (X, \tau_2)$

Wtedy na mocy wniosku 9.3 "id" jest homeomorfizmem

Stąd $\tau_1 \subseteq \tau_2$ - (f(otwarta) = otwarta)

Lemat 9.1 (o maksymalnych rodzinach scentrowanych)

Niech (X, τ) będzie przestrzenią topologiczną, wtedy:

1) każda rodzina scentrowana zawiera się w pewnej maksymalnej rodzinie scentrowanej

2) jeśli $\mathcal{F} \subseteq P(X)$ jest maksymalną w sensie inkluzji rodzina scentrowaną, to

$i) \quad \forall_{A\subseteq X} \quad (\forall_{F\in\mathcal{F}} \quad A \cap F \neq \emptyset \Rightarrow A \in \mathcal{F})$

$ii) \quad \forall_{F_1 \ldots F_n} \quad F_1 \cap \ldots \cap F_n \in \mathcal{F}$

Dowód

ad.1) $\quad \chi = \{\mathcal{G} \subseteq P(X) : \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G} \wedge \mathcal{G}$ ma FIP

$(\chi, \subseteq)$ - częściowy porządek, na mocy lematu Kuratowskiego-Zorna wystarczy sprawdzić, że każdy łańcuch $\mathcal{L} \subseteq \chi$ ma ograniczenie górne w χ. Niech $\mathcal{L} \subseteq \chi$ będzie łańcuchem (tzn. podzbiorem liniowo uporządkowanego)

$\mathcal{G}_0 = \bigcup \mathcal{L}$

Oczywiście $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}_0$, bo $\forall_{\mathcal{G} \in \mathcal{L}} \quad \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ (FIP) dla $\mathcal{G}_0$

Ustalmy $G_1, ..., G_n \in \mathcal{G}_0$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$

$(?) G_1 \cap ... \cap G_n \neq \emptyset$

Skoro $G_i \in \mathcal{G}_0 = \bigcup \mathcal{L} \quad i = 1...n$ to $\forall_{i=1...n} \quad \exists_{G_i \subseteq \mathcal{G}_i}$

Ponieważ $\mathcal{L}$ jest łańcuchem to każda para spośród zbiorów$\{\mathcal{G}_1 ... \mathcal{G}_n\}$ jest porównywalna w sensie " $\subseteq$ " więc istnieje $i \in \{1...n\}$ takie, że $\forall_{i \neq j_0, i \in \{1...n\}} \quad \mathcal{G}_i \subseteq \mathcal{G}_{j_0}$ stąd $G_1, ..., G_n \subseteq \mathcal{G}_{j_0}$ zaś $\mathcal{G}_{j_0} \in \chi$ czyli $\mathcal{G}_{j_0}$ jest rodziną scentrowaną

Zatem $G_1 \cap ... \cap G_n \neq \emptyset$

ad.2) Niech $\mathcal{F}$ bedzie maksywalną rodziną scentrowaną

ad.i) ustalamy $A \subset X$ taki, że $\forall_{F \in \mathcal{F}} \quad F \cap A \neq \emptyset$

$(?) A \in \mathcal{F}$

Hipoteza: $A \notin \mathcal{F}$

Niech $\mathcal{G} = \mathcal{F} \cup \{A\} \quad (?)$ czy $\mathcal{G}$ jest rodziną scentrowaną?

Ustalmy $G_1 ... G_n \in \mathcal{G}$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$

Możemy założyć, że $G_i \neq A$ dla $i \in \{1...n\}$

Oczywiście $G_1 \cap ... \cap G_n \neq \emptyset$ bo $G_i \in \mathcal{F}$ (a $\mathcal{F}$ jest scentrowana)

Z drugiej strony $G_1 \cap ... \cap G_n \cap A = G \cap A \neq \emptyset$

Zatem $\mathcal{G}$ jest rodziną scentrowaną i istotnie wiekszą od $\mathcal{F}$

sprzeczność!

ad.ii) Ustalmy $\{F_1, ..., F_n\} \subseteq \mathcal{F}$ - maksymalnie scentrowane

$(?) F_1 \cap ... \cap F_n \in \mathcal{F}, n \in \mathbb{N}$

Hipoteza: $\exists_{F_1 ... F_n \in \mathcal{F}} \quad F_0 = F_1 \cap ... \cap F_n \in \mathcal{F}$

$\mathcal{G} = \mathcal{F} \cup \{F_0\} \quad (?) \mathcal{G}$ jest scentrowana?

Istotnie jeśli $G_1, ..., G_m \in \mathcal{G} \backslash \{F_0\}$ to $G_1 \cap ... \cap G_n \neq \emptyset$ bo $\mathcal{F}$ ma FIP

Z drugiej strony $G_1 \cap ... \cap G_m \cap F_0 = G_1 \cap ... \cap G_m \cap (F_1 \cap ... \cap F_n)$ - wszystko należy do $\mathcal{F}$

Twierdzenie 9.2 (Tichonowa o produkcie)

Produkt (kartezjański) przestrzeni zwartych jest przestrzenia zwartą

Definicja 9.1 (Topologia produktowa)

Niech $\{(X_s, \tau_s) : s \in S\}$ będzie rodziną przestrzeni topologicznych

Rozważmy $X = \Pi_{s \in S} X_s (\mathcal{X}_{s \in S} X_s)$

Niech ponadto $pr_s : X \longrightarrow X_s, s \in S$ będzie rzutowaniem na s-tą oś tzn. $pr_s(x) = X_s$ gdzie $(x) = (x_t)_{t \in S}$

Topologię na zbiorze X (topologię produktową lub Tichonowa) wprowadzaną za pomocą rodziny wszystkich rzutowań $\{pr_s : s \in S\}$:

$B = \{pr_{s_1}^{-1}(U_{s1}) \cap ... \cap pr_{s_n}^{-1}(U_{sn})...$
Wtedy B jest bazą topologii na X tzn. rodzina B spełnia warunki z twierdzenia o pwrowadzaniu topologii przez bazę

Dowód tw.9.2

Niech $\{(X_s, \tau_s) : s \in S\}$ będzie rodziną przestrzeni zwartych oraz niech $X = \Pi_{s\in S} X_s$ będzie wyposażony w topologię Tichonowa

$P_{s\in S} X_s$ - Oznaczenie z Engelkinga

$(?)(X, \tau)$ - jest przestrzenią zwartą

1) Zauważmy, że (X, τ) jest T_2-przestrzenią

Istotnie jeśli $x, y \in X, x \neq y$ to istnieje $s_0 \in S$ takie, że $x(s_0) \neq y(s_0)$ - współrzędne punktów x i y

Ponieważ oś X_{s_0} jest w szczególności T_2-przestrzenią to istnieja $U, V \in \tau_{s_0}$ takie, że $U \cap V \neq \emptyset$

$x(s_0) \in U \quad y(s_0) \in V$

Niech $U_x := pr_{s_0}^{-1}(U), U_y := pr_{s_0}^{-1}(V)$

Oczywiście $x \in U_x, y \in U_y$ oraz $U_x \cap U_y = \emptyset$

2) Ustalmy rodzinę scentrowaną zbiorów domkniętych

$\mathcal{F} = \{F_t : t \in\} \subseteq P(X)$

$(?) \bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$

Z lematu 9.1 istnieje maksymalna rodzina scentrowana $\mathcal{G} \subseteq P(X)$ taka, że $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$

$(?) \bigcap \{ \text{ cl } G : G \in \mathcal{G}\} \neq \emptyset \quad (\subseteq \mathcal{F})$

$\forall_{s\in S} \quad \mathcal{F}_s = \{ \text{ cl } pr_{s_0}(G) : G \in \mathcal{G}\}$

