Twierdzenie Peano

Robert Nazar

7 czerwca 2016

Geneza

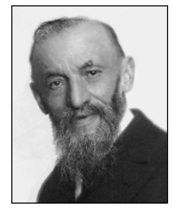
Twierdzenie Peano dotyczy istnienia rozwiązania zadania Cauchy'ego

$$y'(t) \equiv \frac{dy(t)}{dt} = f(t, y(t)) \tag{1a}$$

$$y(t_0) = 0 \tag{1b}$$

o ciągłej prawej stronie f.

Autorem tego twierdzenia jest włoski matematyk Giuseppe Peano. Pierwszy raz zostało ono zaprezentowane w 1886 roku wraz z błędnym dowodem. Poprawny dowód G.Peano przedstawił cztery lata później, w 1890 roku.



Treść twierdzenia

Tw. *(Peano)*
Niech $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ będzie zbiorem otwartym i niech f będzie funkcją ciągłą, $f \in C^0(D, \mathbb{R})$, wtedy dla dowolnego punktu $(t_0, y_0) \in D$ istnieje liczba $\alpha > 0$, taka że zadanie Cauchy'ego (1a),(1b) będzie miało rozwiązanie $y(t)$ określone dla $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, gdzie liczba α jest dostatecznie mała.

Dowód

Twierdzenie Peano można udowodnić na dwa różne sposoby. Pierwszym z nich jest użycie metod aproksymacyjnych (np. metody Eulera). Dowód ten jest jednak długi i skomplikowany technicznie. Drugim sposobem jest skorzystanie z dwóch twierdzeń z analizy funkcjonalnej. Pierwszym z nich jest twierdzenie Arzeli-Ascoliego (kryterium zwartości w przestrzeniach ciągłych $C^0([a, b])$), a drugim twierdzenie Schaudera. Właśnie za pomocą tych narzędzi przeprowadzimy postępowanie dowodowe. Na początku przypomnijmy treść dwóch interesujących nas twierdzeń pomocniczych.

Tw. *(Arzeli-Ascoliego)*
Niech G będzie podzbiorem przestrzeni $C^0([a, b])$, gdzie $[a, b]$ jest przedziałem w $\mathbb{R}^n$. Jeśli funkcje rodziny G spełniają warunki:

1. *są wspólnie ograniczone*
$$\underset{M>0}{\exists} \ \underset{x \in [a,b]}{\forall} \ \underset{g \in G}{\forall} |g(x)| \leqslant M$$
2. *sa jednakowo jednostajnie ciągłe*
$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \ \underset{\delta>0}{\exists} \ \underset{x_0 \in [a,b]}{\forall} \ \underset{g \in G}{\forall} |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$$

to zbiór G jest względnie zwarty w $C^0([a,b],\mathbb{R}^n)$

Dowód tego twierdzenia w języku polski możemy znaleźć w książce Juliana Musielaka - Wstęp do analizy funkcjonalnej. Przypomnimy teraz definicję względnej zwartości.

Def.
W przestrzeni metrycznej zwartość zbioru jest równoważna ciągowej zwartości tzn. z dowolnego ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ można wybrac podciąg zbieżny do pewnego elementu $a \in A$. Względna zwartośc mówi tyle, że zbiór B jest względnie zwarty, gdy $\overline{B}$ jest zwarty.

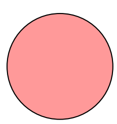
Drugim istotnym twierdzeniem jest twierdzenie Schaudera.

Tw. *(Schaudera)*
Jeśli K jest zbiorem niepustym, domkniętym i wypukłym w przestrzeni Banacha B, a odwzorowanie $T\colon K \to K$ jest ciągłe i ma tę własność, że obraz $T(K)$ jest względnie zwarty to istnieje punkt $x_0 \in K$, że $T(x_0) = x_0$

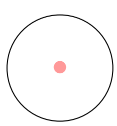
Twierdzenie to informuje nas o tym, że punkt stały istnieje. Nie wykazuje jednak jego jednoznaczności. Fakt ten powierdzają poniższe przykłady.

