Wykazanie, że splot dwóch identycznych funkcji prostokątnych jest funkcją trójkątną

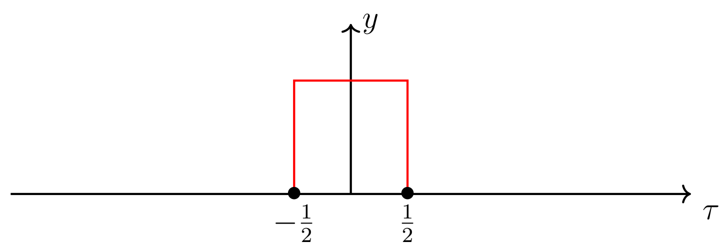
Na początku przypomnijmy definicję funkcji prostokątnej i trójkątnej

$$\mathrm{rect}(t) = \begin{cases} 0, & |t| > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & |t| = \frac{1}{2} \\ 1, & |t| < \frac{1}{2} \end{cases} \qquad\qquad tri(t) = \begin{cases} 1-|t|, & |t| < 1 \\ 0, & |t| \geqslant 1 \end{cases}$$

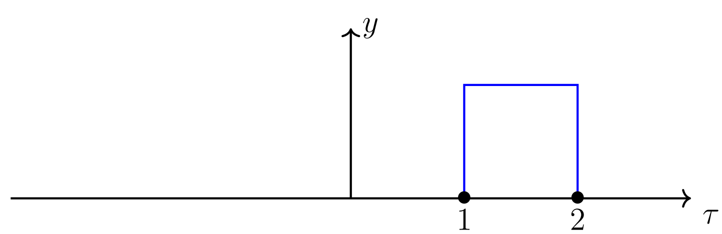
Naszym celem jest obliczeniu splotu dwóch funkcji prostokątnych czyli

$$\mathrm{rect}(t) * \mathrm{rect}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}(\tau) \cdot \mathrm{rect}(t-\tau)\, d\tau$$

Całkowanie odbywać się będzie tutaj względem zmiennej τ, a zmienna t w całce będzie pełniła rolę stałej. Rozważymy teraz przypadki, dla których splot przyjmować będzie różne wartości. Na początku przeprowadzimy badanie pewnych wartości t, tak aby móc zaobrazować i ogolnić uzyskane rezultaty dla dowolnego t. Rozpocznijmy od wykresu funkcji prostokątnej $\mathrm{rect}(\tau)$.



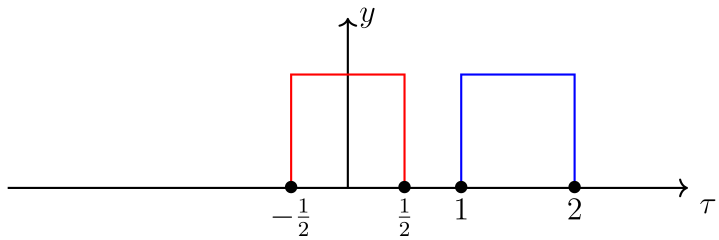
Wykres funkcji $\mathrm{rect}(t-\tau)$ będzie miał identyczny kształt, lecz będzie nieco przesunięty w zależności od wartości t. Przykładowo poniżej prezentujemy wykres funkcji $\mathrm{rect}(\frac{3}{2}-\tau)$.



Postać powyższego wykresu łatwo uzyskać stosując wprost definicję:

$$\mathrm{rect}\left(\frac{3}{2}-\tau\right) = \begin{cases} 0, & \left|\frac{3}{2}-\tau\right| > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & \left|\frac{3}{2}-\tau\right| = \frac{1}{2} \\ 1, & \left|\frac{3}{2}-\tau\right| < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Zauważmy, że iloczyn funkcji prostokątnych pod całką będzie zerowy, jeśli ”oba prostokąty” (wykresy obu funkcji prostkątnych) nie będą miały części wspólnej. Przykładowo w poniższej sytuacji



dla $\tau \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ wartości różne od zera uzyskamy dla czerwonego prostokąta, a zerowe dla niebieskiego (iloczyn będzie zatem równy zero), z kolei dla $\tau \in [1, 2]$ będziemy mieli odwrotną sytuację czyli wartości różne od zera uzyskamy dla niebieskiego prostokąta, a zerowe dla czerwonego (ale iloczyn dalej będzie wynosił zero). Dla pozostałych wartości τ oczywiście uzyskamy dla obydwu prostokątów zera czyli także i tu iloczyn będzie zerowy. Stąd możemy stwierdzić, że w takich sytuacjach splot wyniesie 0 (gdyż pod całką mamy 0).