Twierdzimy, że $\mathcal{F}_s$ jest scentrowana

Istotnie niech $s \in S$ oraz $G_1 ... G_n \in \mathcal{G}$

$\text{cl } pr_s(G_1) \cap ... \cap \text{ cl } pr_s(G_n) \neq \emptyset (?)$

Ale $\text{cl } pr_s(G_1) \cap ... \cap \text{ cl } pr_s(G_n) \supseteq \text{ cl } (pr_s(G_1) \cap ... \cap pr_s(G_n)) \supseteq \text{ cl } pr_s(G_1 \cap ... \cap G_n) \neq \emptyset$ gdzie $G_1 \cap ... \cap G_n \in \mathcal{G}$

Zatem $\forall_{s\in S} \quad \bigcup \mathcal{F}_s \neq \emptyset \quad$ (zwartość X_s)

Niech $x_s \in \bigcap \mathcal{F}_s \quad s \in S$

Oraz $x = (x_s)_{s\in S} \in X$

Sprawdzimy, że $x \in \bigcap \{ \text{ cl } G : G \in \mathcal{G}\}$

Ustalmy $G \in \mathcal{G}$ (?) $x \in \text{ cl } G \Leftrightarrow \forall_{U_x \subseteq X} \quad U_x \cap G \neq \emptyset$

Przypuśćmy, że $\exists_{U_x \subseteq X} \quad U_x \cap G = \emptyset$

Mozna założyć, że $U_x \in B_{Tichonowa}$ - zbiorów bazowych Tichonowa, zakładamy:

$U_x = pr_s^{-1}(U_{s_1}) \cap ... \cap pr_s^{-1}(U_{s_n})$ gdzie $U_{s_i} \in \tau_{s_i} \quad i = 1...n$

Mamy $(x)_{s_i} = x_{s_i} \in X_{s_i} \cap \mathcal{F}_{s_i}$

stąd $\forall_{i=1...n} \quad x_{s_i} \in \text{ cl } pr_s(G)$

$G \in \mathcal{G}$

Z drugiej strony $x_{s_i} \in U_{s_i} \quad i = 1...n$

czyli $U_{s_i} \cap pr_s^{-1}(G) \neq \emptyset \quad G \in \mathcal{G}$

Z lematu rodzinach maksymalnych scentrowanych $\Rightarrow$

$\forall_{i=1...n} \quad pr_s^{-1}(U_{s_i}) \in \mathcal{G}$

oraz $pr_{s_1}^{-1}(U_{s_1}) \cap ... \cap pr_{s_n}^{-1}(U_{s_n}) \in \mathcal{G}$ gdzie $U_x = pr_{s_1}^{-1}(U_{s_1}) \cap ... \cap pr_{s_n}^{-1}(U_{s_n})$

Wtedy na mocy (FIP) $U_x \cap G \neq \emptyset$ dla $G \in \mathcal{G}$ - sprzeczność z hipotezą

Uwaga 10.1

Twierdzenie Tichonowa można odwrócić tzn. jeśli produkt przestrzeni topologicznych $\{(X_s, \tau_s)\}$ jest zwarty to kązda z (X_s, τ_s) jest zwarta $X = \Pi_{s\in S} X_s$

$pr_s(X) = X_s$ - ciągła i 'na'

Na mocy lematu 8.? obraz przestrzeni zwartej poprzez f ciągłą jest zwarty

Przykłady 10.1 (zwartość odcinka [a,b])

Niech P będzie pokryciem otwartym odcinka $[a, b]$

(?) czy z P można wybrać podpokrycie skończone

$A = \{x \in [a, b]\} : \exists_{U_1...U_n(x)\in P} \quad [a, x] \subseteq U_1 \cup ... \cup U_n(x)\}$

$(?)[a, b]\backslash A = \emptyset$

Przypuśćmy, że $[a, b]\backslash A \neq \emptyset \quad x_0 \neq b$

Niech $x_0 = \inf([a, b]\backslash A)$

1) $\quad x_0 \notin A$

Gdyby $x_0 \in A \Rightarrow \exists_{U_1...U_n(x_0)\in P} \quad [a, x_0] \subseteq U_1 \cup ... \cup U_{n_{x_0}}$

$\exists_{\varepsilon>0} \quad [x_0, x + \varepsilon) \subseteq U_1 \cup ... \cup U_{n_{x_0}}$

stąd istnieje $x \notin A$ taki, że $x_0 < x < x_0 + \varepsilon$

sprzeczność z definicją A

$[a, x] \subseteq [a, x_0] \cup [x_0, x_0 + \varepsilon) \subseteq U_1 \cup ... \cup U_{n_{x_0}}$

2) $\quad$ Zauważmy, że $a < x_0$, bo $[a, a] = \{a\}$ czyli $a \in A$

Ponieważ $\bigcup P = [a, b] \ni x_0$ to istnieje $U_0 \in P$ takie, że $x_0 \in U_0$

Istnieje $\varepsilon > 0$ takie, że $[x_0 - \varepsilon, x_0] \subseteq U_0$

Niech $c \in [x_0 - \varepsilon, x_0] \quad c \neq x_0$

Wtedy $c \in A$

Stąd istnieje $U_1...U_{n(c)} \in P$ takie, że

$[a, c] \subseteq U_1 \cap ... \cap U_{n(c)}$

Wtedy $[a, x_0] = [a, c] \cup [c, x_0] \subseteq [a, c] \cup [x_0 - \varepsilon, x_0] \subseteq U_1 \cup ... \cup U_{n(c)} \cup U_0$ - suma skończonej liczby elementów rodziny P

Wniosek 10.1

W przestrzeniach $\mathbb{R}^n$ zbiór A jest zwarty witw, gdy jest domknięty i ograniczony

Istotnie ustalmy $n \in \mathbb{N}, \varrho$ - metryka euklidesowa (n-wymiarowa), niech $A \subseteq \mathbb{R}^n$

$(\Rightarrow)$ Jeśli A jest zwarty to ponieważ $\{(-i,i)^n = U_i, i \in \mathbb{N}^+\}$ jest otwartym pokryciem zbioru A tzn. na mocy zwartości A istnieje skończona ilość $i \in \mathbb{N}^+$ mianowicie $i_0, ..., i_n$ takich, że $A \subseteq (-i_1, i_1)^n \cup ... \cup (-i_n, i_n)^n$

$i_0 = \max\{i_1 ... i_n\}$

Wtedy $A \subseteq (-i_0, i_0)^n$ stąd A jest ograniczony

Z drugiej strony $A \subseteq [-i_0, i_0]^n$ - przestrzeń zwarta na mocy twierdzenia Tichonowa i uwagi 10.1

na mocy lematu 8.? A jako podzbiór zwarty przestrzeni Hausdorffa jest domknięty

$(\Leftarrow)$ Załóżmy$A$ jest domknięty i ograniczony

$\exists_{m \in \mathbb{N}} \quad A \subseteq [-m, m]^n$ - przestrzeń zwarta

A jako podzbiór domknięty przestrzeni zwartej jest zwarty

Definicja 10.1

Mówimy, że przestrzeń topologiczna (X, τ) ma własność Suslina ,gdy każda rodzina zbiorów otwartych i parami rozłącznych jest przeliczalna

