Zastosowanie Szeregów Fouriera

Robert Nazar

Instytut Matematyki

Katowice, 10 lipca 2017

Zawartość Pracy

- Podstawowe pojęcia z teorii sygnałów,
- Przestrzeń L^2,
- Układ ortonormalny i współczynniki Fouriera,
- Szereg Fouriera,
- Szeregi Fouriera w teorii sygnałów,
- Transformacja Fouriera
- Transformacja Fouriera w teorii sygnałów
- Arkusz obliczeniowy

Sygnał

Sygnał - model zmian danej wielkości lub stanu fizycznego obiektu.

Sygnał analogowy

Sygnał analogowy - przedstawia przebieg określonej wielkości fizycznej

$$x(t) = X_m \sin(\omega t + \varphi_0)$$

Podstawowe sygnały analogowe

- Sygnał impulsowy

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } t \neq 0 \\ \infty & \text{gdy } t = 0 \end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1$$

- Sygnał jednostkowy

$$\mathbf{1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{dla } t < 0 \end{cases}$$

- Sygnał wykładniczy prawostronny

$$x(t) = e^{\alpha t} \cdot 1(t)$$

- Sygnał harmoniczny

$$x(t) = A_m \cos(\omega t + \psi)$$

Przestrzeń L^2

Niech $(X, \mathcal{A}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą.

$$L^2(\mu) = \{f : X \to \mathbb{C} \colon \int_X |f|^2 d\mu < \infty\}$$

Przestrzeń L^2

Przestrzeń L^2 jest przestrzenią

- liniową (nad ciałem $K \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$),
- unitarną, z iloczynem skalarnym danym wzorem

$$\langle f, g \rangle = \int_X f\overline{g}\, d\mu,$$

- unormowaną, z normą daną wzorem

$$||f|| = \left(\int_X |f|^2\, d\mu \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Układ ortonormalny

Niech $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ będzie przestrzenią unitarną.
Niepusty zbiór $A \subset V$ - układ ortonormalny.

1. $||u|| = \sqrt{\langle u, u\rangle} = 1$ dla $u \in A$
2. $\langle u, v\rangle = 0$ dla $u, v \in A$ i $u \neq v$

Przykład

Niech $V = L^2[-\pi, \pi]$ oznacza przestrzeń funkcji całkowalnych z kwadratem na przedziale $[-\pi, \pi]$.

$$v_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int} \text{ dla } n \in \mathbb{Z}$$

Układ ortonormalny zupełny

Układ ortonormalny $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nazywamy zupełnym, gdy

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \langle x, v_n\rangle = 0 \Rightarrow x = 0$$

Współczynniki Fouriera

$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - układ ortonormalny w przestrzeni unitarnej $(V, \langle\cdot|\cdot\rangle)$. Dla dowolnego $x \in V$ liczby

$$c_n = \langle x, v_n \rangle$$

nazywamy współczynnikami Fouriera, a ciąg $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nazywamy ciągiem Fouriera względem układu $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Szereg Fouriera

Jeżeli $f \in L^2[-\pi, \pi]$ i f przyjmuje wartości rzeczywiste, to

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)),$$

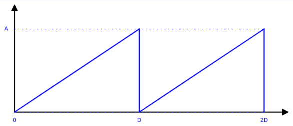
gdzie

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt)\ dt, \quad n \geqslant 0,$$

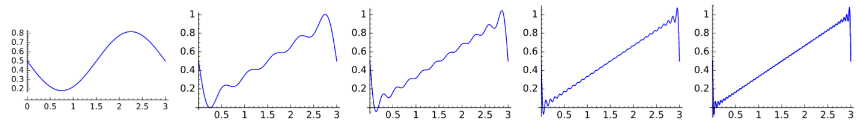
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt)\ dt, \quad n \geqslant 1.$$

Szeregi Fouriera w teorii sygnałów - przykład

Sygnał o okresie D i amplitudzie A



$$f(t) = \frac{A}{2} - \frac{A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{2n\pi t}{D})}{n}.$$



Transformacja Fouriera

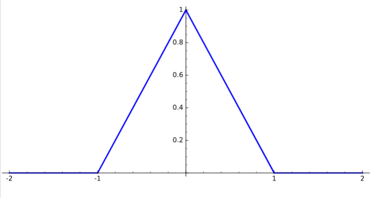
Przekształceniem Fouriera funkcji $f \in L^1(\mathbb{R})$

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixy} \, dx.$$

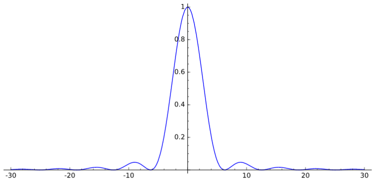
$f \longmapsto \hat{f}$ - transformacja Fouriera.

Transformacja Fouriera w teorii sygnałów

Okno trójkątne o szerokości 2 i amplitudzie 1.



Transformacja



Dziękuje za uwagę.