Interesować nas będzie zatem takie t, od którego wykresy "niebieskiego prostokąta" zarówno po lewej jak i po prawej stronie będą miały pewne wspólne pole z "czerwonym" prostokątem. Po obu stronach sytuacja będzie symetryczna, dlatego wystarczy że wyznaczmy interesujące nas "graniczne" t dla "niebieskiego prostokąta" leżącego na prawo od "czerwonego". Zauważmy zatem, że prawy koniec przedziału, w którym "czerwony prostokąt" przyjmuje wartości różne od zera (czyli $\frac{1}{2}$) musi być lewym końcem takowego przedziału dla "niebieskiego prostokąta". Stąd korzystając z nierówności dla krańcowych wartości przedziału

$$|t - \tau| = \frac{1}{2}$$

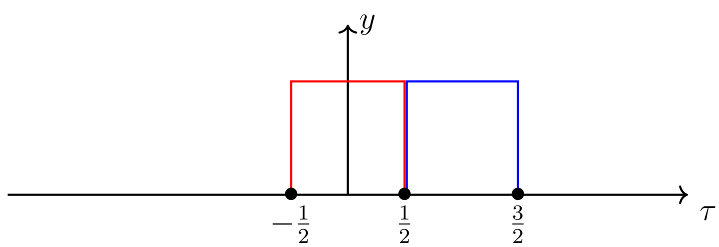
uzyskujemy, że

$$\tau = t - \frac{1}{2} \quad \text{lub} \quad \tau = t + \frac{1}{2} \tag{1}$$

Chcemy mieć lewy kraniec przedziału "niebieskiego prostokąta", więc wybieramy mniejszą wartość τ i przyrównujemy do $\frac{1}{2}$ czyli prawego krańca przedziału dla "czerwonego prostokąta"

$$t - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Longrightarrow t = 1$$

dostając w ten sposób wartość granicą $t = 1$.

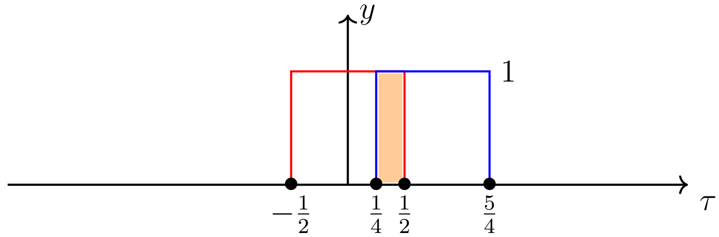


Zatem dla $t > 1$ otrzymamy wartości iloczynu prostokątów równe 0, a przez co idzie splot także wyniesie 0, z lewej strony sytuacja wygląda symetrycznie, stąd od razu możemy stwierdzić, że

$$\text{rect}(\tau) \cdot \text{rect}(t - \tau) = 0 \text{ dla } |t| \geqslant 1.$$

(dodaliśmy tutaj także punkty $t = 1$ oraz $t = -1$, gdyż całka z pojedynczych punktów jest nieistotna, nie wpływa na otrzymany rezultat i dlatego można ją pominąć)

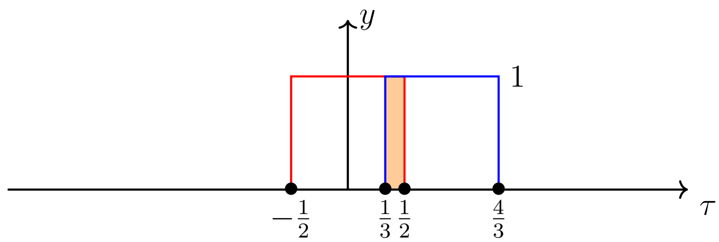
Teraz zajmiemy się sytuacją, gdy prostokąty mają pewną część wspólną czyli gdy $t \in (-1, 1)$. Weźmy przykładowo $t = \frac{3}{4}$ i zauważmy co się stanie.



W tym przypadku całka będzie równa polu zaznaczonego na pomarańczowo prostokąta czyli wynosić będzie

$$P = \underbrace{1}_{h} \cdot \left(\underbrace{\frac{1}{2}}_{p} - \left(\underbrace{\frac{3}{4} - \frac{1}{2}}_{l} \right) \right) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

gdzie $h = 1$ oznacza długość pionowego boku, p oznacza prawy koniec poziomego boku, a l oznacza lewy koniec poziomego boku wyliczany analogicznie jak (1) (wzór pierwszy na lewy koniec). Podobnie wyliczymy splot dla $t = \frac{5}{6}$.