Twierdzenie 10.1

Niech (X, ϱ) będzie przestrzenią metryczną

Wtedy następujące warunki są parami równoważne

(1) (X, τ_ϱ) ma bazę przeliczalną

(2) (X, τ_ϱ) jest ośrodkowa

(3) (X, τ_ϱ) ma własność Suslina

Dowód

$(1) \Rightarrow (2)$ Ustalmy $B \subseteq \tau_\varrho$ - baza przeliczalna

$A = \{x_u : U \in B\}$ gdzie $x_u \in U, u \in B$

Wtedy $|A| \leqslant |B| \leqslant \aleph_0$

oraz A jest gęsty

Istotnie ustalmy $U \in \tau_\varrho \;\; U \neq \emptyset$

Wtedy istnieje $V \in B$ taki, że $V \subseteq U$

stąd $x_v \in A \cap V \subseteq A \cap U$

$(2) \Rightarrow (3)$ Rozwazmy rodzinę zbiorów otwartych i parami rozłącznych $\mathcal{A} \subseteq \tau$

A niech będzie zbiorem gęstym i przeliczalnym

Rozważmy $\mathcal{A}' = \{A \cap U : U \in \mathcal{A}\}$ - rodzina zbiorów niepustych parami różnych

$|\mathcal{A}| = |\mathcal{A}|' \leqslant |A| \leqslant \aleph_0$

$(3) \Rightarrow (1)$

Claim - lemat wewnątrz dowodu

W przestrzeni metrycznej (X, ϱ) dla każdego $n \in \mathbb{N}^+$ istnieje maksymalny w sensie inkluzji podzbiór

$A_n \subseteq X$ o tej wlasności, że $\forall_{x,y\in A_n} \quad (x \neq y = \varrho(x,y) \geqslant \frac{1}{n}) \quad (*)$

Istotnie niech $n \in \mathbb{N}^+$ oraz $\chi_n = \{A \subseteq X : A$ ma własność $(*)\}$

$(\chi_n, \subseteq)$ - częściowy porządek

Sprawdzimy czy każdy łańcuch $\mathcal{L} \subseteq \chi_n$ ma ograniczenie górne w χ_n

Ustalmy $\mathcal{L} \in \chi_n$ (naturalnym ograniczeniem $\mathcal{L}$ jest $\bigcup \mathcal{L}$

(?) $\bigcup \mathcal{L}$ ma $(*)$

Ustalmy $x, y \in \bigcup \mathcal{L} \Rightarrow \exists_{A_x, A_y \in \mathcal{L}} \quad x \in A_x, y \in A_y$

Skoro $A_x, A_y \in \mathcal{L} \Rightarrow A_x \subseteq A_y \vee A_y \subseteq A_x$

Niech przykładowo $A_x \subseteq A_y$. Wtedy $x, y \in A_y \in \mathcal{L}$

Ale A_y spełnia (*) (bo $\mathcal{L} \subseteq \chi_n$), a więc $\varrho(x,y) \geqslant \frac{1}{n}$

czyli $\bigcup \mathcal{L} \in \chi_n$ a zatem na mocy Lematu Kuratowskiego-Zorna w zbiorze χ_n istnieje element maksymalny

Koniec Claim'a

$\forall_n \quad A_n$ maksymalny zbiór spełniający (*) dla n (Z Claimu)

$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ - gęsty i przeliczalny

$B = \{K_\varrho(x, \frac{1}{k}) : x \in A, k \in \mathbb{N}^+\}$

$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ - maksymalny w sensie inkluzji zbiór punktów przeliczalnych taki, że

$(*) \ \forall_{x,y\in A_n} \quad \varrho(x,y) \geqslant \frac{1}{n}$

Sprawdzimy, że

1) A_n - przeliczalny

2) B jest bazą

Ad.1

Zauważmy, że

$\forall_{n\in\mathbb{N}^+} \quad \{K_\varrho(x, \frac{1}{2n}) : x \in A_n\}$ - rodzina kul parami rozłącznych

Istotnie jeśli n jest ustalone oraz $z \in K_\varrho(x_1, \frac{1}{2n}) \cap K_\varrho(x_2, \frac{1}{2n})$ dla pewnych $x_1, x_2 \in A - n$ to wtedy $\varrho(x_1, x_2) \leqslant \varrho(x_1, z) + \varrho(z, x_2) < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}$

Sprzeczność z (*) dla A_n

Ponieważ przestrzeń ma własność Suslina to

$|\{K_\varrho(x, \frac{1}{2n}) : x \in A_n\}| = |A_n| \leqslant \aleph_0$

Stąd A jest przeliczalny

Ad.2

Ustalmy $z \in X, \ \varepsilon > 0$

Pokażemy, że istnieje $x \in A, k \in \mathbb{N}, z \in K_\varrho(x, \frac{1}{k}) \subset K_\varrho(z, \varepsilon)$

Niech n_0 będzie takie, że $\frac{1}{n} < \varepsilon$

Zauważmy, że z maksymalności zbiorów A_n dla $n \in \mathbb{N}$ mamy

$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad \bigcup_{x\in A_n} K_\varrho(x, \frac{1}{n}) = X$

Stąd $\exists_{x\in A_{2n_0}} \quad z \in K_\varrho(z, \frac{1}{2n}) \quad k := 2n_0$

Pozostaje sprawdzić, że $K_\varrho(x, \frac{1}{k}) \subset K_\varrho(z, \varepsilon)$

Ustalmy $y \in K_\varrho(x, \frac{1}{k})$

$(?) \varrho(y,z) < \varepsilon$

Mamy $\varrho(y,z) \leqslant \varrho(y,x) + \varrho(x,z) < \frac{1}{2n_0} + \frac{1}{2n_0} = \frac{1}{n_0} < \varepsilon$

Twierdzenie 11.1

Przestrzenie zwarte metryczne są ośrodkowe

Dowód

Niech (X,ϱ) będzie przestrzenią metryczną zaś (X,τ_ϱ) niech będzie przestrzenią zwartą

(?) $\exists_{A_0 \subseteq X} \quad |A_0| \leqslant \aleph_0 \wedge \, \mathrm{cl} A_0 = X$

Niech $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \ A_n$ będzie tym samym zbiorem co w dowodzie poprzedniego twierdzenia

Przypomnijmy ponadto, że

$\bigcup_{x\in A_n} \ K_\varrho(x, \frac{1}{n}) = X \quad n \in \mathbb{N}^+$

$(*)$ Zatem $\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad P_n = \{K_\varrho(x, \frac{1}{n} : x \in A_n\}$ - jest pokryciem otwartym zbioru X

Zwartość $X \Rightarrow \forall_{n\in\mathbb{N}} \quad \exists_{R_n \subseteq P_n} \quad |R_n| < \aleph_0 \wedge \bigcup \ R_n = X$

Zatem $\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad \exists_{x_1^{(n)} \ldots x_{k(n)}^{(n)} \in A_n} \quad \bigcup_{i=1}^{k(n)} K_\varrho(x_i^{(n)}, \frac{1}{n}) = X$

$R_n = \{K_\varrho(x_1^{(n)}, \frac{1}{n}), ..., K_\varrho(x_{k(n)}^{(n)}, \frac{1}{n}) \quad n \in \mathbb{N}$

$A_0 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x_i^{(n)} : i = 1...k(n)\}$ - przeliczalny

(?) A_0 - gęsty $\Leftrightarrow \forall_{z\in X, \ \varepsilon>0} \quad K_\varrho(z,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$

Ustalmy $z \in X, \ \varepsilon > 0$

Niech $n_0 \in \mathbb{N}$ będzie takie, że $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$

Ponieważ R_{n_0} jest pokryciem zbioru X to istnieje $x_i^{(n_0)} \in A_0$ (pewne z zakresu $i = 1...k(n)$) taki, że $z \in K_\varrho(x_i^{(n_0)}, \frac{1}{n_0})$