Przykład. *Niech K będzie kulą domknięta w $\mathbb{R}^n$ o środku w 0 i promieniu 1.*

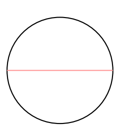
1. *$T = id$ - wszystkie punkty są stałe.*



2. *T - obrót o kąt 60° - jeden punkt stały (środek).*



3. *T - obrót o kąt 180° - średnica stanowi zbiór punktów stałych.*



Uwaga. *Jeśli stosujemy twierdzenie Schaudera w przestrzeni funkcji ciągłych $C^0([a,b],\mathbb{R})$ to do sprawdzenia względnej zwartości stosujemy twierdzenie Arzeli-Ascoliego.*

Mając już podane dwa pomocnicze twierdzenia możemy przejść do właściwego dowodu twierdzenia Peano.

Dowód.
Ustalmy punkt $(\underbrace{t_0}_{\in\mathbb{R}}, \underbrace{y_0}_{\in\mathbb{R}^n}) \in D$ i obierzmy stałe $a, b > 0$ tak, aby kostka

$$P = \{(t,y) \in \mathbb{R}^{n+1} \colon |t - t_0| \leqslant a,\ |y - y_0| \leqslant b\}$$

zawarta była w D (czyli P jest zbiorem zwartym całkowicie zawartym w zbiorze otwartym). Na mocy ciągłości f w D funkcja f musi (w zbiorze zwartym) przyjmować kresy. W szczególności

$$\underset{M>0}{\exists} \underset{(t,y)\in P}{\forall} |f(t,y)| \leqslant M$$

Obierzmy stałą α w taki sposób, aby $\alpha \leqslant \min\{a, \frac{b}{M}\}$. W przestrzeni Banacha $B = C^0([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha])$ rozpatrujemy zbiór

$$K = \{\phi \in C^0([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]) \colon ||\phi - y_0||_B \leqslant b\}$$

gdzie y_0 - stała, $||\phi - y_0|| = \sup_{t\in[t_0-\alpha,t_0+\alpha]},\ ||\phi(t) - y_0|| \leqslant b$

W jednym wymiarze jest to kula o promieniu b i środku y_0. Określimy teraz odwzorowanie $T \colon K \to B$ dane wzorem

$$T(\phi)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi(s))ds$$

Musimy sprawdzić, że dla wprowadzonych wyżej obiektów zachodzi twierdzenie Schaudera. Zauważmy, że zbiór K jest kulą domkniętą w przestrzeni B, stąd jest to zbiór niepusty i wypukły:

1. $y_0 \in K \Longrightarrow K$ - niepusty
2. $\phi_1, \phi_2 \in K,\ \beta\phi_1 + (1-\beta)\phi_2 \in K$ - kombinacja jest funkcją ciągłą (trzeba wykazać, że jeśli $||\phi_1 - y_0|| \leqslant b,\ ||\phi_2 - y_0|| \leqslant b$ to zachodzi $||(\beta\phi_1 + (1-\beta)\phi_2) - y_0|| \leqslant b$ - zadanie domowe).

Zamiast szukać rozwiązań równania (1a),(1b) możemy równoważnie szukać punktów stałych T w K. W tym celu zastosujemy twierdzenie Schaudera. Przejdźmy więc do sprawdzenia jego warunków. Zobaczmy, że $T(K) \subset K$. Niech $\phi \in K$, zauważmy, że $T(\phi)$ jest funkcja ciągłą (jako całka górnej granicy y), szacujemy dalej:

$$||T(\phi) - y_0|| = \sup_{t\in[t_0-\alpha,t_0+\alpha]} |T(\phi)(t) - y_0| = \sup_{t\in[t_0-\alpha,t_0+\alpha]} |y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\phi(s))ds - y_0| \leqslant$$

$$\sup_{t\in[t_0-\alpha,t_0+\alpha]} \int_{t_0}^{t} |f(s,\phi(s))|ds \leqslant M \leqslant \alpha \cdot M \leqslant b$$