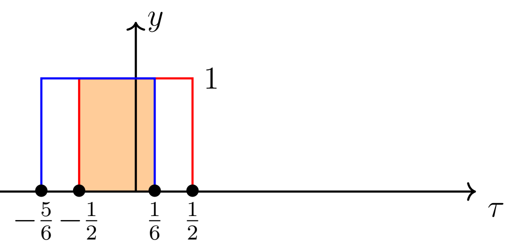
Tutaj pole wynosi

$$P = 1 \cdot \left(\frac{1}{2} - \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{2} \right) \right) = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$

Zauważyć możemy analogię do poprzedniego przykładu. Stąd wywnioskować możemy, że dla dowolnego $t \in [0, 1)$ uzyskujemy całkę (pole) równe

$$P = 1 - t$$

A co z ujemnymi wartościami t? Jak wygląda sytuacja, gdy "niebieski prostokąt" leży na lewo od "czerwonego"? Rozumując analogicznie weźmy przykładowo $t = -\frac{1}{3}$.



Pole wyniesie wtedy

$$P = \underbrace{1}_{h} \cdot \left(\underbrace{-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}_{p} - \left(\underbrace{-\ \frac{1}{2}}_{l} \right) \right) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

gdzie $h = 1$ oznacza długość pionowego boku, l oznacza lewy koniec poziomego boku, a p oznacza prawy koniec poziomego boku wyliczany analogicznie jak (1) (wzór drugi na prawy koniec). Zatem w tej sytuacji dla dowolnego t uzyskamy całkę (pole)

$$1 - |t|$$

Stąd dla dowolnego $t \in (-1, 1)$ możemy zapisać, że pole prostokąta będącego częścią wspólną "prostokąta czerwonego" i "niebieskiego" wynosi

$$P = 1 - |t|$$

Podsumując uzyskujemy, że

$$\mathrm{rect}(t) * \mathrm{rect}(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & |t| < 1 \\ 0, & |t| \geqslant 1 \end{cases} = tri(t)$$

Transformata Fouriera funkcji $sinc^2(x)$

Obliczymy transformatę Fouriera funkcji $f(x) = sinc^2(x)$ korzystając z definicji splotu funkcji, transformaty funkcji $sinc(x)$ oraz faktu, że splot funkcji prostokątnych jest funkcją trójkątną. Jak wiadomo przyjmuje się kilka definicji transformaty Fouriera. My definiujemy transformatę unitarną w oparciu o częstość kołową czyli

$$\widehat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iyx}\, dx$$

Wiemy, że transformata funkcji $g(x) = sinc(x)$ wynosi

$$\widehat{g}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{rect}\left(\frac{y}{2\pi}\right) \tag{2}$$

gdzie rect oznacza funkcję prostokątną.
Przypomnimy teraz jedną z własności transformaty Fouriera pozwalającą obliczyć transformaty iloczynu funkcji

$$\widehat{fg} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{f} * \widehat{g} \tag{3}$$

Chcemy obliczyć transformatę $f(x) = sinc^2(x)$, zapiszmy ją zatem w postaci iloczynu

$$f(x) = sinc^2(x) = sinc(x) \cdot sinc(x)$$

i skorzystajmy z własności (3) oraz transformaty (2), wtedy

$$\widehat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{rect}\left(\frac{y}{2\pi}\right) * \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{rect}\left(\frac{y}{2\pi}\right) \right) \tag{4}$$

Przypomnijmy definicję splotu funkcji

$$f(y) * g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(y - x)\, dx \tag{5}$$

W naszym przypadku mamy do czynienia ze splotem dwóch identycznych funkcji prostokątnych, zauważmy że poprzez zamianę zmiennych uzyskujemy

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{rect}\left(\frac{y}{2\pi}\right) * \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{rect}\left(\frac{y}{2\pi}\right) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{rect}\left(\frac{x}{2\pi}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{rect}\left(y - \frac{x}{2\pi}\right)\, dx = \\
&= \left\{ \begin{array}{c} \frac{x}{2\pi} = t \\ dx = 2\pi\, dt \end{array} \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \mathrm{rect}\,(t) \cdot \mathrm{rect}\,(y - t)\, 2\pi dt = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}\,(t) \cdot \mathrm{rect}\,(y - t)\, dt = \\
&= \mathrm{tri}(t) = \mathrm{tri}\left(\frac{x}{2\pi}\right)
\end{aligned}$$

gdzie tri oznacza funkcje trójkątną.
A stąd wstawiając powyższe do (4) otrzymujemy

$$\widehat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{tri}\left(\frac{x}{2\pi}\right)$$