Wtedy $x_i^{(n_0)} \in K_\varrho(z, \frac{1}{n_0})(\subseteq K_\varrho(z,\varepsilon)) \cap A_0$

Wniosek 11.1

Przestrzenie zwarte metryczne maja własność Suslina i baze przeliczalną

$(W(X) = d(X) = c(X) = \aleph_0)$

$W(X)$ - waga przestzreni (minimalna moc bazy)

$d(X)$ - minimalna moc zbioru gestego

$c(X)$ - liczba Suslina

Definicja 11.1

Mówimy, że przestrzeń metryczna (X,ϱ) jest ciągowo-zwarta (jako przestrzeń topologiczna), gdy każdy ciąg punktów tej przestrzeni zawiera podciąg zbieżny

Twierdzenie 11.2

W przestrzeni ciągowo-zwartej z każdego pokrycia otwartego i przeliczalnego można wybrać podpokrycie skończone

Dowód

Niech (X, ϱ) będzie przetrzenią metryczną ciągowo-zwartą

Niech $P = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ będzie pokryciem otwartym zbioru X

Hipoteza

$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad U_0 \cup ... \cup U_n \neq X$

Niech $\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad x_n \in X \backslash (U_0 \cup ... \cup U_n)$

Wtedy z $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ nie można wybrać podciągu zbieżnego co przeczy założeniu

Istotnie, gdy $\{y_m : m \in \mathbb{N} \subseteq \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ był zbieżny do pewnego $y \in X$ to istnieje $U_{n_0} \in P$ taki, że $y \in U_{n_0}$

Zauważmy, że na mocy hipotezy $\forall_{n \geqslant n_0} \quad x_n \notin U_{n_0}$ stąd także $\{y_m : m \geqslant n_0)\} \cap \{x_n : n \geqslant n_0\} \cap U_{n_0} = \emptyset$

Sprzeczne z tym, że $y = \lim_{n\in\mathbb{N}} y_n$ (w U_{n_0} powinny się znaleźć prawie wszystkie wyrazy ciągu $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$

Udowodnione

Twierdzenie 11.3 (Borela-Lebesgue'a)

Przestrzeń metryczna jest zwarta witw, gdy jest ciągowo-zwarta

Dowód

$(\Rightarrow)$

Załóżmy, że przestrzeń (X, ϱ) jest zwarta

Ustalmy ciąg punktów $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq X$

$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad F_n := \mathrm{cl}\{x_k : k \geqslant n\}$

Zauważmy, że $F_{n+1} \subseteq F_n \quad n \in \mathbb{N}$

Czyli $\mathcal{F} = \{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ jest rodziną scentrowaną złożona ze zbiorów domkniętych

Zwartość $X \Rightarrow \bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$

Niech $x \in \bigcap \mathcal{F}$

Twierdzimy, że $x = \lim_{n\in\mathbb{N}} y_n$ dla pewnego $\{y_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$

$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad K_\varrho(x, \frac{1}{n}) \cap \{x_k : k \geqslant n\} \neq \emptyset$

Oczywiście $\lim_{n\to\infty} y_n = x$, bo $\forall_{n_0\in\mathbb{N}} \quad \forall_{n \geqslant n_0} \quad y_n \in K_\varrho(x, \frac{1}{n})$

$(\Leftarrow)$

Załózmy, że przestrzeń (X, ϱ) jest ciągowo-zwarta

Zauważmy, że jeśli P_n jest pokryciem zbioru X kulami o promieniach $\frac{1}{n}$ to na mocy założenia ciągowej zwartości

CDN. (reszta poniżej)

Definicja 11.2

Przestrzen metryczną nazywamy zupełną, gdy każdy ciąg spełniający warunek Cauchy'ego jest w niej zbieżny

Uwaga 11.1

Warunek Cauchy'ego dla ciągu $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq X$

$$\forall_{\varepsilon>0} \quad \exists_{n_0} \quad \forall_{n \geqslant n_0} \quad \varrho(x_n, x_{n_0}) < \varepsilon$$

Oczywiście każdy ciąg zbieżny jest ciągiem Cauchy'ego

Każdy ciąg Cauchy'ego zawierający podciąg zbieżny jest zbieżny

Twierdzenie 11.4

Przestrzenie zwarte metryczne sa zupełne

Dowód

Oczywiste: Tw 11.1 + założenia

Lemat 11.1

Podprzestrzeń M przestrzeni zupełnej (X, ϱ) jest zupełna witw, gdy jest podzbiorem domkniętym

Dowód

$(\Rightarrow)$

$M \subseteq (X, \varrho)$ Załóżmy, że $(M, \tau_M) = (M, \varrho_{\restriction_{M^2}})$ jest zupełna

(?) $\mathrm{cl}M = M$

$\mathrm{cl}M \supseteq M$ - oczywiste

Ustalmy $x \in \mathrm{cl}M$, z odpowiedniego lematu istnieje ciąg punktów $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq M$ taki, że $x = \lim_{n\to\infty} x_n$

Ponieważ $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ jest zbieżny w X, to spełnia warunek Cauchy'ego w X, ale też w M

Zupełność $M \Rightarrow \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ - zbieżny w M

Z jednoznaczności granicy w przestrzenioach metrycznych $x \in M$

(?)M-zupełna

Ustalamy ciąg Cauchy'ego $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq M$

Ciąg $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ jest zbiezny w X do pewnego $x \in X$

$x = \lim_{n\to\infty} \in \mathrm{cl}M = M$

Uwaga 11.2

W przestrzeni metrycznej (X, ϱ) jeśli $\lim x_n = y \wedge \lim x_n = x$ to $x = y$

Hipoteza

$x \neq y \Rightarrow \varrho(x, y) = d > 0$

Ponieważ $K_\varrho(x, \frac{1}{2}d) \cap K_\varrho(y, \frac{1}{2}d) =\neq$

to mamy sprzeczność z tym, że

$\exists_{n_0} \quad \forall_{n \geqslant n_0} \quad x_n \in K_\varrho(x, \frac{1}{2}d) \cap K_\varrho(y, \frac{1}{2}d)$

Uwaga 11.3

Dwie topologie metryczne na tym samym zbiorze $(X, \varrho_1), (X, \varrho_2)$ są równoważne witw, gdy $\forall_{\{x_n : n \in \mathbb{N}\}, x \in X} \quad \lim_{n \to \infty} \varrho_1(x_n, x) =$
$0 \Leftrightarrow \varrho_2(x_n, x) = 0$

Dowód tw. Borela-Lebesgue'a cd.

Załóżmy, że (X, ϱ) jest ciągowo-zwarta

(X, τ_ϱ) - zwarta

$\forall_{n \in \mathbb{N}^+} \quad A_n$ - zbiór (maksymalny w sensie inkluzji) punktów takich, że

$\forall_{x, y \in A_n} \quad \varrho(x, y) \geqslant \frac{1}{n} (*)$

Zauważmy, że $\forall_{n \in \mathbb{N}^+} \quad |A_n| < \aleph_0$

Istotnie, gdyby $\exists_{n_0 \in \mathbb{N}^+} \quad |A_n| \geqslant \aleph_0$ to istniałby ciąg $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ spełniający $(*)_{n_0}$, a więc byłby to ciąg, z ktorego nie mozna byłoby wybrac podciągu zbieżnego

Zatem $\forall_{n \in \mathbb{N}} \quad |A_n| < \aleph_0$

$A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$

Zbiór A jest gęsty i przeliczalny

Istotnie jeśli $\varepsilon > 0, x \in X$ to istnieje $n_0 \in \mathbb{N}^+$ takie, że $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$