Pozostała nam do sprawdzenia własność, że $T(K)$ jest zbiorem względnie zwartym w przestrzeni Banacha funkcji ciągłych. Sprawdzimy to przy użyciu twierdzenia Arzeli-Ascoliego (stosując je do $T(K)$ jako podzbioru funkcji ciągłych). Po pierwsze $K \subset C^0([t_0-\alpha, t_0+\alpha])$ i dodatkowo zbiór $\overline{T(K)}$ jest ograniczony w przestrzeni funkcji ciągłych $C^0([t_0-\alpha, t_0+\alpha])$ bowiem

$$||\phi - y_0||_{C^0([t_0-\alpha,t_0+\alpha])} \leqslant b$$

dokładniej

$$||\phi||_{C^0([t_0-\alpha,t_0+\alpha])} \leqslant ||\phi - y_0||_{C^0([t_0-\alpha,t_0+\alpha])} + ||y_0||_{C^0([t_0-\alpha,t_0+\alpha])} \leqslant b||y_0||_{C^0([t_0-\alpha,t_0+\alpha])}$$

Wszystkie normy są szacowane przez jedna stałą, stąd wszystkie elementy K są wspólnie ograniczone. Po drugie musimy sprawdzić, że elementy $T(\phi)\colon \phi \in K$ są jednakowo jednostajnie ciągłe. Rzeczywiście

$$|T(\phi)(t) - T(\phi)(s)| = \Big|\int_s^t f(z,\phi(z))dz\Big| \leqslant \int_s^t |\underbrace{f(z,\phi(z))}_{\leqslant M}|dz \leqslant M\cdot(t-s)$$

$M\cdot(t-s)$ jest takie samo dla wszystkich ϕ, wynik oszacowania zatem nie zależy od wyboru ϕ z K i pokazuje ciągłość (jednakową jednostajną).
$T(K)$ spełnia założenia twierdzenie Arzeli-Ascoliego, więc jest to zbiór względnie zwarty. Pozostało pokazać, że $T\colon K \to K$ jest ciągłe jako odwzorowanie pomiędzy przestrzeniami Banacha. Sprawdzimy teraz ostatni warunek z twierdzenia Schaudera czyli ciągłość $T\colon K \to K$. Aby to pokazać użyjemy ciągłości funkcji f w prostokącie P
Dla dowolnych $(t_1,y_1),(t_2,y_2) \in P$ i $\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists} |(t_1,y_1)-(t_2,y_2)| < \delta \Rightarrow |f(t_1,y_1)-f(t_2,y_2)| < \dfrac{\varepsilon}{\alpha}$.
Weźmy dowolne $\varphi,\psi \in K$ i argument $s \in [t_0-\alpha, t_0+\alpha]$ oraz $||\varphi-\psi||_B \leqslant \delta$. Wtedy

$$||\varphi-\psi||_B \leqslant \delta \Rightarrow |f(s,\varphi(s)) - f(s,\psi(s))| < \frac{\varepsilon}{\alpha}$$

Dalej

$$||T(\varphi)-T(\psi)||_B = \sup_{t\in[t_0-\alpha,t_0+\alpha]} \Big|y_0 + \int_{t_0}^t f(s,\varphi(s))ds - y_0 + \int_{t_0}^t f(s,\psi(s))ds\Big| =$$

$$= \sup_{t\in[t_0-\alpha,t_0+\alpha]} \Big|\int_{t_0}^t [f(s,\varphi(s)) - f(s,\psi(s))ds]\Big| \leqslant \sup_{t\in[t_0-\alpha,t_0+\alpha]} \int_{t_0}^t |f(s,\varphi(s)) - f(s,\psi(s))|ds \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{t\in[t_0-\alpha,t_0+\alpha]} \int_{t_0}^t \frac{\varepsilon}{\alpha} ds \leqslant \varepsilon$$

To oznacza, że $T\colon K \to K$ jest ciągły w przestrzeni funkcji ciągłych B.
Sprawdziliśmy zatem wszystkie założenie twierdzenia Schaudera. W rezultacie operator T ma w zbiorze K punkt stały (niekoniecznie jeden).

$$\underset{u\in K}{\exists} T(u) = u$$

Mamy więc ciągłe rozwiązanie równania całkowego

$$y_0 + \int_{t_0}^t f(s,u(s))ds = u(t) \text{ dla } t \in [t_0-\alpha, t_0+\alpha]$$

To ciągłe rozwiązanie jest automatycznie różniczkowalnym rozwiązaniem zadania Cauchy'ego (1a),(1b) $\square$