Ponieważ $\bigcup_{y \in A_{n_0}} K_\varrho(y, \frac{1}{n_0}) = X$

to $\exists_{y \in A_{n_0}} \quad x \in K_\varrho(y, \frac{1}{n_0})$

$\varrho(x, y) < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$

stąd $y \in K_\varrho(x, \varepsilon) \Rightarrow K_\varrho(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$

Zatem (X, τ_ϱ) jest ośrodkowa

Z odpowiedniego lematu (X, τ_ϱ) ma bazę przeliczalną, a więc z kazdego pokrycia zbiorami otwartymi mozna wybrać podpokrycie przeliczalne. Istotnie niech B będzie baza przeliczalną

Wtedy $\bigcup B = x$

$\forall_{U \in B} \quad R_u = \{V \in P : U \subseteq V\}$

Jeśli $R_u \neq P$ to niech $V_u \in R_u(AC)$

$R = \{V_u : U \in B \cap R_u \neq \emptyset\}$

$\forall_{V \in B} \quad R_u = \emptyset \Rightarrow (\forall_{V \in P} \quad V \cap U \neq \emptyset \Rightarrow \exists_{V'} \quad V' \subseteq V \cap U \Rightarrow R_u \neq \emptyset$

$\bigcup R = X \quad |R| \leqslant |B| \leqslant \aleph_0 \quad R \subseteq P$

Na mocy twierdzenia 11.2 z pokrycia R mozna wybrać podpokrycie skończone

Definicja 12.1

Niech (X, ϱ) będzie przestrzenią metryczną oraz niech $A \subseteq X$ bedzie podzbiorem niepustym

Średnią zbioru A nazywamy wielkość $diam(A) = \sup\{\varrho(x, y) : x, y \in A\}$

Jeżeli $diam(A) < +\infty$, to mówimy, że zbiór A jest ograniczony

Przykłady 12.1

W przestrzeni dykretnej każdy zbiór jest ograniczony

Twierdzenie 12.1 (Cantora I wersja)

Przestrzeń metryczna (X, ϱ) jest zupełna witw, gdy każdy ciąg $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ zbiorów domkniętych, taki że

1) $\lim_{n\to\infty} diam F_n = 0$

2) $F_{n+1} \subseteq F_n, n \in \mathbb{N}$

ma przekrój niepusty

Dowód

$(\Rightarrow)$

Załóżmy, że (X, ϱ) jest zupełna oraz niech $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ będzie ciągiem zbiorów domkniętych spełniającym 1) i 2)

Niech $x_n \in F_n, n \in \mathbb{N}$

1) $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ spełnia warunek Cauchy'ego

Zatem z zupełności (X, ϱ) istnieje granica ciągu $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ powiedzmy, że $x \in X$

Wystarczy sprawdzić, że $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$

(Hipoteza)

$\exists_{n_0\in\mathbb{N}} \quad x \notin F_{n_0} = \mathrm{cl} F_{n_0}$

Istnieje zatem kula $K_\varrho(x, \varepsilon)$ rozłączna z F_{n_0}

Ale $\forall_{n\geqslant n_0} \quad x_n \in F_{n_0}$ zatem

$|K_\varrho(x, \varepsilon) \cap \{x_m : m \in \mathbb{N}\}| \leqslant n_0 - 1$

Sprzeczność z tym, że $x = \lim_{n\to\infty} x_n$

$(\Leftarrow)$

Załóżmy, że dla każdego ciągu $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ takiego jak w wypowiedzi twierdzenia zachodzi

$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \quad F_n \neq \emptyset$

Pokażemy, że (X, ϱ) jest wtedy zupełna

Niech $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq X$ będzie ciągiem Cauchy'ego

Niech $F_n := \mathrm{cl}\{x_m : m \geqslant n\}, n \in \mathbb{N}$

Oczywiście $F_{n+1} \subseteq F_n, n \in \mathbb{N}$

Zauważmy także, że $\lim_{n\to\infty} diam F_n = 0$

Istotnie warunek Cauchy'ego oznacza, że $\forall_{\varepsilon>0} \quad \exists_{n_0\in\mathbb{N}} \quad diam F_{n_0} < \varepsilon$

Zatem na mocy założenia $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$

Niech $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Pokażemy, że $\lim_{n\to\infty} x_n = x$

Ustalmy $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists_{n_0\in\mathbb{N}} \quad \forall_{n\geqslant n_0} \quad \varrho(x_n, x_{n_0}) < \frac{\varepsilon}{2}$ czyli $diam(F_n) < \frac{\varepsilon}{2}$

Z drugiej strony $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \Rightarrow x \in F_{n_0}$

stąd $\forall_{n\geqslant n_0} \quad \{x_n, x\} \subseteq F_{n_0}$

wynika z tego

$\varrho(x_n, x) \leqslant \varrho(x, x_{n_0}) + \varrho(x_{n_0}, x) < \varepsilon$

Przekrój rodziny zbiorów $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$, o którym mowa powyżej jest oczywiście (o ile jest $\neq \emptyset$) 1-elementowy

Hipoteza

$|\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n| > 1$

Niech $x, y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$

$x \neq y \quad$ Wtedy $d := \varrho(x, y) > 0$

Niech $n_0 \in \mathbb{N}$ będzie takie, że $\frac{1}{n_0} < d$

Dla $\varepsilon = \frac{1}{n_0}$ istnieje n_1 takie, że $\forall_{n\geqslant n_1} \quad diam F_n < \varepsilon$

Ale $x, y \in F_1 \Rightarrow \varrho(x, y) < \frac{1}{n_0}$ - sprzeczność

Twierdzenie 12.2 (Cantora II wersja)

Przestrzeń metryczna (X, ϱ) jest zupełna witw, gdy każda rodzina scentrowana zbiorów domkniętych zawierająca zbiory o dowolnie małych średnicach ma przekrój niepusty

($\Leftarrow$)

Oczywiście każda rodzina zbiorów domkniętych i niepustych $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ spełnia warunki 1), 2) z poprzedniego twierdzenia i jest rodziną scentrowaną

Zatem na mocy założenia ($\Leftarrow$) jej przekrój jest niepusty, stąd na mocy poprzedniego twierdzenia przestrzeń jest zupełna

($\Rightarrow$)

Załóżmy, że przestrzeń jest zupełna (a zatem możemy korzystać z I wersji twierdzenia Cantora)

Ustalmy $\mathcal{F} \subseteq P(X)$ - rodzina scentrowana zbiorów domkniętych zawierająca zbiory o dowolnie małych średnicach

Niech F_1 będzie zbiorem o średnicy mniejszej niż $\frac{1}{2^1}$

Niech F_2 będzie zbiorem o średnicy mniejszej niż $\frac{1}{2^2}$

itd.

$diam_{n\to\infty}(F_n) < \frac{1}{2^n}$

$A_1 = F_1$

$A_2 = F_1 \cap F_2$

$\vdots$

$A_n = F_1 \cap F_n \quad n \in \mathbb{N}$ (bo ma FIP)

$\mathcal{A} = \{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ - jest rodziną zbiorów domkniętych spełniających założenia twierdzenia 12.1 $\Rightarrow \bigcap \mathcal{A} \neq \emptyset$

Niech $x \in \bigcap \mathcal{A}$

Pokażemy, że $x \in \bigcap \mathcal{F}$

Hipoteza

$\exists_{F_0 \in \mathcal{F}} x \notin F_0$

$A'_1 = A_1 \cap F_0$

$A'_2 = A_2 \cap F_0$

$\vdots$

$A'_n = A_n \cap F_0 \quad n \in \mathbb{N}$

Wtedy rodzina $\mathcal{A}' = \{A'_n : n \in \mathbb{N}\}$ także spełnia założenia twierdzenia 12.1

Stąd $\bigcap \mathcal{A}' \neq \emptyset$

Ale $\bigcap \mathcal{A}' \subseteq \bigcap \mathcal{A} = \{x\}$ - uwaga 12.1

Sprzeczność!

Definicja 12.2

Mówimy, że zbiór $A \subseteq (X, \tau)$ jest zbiorem I kategorii Baire'a, gdy jest sumą przeliczalnie wielu zbiorów nigdziegęstych (tzn. $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ gdzie $\mathrm{intcl} A_n = \emptyset$)

Twierdzenie 12.3 (Baire'a)

W przestrzeni zupełnej każdy zbiór I kategorii jest zbiorem brzegowym

Innymi słowy: w przestrzeniach zupełnych zbiory będące przekrojem przeliczalnie wielu zbiorów otwartych i gęstych sa zbiorami gęstymi

Dowód

Niech (X, ϱ) bedzie przestrzenia zupełną oraz niech $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n$, gdzie G_n jest gęsty i otwarty dla każdego $n \in \mathbb{N}^+$

Pokażemy, że A jest gęsty

Ustalmy $\emptyset \neq U \in \tau_\varrho$

(?) $U \cap A \neq \emptyset$

Mamy $\forall_{n \in \mathbb{N}} \quad U \cap G_n \neq \emptyset$ (bo G_n są gęste)

$n = 1 \quad X_1 = U \cap G_1 \neq \emptyset$ - jest to zbiór otwarty jako przekrój dwóch zbiorów otwartych

Ponieważ przestrzenie metryczne sa regularne, to istnieje taki zbiór otwarty $V_1 \subseteq X$, że

$X_1 \in V_1 \subseteq \mathrm{cl} V_1 \subseteq U \cap G_1 \cap K_\varrho(X_1, \frac{1}{2^1})$ - otwarty i niepusty, X_1 tam należy

Zauważmy, że $diam\ \mathrm{cl} V_1 < 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$

Analogicznie

$n = 2$

$x_2 \in V_1 \cap G_2 \neq \emptyset$ (bo G_2 gęste) - jest to zbiór otwarty

Wybieramy $V - 2 \in \tau_\varrho$ tak, aby

$X_2 \in V_2 \subseteq \text{cl}V_2 \subseteq V_1 \cap G_2 \cap K_\varrho(X_2, \frac{1}{4})$ - otwarty i niepusty (X_2 tam należy)

Mamy wtedy $\text{cl}V_2 \subseteq V_1 \subseteq \text{cl}V_1$

$diam V_2 < 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ itd...

Na n-tym miejscu:

$X_n \subseteq V_n \subseteq \text{cl}V_n \subseteq V_{n-1} \cap G_n \cap K_\varrho(x, \frac{1}{2^n})$

Mając skonstruowaną rodzinę $\{ \text{cl}V_n : n \in \mathbb{N}^+\}$ zauwazmy, że jeśli jest to rodzina scentrowana złożona ze zbiorów domkniętych o średnicach malejących do zera to na mocy twierdzenia Cantora:

$\{x\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^+} \text{cl}V_2 \neq \emptyset$

Mamy

$\forall_n \quad x \in \text{cl}V_2 \Rightarrow (n = 1) \Rightarrow x \in \text{cl}V_1 \subseteq U$

$\forall_n \quad x \in \text{cl}V_n \subseteq G_n \Rightarrow x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} = A$

Uwaga 13.1

W dowolnej przestrzeni topologicznej (X, τ) przekrój skończonej ilości zbiorów otwartych i gęstych jest zawsze gęsty

Indukcja:

$n = 2 \quad G_1, G_2$ - geste i otwarte

$\forall_{\emptyset \neq U \in \tau_\varrho} \quad U \cap G_1 \neq \emptyset$ (zb. otwarty) $\Rightarrow G_2 \cap (U \cap G_1) \neq \emptyset$

$n + 1$ - ćwiczenie

Przykład 13.1

Przestrzeń $\mathbb{R}$ z metryką euklidesową jest przestrzenia zupełną

Istotnie ustalmy $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ - ciąg Cauchy'ego

$\exists_{n_0\in\mathbb{N}} \quad \forall_{n\geqslant n_0} \quad |x_n - x_{n_0}| < 1 \Rightarrow \forall_{n\geqslant n_0} \quad x_n \in [x_{n_0} - 1, x_{n_0} + 1]$

Odcinek $[x_{n_0} - 1, x_{n_0} + 1]$ jest zwarty, a więc na mocy twierdzenia Borela-Lebesgue'a jest ciągowo-zwarty

Zatem spośród ciągu $\{x_n : n \geqslant n_0\}$ mozna wybrać podciąg zbieżny

Na mocy odpowiedniej uwagi ciąg $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ tez musi być zbieżny (jako ciąg Cauchy'ego zawierający podciąg zbieżny)

Definicja 13.1

Niech X będzie niepustym zbiorem

Mówimy, że ciąg $\{f_n : X \longrightarrow \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$

(I) spełnia jednostajny warunek Cauchy'ego, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0} \quad \exists_{n_0\in\mathbb{N}} \quad \forall_{n,m\geqslant n_0} \quad \forall_{x\in X} \quad |f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$$

$$[\forall_{n\geqslant n_0} \quad \forall_{x\in X} \quad |f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon]$$

(II) jest jednostajnie zbieżny do $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0} \quad \exists_{n_0\in\mathbb{N}} \quad \forall_{n\geqslant n_0} \quad \forall_{x\in X} \quad |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

Uwaga 13.2

Jeżeli $\{f_n : n\in\mathbb{N}\}\subseteq\mathbb{R}^X$ jest zbieżny jednostajnie do pewnej funkcji $f: X\longrightarrow\mathbb{R}$ to spełnia jednostajny warunek Cauchy'ego

Twierdzenie 13.1

Jeżeli ciąg $\{f_n : n\in\mathbb{N}\}$ spełnia jednostajny warunek Cauchy'ego to jest zbieżny jednostajnie do pewnej funkcji $f: X\longrightarrow\mathbb{R}$

Dowód

Mamy

$$\forall_{\varepsilon>0} \quad \exists_{n_0\in\mathbb{N}} \quad \forall_{n,m\geqslant n_0} \quad \forall_{x\in X} \quad |f_n(x)-f_m(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

Stąd dla każdego $x\in X$ ciąg $\{f_n(x)\in\mathbb{R} : n\in\mathbb{N}\}(I)$ jest ciągiem Cauchy'ego (w zwykłym sensie)
Skoro prosta jest przestrzenia zupełną to
$\forall x\in X \quad \exists_{y_x} \quad \lim_{n\to\infty} f_x(x)=y_x$
Definiujemy $f: X\longrightarrow\mathbb{R}$ wzorem $f(x)=y_x, x\in X$
Mamy

$$\forall_{x\in X} \quad \exists_{n_x\in\mathbb{N}} \quad \forall_{n\geqslant n_x} \quad |f_x(x)-y_x|<\frac{\varepsilon}{2}(II)$$

Dla każdego $x\in X \quad m_x = max\{n_x, n_0\}$
Wtedy dla każdego $n\geqslant n_0$ mamy

$$|f_n(x)-f(x)|\leqslant|f_n(x)-f_{m_x}(x)|+|f_{m_x}(x)-f(x)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

Wynika to z (I) i (II)

Twierdzenie 13.2

Granica jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji ciagłych $\{f_n : n\in\mathbb{N}\}\subseteq\mathbb{R}^X$ jest funkcją ciągłą

Dowód

Niech $f_n \rightrightarrows f \in \mathbb{R}^X$ (jednostajnie zbieżna)

f_n - ciągłe dla każdego n

(?) f - ciągła $\Leftrightarrow$ f - ciągła w każdym punkcie

Ustalmy $x_0 \in X \quad \varepsilon > 0$

Wtedy $\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad f_n$ jest ciągła w punkcie $x_0 (*)$

Ze zbieżności jendostajnej ciągu f_n do f mamy

$$\forall_{\varepsilon>0} \quad \exists_{n_0\in\mathbb{N}} \quad \forall_{n\geqslant n_0} \quad \forall_{x\in X} \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \ (***)$$

$\varepsilon := \varepsilon_0$

$(*)$ dla n_0

$\exists_{U_{x_0}\subseteq X} \quad f_{n_0}(U_{x_0}) \subseteq (f_n(x_0) - \frac{\varepsilon_0}{3}, f_n(x_0) + \frac{\varepsilon_0}{3})$ (**)

U_{x_0} - otwarte

Wystarczy sprawdzić, że $f(U_{x_0}) \subseteq (f(x_0) - \varepsilon_0, f(x_0) + \varepsilon_0)$

Ustalmy $x \in U_{x_0}$

(?) $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon_0$

Mamy:

$|f(x) - f(x_0)| \leqslant |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \leqslant \frac{\varepsilon_0}{3} + \frac{\varepsilon_0}{3} + \frac{\varepsilon_0}{3} = \varepsilon_0$ (z (**) raz i (***) dwa razy zastosowanego)

Lemat 13.1

W zbiorze $\mathbb{R}^X$ gdzie $X \neq \emptyset$ mozna okreslić metrykę ϱ równoważną jednostajnej zbieżności tzn. zachodzą wtedy warunki

$(i) \quad \forall_{\{f_n:n\in\mathbb{N}\}\subseteq\mathbb{R}^X \ f:x\to\mathbb{R}} \quad f_n \rightrightarrows f \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \varrho(f_n, f) = 0$

$(ii) \quad \forall_{\{f_n:n\in\mathbb{N}\}\subseteq\mathbb{R}^X} \quad \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ spełnia jednostajny warunek Cauchy'ego $\Leftrightarrow$ $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ jest ciągiem Cauchy'ego (w zwykłym sensie) w przestrzeni $(\mathbb{R}^X, \varrho)$

Dowód

Niech $\varrho(f, g) = \min\{\sup_{x\in X} |f(x) - g(x)|, 1\}$

Dla każdej pary $f, g \in \mathbb{R}^X$

Istotnie ϱ jest metryką

Oczywiście $\varrho(f, g) = 0 \Leftrightarrow f = g$

Symetria jest oczywista

Warunek trójkąta:

(?) $\varrho(f, h) \leqslant \varrho(f, g) + \varrho(g, h)$ dla $f, g, h \in \mathbb{R}^X$

I $\quad \varrho(f, g) = 1 \ \vee \ \varrho(g, h) = 1$

Wtedy $\varrho(f, h) \leqslant 1 \leqslant 1+$ "coś"

II $\varrho(f,g) = \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)| < 1$

$\varrho(g,h) = \sup_{x\in X} |g(x) - h(x)| < 1$

$\varrho(f,h) \leqslant \sup_{x\in X} \ |f(x) - h(x)| \leqslant$ (nierówność trójkąta) $sup_{x\in X} \ (|f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)|) \leqslant$
$\sup_{x\in X} \ |f(x) - g(x)| + \sup_{x\in X} \ |g(x) - h(x)| = \varrho(f,g) + \varrho(g,h)$

Zauważmy, że jednostajny warunek Cauchy'ego

$$\forall_{\varepsilon>0} \quad \exists_{n_0} \quad \forall_{n,m\geqslant n_0} \quad \forall_{x\in X} \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Implikuje

$$\forall_{\varepsilon>0} \quad \exists_{n_0} \quad \forall_{n,m\geqslant n_0} \quad \sup_{x\in X} |f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \varepsilon$$

(czyli $\geqslant \varrho(f_n, f_m)$)

Wynika stąd, ze ciąg $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ jest ciągiem Cauchy'ego w przestrzeni $(\mathbb{R}^X, \varrho)$

I odwrotnie jeśli $\forall_{0<\varepsilon<1} \quad \exists_{n_0} \quad \forall_{n,m\geqslant n_0} \quad \varrho(f_n, f_m) < \varepsilon$ $(= \sup_{x\in X} \ |g_n(x) - f_m(x)|)$

Stąd $\forall_{0<\varepsilon<1} \quad \exists_{n_0} \quad \forall_{n,m\geqslant n_0} \quad \forall_{x\in X} \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

$i) \quad f_n \rightrightarrows f \Leftrightarrow$

$\forall_{\varepsilon>0} \quad \exists_{n_0} \quad \forall_{n\geqslant n_0} \quad \forall_{x\in X} \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

A wiemy że po kwantyfikatorze "dla kazdego x" całość jest równa

$\sup_{x\in X} \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, ale jest tez $\geqslant \varrho(f_n, f)$

Czyli $n \to \infty$ czyli $\varrho(f_n, f) \to 0$

I odwrotnie analogicznie do (ii)

Wniosek 13.1

Przestrzeń funkcji ciągłych i ograniczonych określanych na zbiorze niepustym X o wartościach rzeczywistych, gdzie na X mamy zadaną topologię z metryka zupełną 'supremum' jest przestrzenią zupełną

Fakt

(X, ϱ) - przestrzeń metryczna

Wtedy $\varrho'(x,y) = \min\{\varrho(x,y), 1\}$ wyznacza metryke równoważną względem ϱ na X (ćwiczenie)

Dowód wniosku

Metryka 'supremum' jest równowazna metryce ϱ z poprzedniego lematu

$C^*(X) = \{f : X \to \mathbb{R}$ f - ciągła i ograniczona $\}$

Niech $\{f_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq C^*(X)$ będzie ciągiem Cauchy'ego przestrzeni $(C^*(X), \varrho)$

Na mocy lematu $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ spełnia jednostajny warunek Cauchy'ego

$C^*(X) \subseteq \mathbb{R}^X \Leftrightarrow \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ - zbieżne jednostajnie do pewnej funkcji f

$f : X \longrightarrow \mathbb{R} - f$ - ciągła (twierdzenie 13.2)

Pozostaje sprawdzić, że f jest ograniczona

Skoro $f_n \rightrightarrows f$ to

$$\forall_{\varepsilon>0} \quad \exists_{n_0} \quad \forall_{n \geqslant n_0} \quad \forall_{x \in X} \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

$\varepsilon := 1, n_0$ (dla $\varepsilon = 1) = n_1$

$f_{n_1} \in C^*(X) \Rightarrow \exists_{M>0} \ \sup_{x \in X} \ |f_{n_1}(x)| \leqslant M$

Ustalmy $x \in X$

$|f(x)| \leqslant |f(x) - f_{n_1}(x)| \ (< 1) \ + |f_{n_1}(x)| \ (< M)$

Zatem $\sup |f(x)| < 1 + M$

Definicja 14.1

Niech (X, d) oraz (Y, ϱ) bedą przestrzeniami metrycznymi

Funkcję $f : X \longrightarrow Y$ nazywamy izometrią, gdy

$\forall_{x,y} \quad d(x, y) = \varrho(f(x), f(y)) \quad (*)$

Czyli izometrie to funkcje, które zachowują odległość

Przykład: Dowolne translacje w przestrzeniach euklidesowych

Uwaga 14.1

Każda izometria jest różnowartościowa i ciągła

Istotnie

"$1-1$" Jeśli $f(x) = f(y)$ to z $(*)$ $d(x, y) = \varrho(f(x), f(y)) = 0$ więc $x = y$

Ciągłość: $\varepsilon > 0, x \in X$

Jeśli $\varrho(f(y), f(x)) < \varepsilon \Rightarrow (*) \ \ d(x, y) < \varepsilon$

$f^{-1}(K_\varrho(f(x), \varepsilon)) \supseteq K_d(x, \varepsilon)$

Definicja 14.2

Jeśli izometria $f : (X, d) \longrightarrow (Y, \varrho)$ jest suriekcją to jest homeomorfizmem

Mówimy wtedy, że przestrzenie (X, d) oraz (Y, ϱ) są izometryczne

Lemat 14.1

Niech (X, ϱ) będzie przestrzenią metryczną oraz niech $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ i $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ będą ciągami punktów zbioru X zbieżnymi odpowiednio do punktów x i y.

Wtedy $lim_{n\to\infty} \ \varrho(x_n, y_n) = \varrho_{n\to\infty}(\lim x_n, \lim y_n) = \varrho(x, y)$

Ustalamy $\varepsilon > 0$

Z założenia $\exists_{n_o = \max\{n_1, n_2\} \in \mathbb{N}} \quad \forall_{n > n_0} \quad \varrho(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} \wedge \varrho(y_n, y) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (n_1$ dla x_n, n_2 dla $y_n)$

$|\varrho(x_n, y_n) - \varrho(x, y)| \leqslant |\varrho(x_n, x) + \varrho(x, y) + \varrho(y_n, y) - \varrho(x, y)| = \varrho(x_n, x) + \varrho(y_n, y) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Przypomnienie:

$|\mathrm{dist}(x, A) - \mathrm{dist}(y, A)| \leqslant \varrho(x, y)$

lub prostsza wersja:

$|d(x,z) - d(y,z)| \leqslant \varrho(x,y) \quad (**)$

Twierdzenie 14.1

Każdą przestrzeń metryczną (X, ϱ) można zanurzyć izometrycznie w przestrzeni zupełnej

Dowód

$Y = C^*(X)$ - przestrzeń zupełna

Izometrię $\varrho : X \longrightarrow C^*(X)$ (z metryką supremum) określamy następująco

$\varrho(x) = \varphi_x$, gdzie $\forall_{y \in X} \quad \varphi_x(y) = d(x,y) - d(y,a)$ gdzie a jest ustalonym dowolnie punktem zbioru X

1) φ_x jest ciągła i ograniczona dla $x \in X$

Ciągłość: ustalamy $y_n \xrightarrow{n \to \infty} y$

(?) $\varphi_x(y_n) \longrightarrow \varphi_x(y)$

$|\varphi_x(y_n) - \varphi_x(y)| = |d(x,y_n) - d(y,a) - d(x,y) - d(y,a)| \leqslant |d(x,y_n) - d(x,y)| + |d(y,a) - d(y_n,a)| \leqslant$ $(**)$ $d(y_n,y)$ $(\to 0)$ $+ d(y_n,y)$ $(\to 0)$ $\longrightarrow 0$

Ograniczoność φ_x :

$|\varphi_x(y)| = |d(x,y) - d(y,a)| \leqslant$ $(**)$ $d(x,a)$ (zalezy od y, stałe)

2) Pozostaje sprawdzić, że ϱ jest izometrią

(?) $d(x,y) = \varrho(\varphi_x, \varphi_y)$

$\varrho(\varphi_x, \varphi_y) = \sup_{z \in X} |\varphi_x(z) - \varphi_y(z)| = \sup_{z \in X} |d(x,z) - d(z,a) - d(y,z) + d(z,a)| \leqslant d(x,y)$ (nie zależy od z)

Z drugiej strony

$\varrho(\varphi_x, \varphi_y) = \sup_{z \in X} |\varphi_x(z) - \varphi_y(z)| \geqslant$ $(z = x)$ $|\varphi_x(x) - \varphi_y(x)| = |d(x,x) - d(x,a) - d(x,y) + d(x,a)| = d(x,y)$

Twierdzenie 14.2

Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną oraz $A \subseteq X$ niech będzie jej podzbiorem gęstym. Wtedy każdą izometrię określoną na zbiorze A i o wartościach w przestrzeni zupełnej (Y, ϱ) można przeliczyć na dokładnie jeden sposób

Dowód

Niech $f : A \longrightarrow Y$ będzie izometrią (A - gęsty, Y - zupełna)

Definiujemy:

$\varrho : X \longrightarrow Y$ następująco

1) $g(x) = f(x) \quad x \in A$

2) $x \notin A \Rightarrow$ (gęstość A) $X = \mathrm{cl}A \Rightarrow x \in \mathrm{cl}A$

Zatem istnieje $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq A$ taki, że

$x_n \xrightarrow{d} x$

$g(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$

Należy sprawdzić, że

1) $g(x)$ zawsze istnieje

2) $g(x)$ nie zależy od wyboru ciągu x_n

3) g jest izometrią

4) g jest jedyna

Ad.1) Ustalmy $x_n \xrightarrow{d} x$ $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq A$

Wtedy $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ jako zbieżny spełnia warunek Cauchy'ego w X

Ponieważ f jest izometrią $\Rightarrow$ $(*)\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ jest także ciągiem Cauchy'ego $(*)$ (definicja 14.1), a więc na mocy zupełności (Y, ϱ) jest zbieżny

Ad.2 Niech $\lim_{n\to\infty} x_n = x = \lim_{n\to\infty} x'_n$

gdzie $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x'_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq A$

$\varrho(f(x_n), f(x'_n))$

(?) $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x'_n)$

$\varrho(\lim_{n\to\infty} f(x_n), \lim_{n\to\infty} f(x'_n)) = \lim_{n\to\infty} \varrho(f(x_n), f(x'_n)) =($ f izometryczna$)$ $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x'_n) = d(\lim_{n\to\infty} x_n, \lim_{n\to\infty} x'_n) = d(x, x) = 0$

Ad.3 (?) $\varrho(g(x), g(y)) = d(x, y)$ $x, y \in X$

I $x, y \in A$ - równość zachodzi: $g(x) = f(x)$ $g(y) = f(y) - f$ izometrią

II $x, y \notin A$

Niech $x_n(\in A) \xrightarrow{d} x$ $y_n(\in A) \xrightarrow{d} y$

$\varrho(g(x), g(y)) = \varrho(\lim_{n\to\infty} f(x_n), \lim_{n\to\infty} f(y_n)) = \lim_{n\to\infty} \varrho(f(x_n), f(y_n)) =$ (izometria) $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x, y)$

Ad.4 Wynika z poprzednich wykładów

Wniosek 14.1

Każdą przestrzeń metryczną (X, d) mozna zanurzyć izometrycznie w pewną przestrzeń zupełna (Y, ϱ) tak, aby obraz zbioru X poprzez to zanurzenie był gęsty w Y oraz tak, aby Y była wyznaczona jednoznacznie

Dowód

Na mocy twierdzenia 14.1 przestrzeń (X, d) można zanurzyć izometrycznie w $C^*(X)$ poprzez izometrię $g, Y = \mathrm{cl} g(X)$ - od razu widać, że obraz $g(X)$ jest gęsty w Y

Wtedy Y jest domkniętym podzbiorem przestrzeni zupełnej $C^*(X)$, a więc jest podprzestrzenią zupełną

Jednoznaczność wynika z poprzedniego twierdzenia

Przestrzeń $(Y, g\restriction_{Y^2})$ nazywamy uzupełnieniem przestrzeni X